

論文97-34S-1-12

임의의 1차원 신호의 최소 위상 신호화와 2차원 위상복원문제에의 응용

(Enforcing minimum-phase conditions on an arbitrary one-dimensional signal and its application to two-dimensional phase retrieval problem)

金 禹 植 *

(Wooshik Kim)

요 약

위상 복원 문제는 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호 또는 그 신호의 푸리에 변환의 위상을 구하는 문제로, 일반적으로 이 문제는 유일한 해를 갖지 않지만, 구하고자 하는 신호가 최소위상 신호면 유일하게 결정될 수 있다. 이 논문에서는 첫째로, 임의의 1차원 신호가 주어졌을 때, 이 신호에 큰 신호 값을 갖는 점함수를 적절히 더하면 인위적으로 최소위상 신호 및 (준)최대위상 신호를 구할 수 있다는 것의 이론적인 배경과, 둘째로, 임의의 2차원 신호의 원점에 충분히 큰 신호 값을 갖는 점함수를 더하면, 더해진 신호는 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정이 될 수 있으며, 셋째로, 이 신호는 여러 개의 일차원의 최소위상 신호로 분해할 수 있다는 점을 보이고, 끝으로 복원 알고리즘과 예를 보인다.

Abstract

The phase retrieval problem is concerned with the reconstruction of a signal or its Fourier transform phase from the Fourier transform magnitude of the signal. This problem does not have a unique solution, in general. If, however, the desired signal is minimum-phase, then it can be decided uniquely. This paper shows that we can make a minimum-phase signal by adding a delta function having a large value at the origin of an arbitrary one-dimensional signal, and a two-dimensional signal can be uniquely specified from its Fourier transform magnitude if it is added by a delta function having a large value at the origin, and finally we can solve a two-dimensional phase retrieval problem by decomposing it into several one-dimensional phase retrieval problems..

I. 서 론

위상 복원 문제는 알고자하는 신호의 푸리에 변환의 크기 (Fourier Transform Magnitude; 이하 푸리에 크기)로부터 그 신호 또는 그 신호의 푸리에 변환 위상

(Fourier Transform Phase; 이하 푸리에 위상)을 구하는 문제로 광학이나 천문학에서와 같이 멀리 (far-field)로부터 전파되는 전자기파의 측정이나 레이저에서와 같이 coherent wave의 검출 및 전자현미경학, X-선 결정학 등과 같은 많은 물리적인 현상에서 나타난다^[1]. 이 문제는 일반적으로 유일한 해를 갖지 않아서, 구하고자 하는 신호에 아무런 제약 조건이 없으면, 하나의 해 신호에 전 대역 통과 (All-pass) 신호를 컨볼루션시켜, 같은 푸리에 크기를 갖는 신호를 무한히 많이 구할 수 있다^[2]. 원하는 신호가 유한한

* 正會員, 明知大學校 電氣電子工學部

(School of Electrical and Electronics Engineering, Myongji Univ.)

接受日字: 1996年7月31日, 수정완료일: 1997年1月7日

신호영역을 갖도록 제한하여도, 자리아동 변환, 역공간 변환, 또는 부호 반전 (Sign-reversal) 등의 크기 보존 변환 (Magnitude Preserving Transformation) 으로 유한한 신호영역을 갖는 신호를 무한히 많이 구할 수 있다¹¹⁾. 특히, 원하는 신호가 1차원의 유한한 신호일 경우에는, Zero-flipping이라는 Non-trivial 크기 보존 변환 (Non-trivial Magnitude Preserving Transformation)을 이용하여, 원하는 신호와 전혀 다른 성질을 갖지만, 같은 푸리에 크기와 같은 길이, 영역을 갖는 신호를 구할 수 있다¹¹⁾.

이 위상 복원 문제는 일반적으로 유일한 해를 갖지 않지만, 특별한 경우에는 유일한 해를 갖는 경우가 있다. 그 중에 가장 잘 알려진 경우가, 구하고자 하는 신호가 유한한 길이를 갖는 1차원 최소 위상 신호인 경우로, 이 신호는 그 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 유일하게 결정될 뿐만 아니라, Hilbert transform과 같은 알고리즘을 이용하여 복원할 수 있다^{12,3)}. 이렇듯, 위상복원문제에서 신호의 최소 위상 성질은 중요하고, 실제로 Black-body Radiation에서 발생하는 신호가 최소위상의 성질을 갖고 있다는 것만이 알려져 있다¹⁴⁾. 하지만, 실제의 물리학적 현상에서 발생하는 보통의 신호는 이런 성질을 갖고 있지 않을 뿐만 아니라, 최소 위상 신호에 관한 연구도 활발하지 않아 왔다.

이 논문에서는 임의의 1차원 신호에 적당한 점함수를 더하여 최소위상 신호를 만드는 방법을 소개하고, 그 결과를 2차원의 위상복원 문제로 확장하는 것과 응용에 대하여 다룬다. 이 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 II장에서는 일반적인 위상복원문제와 점함수를 이용하여 위상복원 문제를 해결하는 방법에 대하여 알아보고, III장에서는 임의의 일차원 신호에 적절한 점함수를 더하여 최소 위상 신호를 만드는 방법에 대하여 알아본 다음, IV장에서는 2차원 위상복원 문제의 응용에 대하여 다룬다. V장에서는 III에서의 조건을 만족하는 신호의 복원에 관하여 다룬다.

II. 위상복원문제

위상복원 문제를 수식으로 나타내면, N 차원 신호 $x(\vec{n})$ 이 다음

$$x(\vec{n}) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(\vec{\omega}) = |X(\vec{\omega})| e^{j\phi_s(\vec{\omega})} \quad (1)$$

와 같이 푸리에 변환의 관계가 있을 때 (여기서

$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$, 주어진 $|X(\vec{\omega})|$ 로부터, $\phi_s(\vec{\omega})$ 또는 $x(\vec{n})$ 을 구하는 문제이다¹⁾
⁵⁾ 일반적으로 해가 없는 이 문제를 풀기 위하여, 구하고자 하는 신호 $x(\vec{n})$ 이 만족해야 하는 여러 성질들 (예를 들어 2차원 화상의 경우 신호 값의 음이 아닌 성질 (Non-negativity), 신호영역의 유한성 등)을, 제한조건 (Constraints)의 형태로 주고 이를 이용하여 해결하여 왔다. 그 중의 하나가 구하고자 하는 신호 $x(\vec{n})$ 에 알고 있는 점신호 $A \delta(\vec{n} - \vec{n}_0)$ 를 더하여 만들어진 신호 $y(\vec{n}) = x(\vec{n}) + A \delta(\vec{n} - \vec{n}_0)$ 의 푸리에 변환의 크기로부터 $x(\vec{n})$ 을 구하는 방법이다

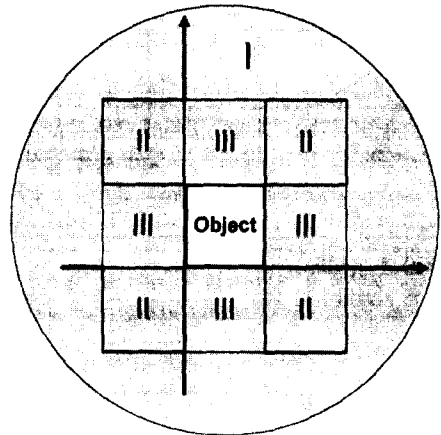


그림 1. 구하고자하는 신호의 영역과 점함수의 위치
 Fig. 1. Region of Support of the Desired Signal and the Location of Delta Function.

먼저, 점함수가 더해진 신호 $y(\vec{n})$ 의 푸리에 크기와 신호 $x(\vec{n})$ 의 푸리에 크기의 두 가지 정보를 모두 갖고 있으면, 점함수의 위치에 관계없이 항상 원하는 신호를 구할 수 있다¹⁶⁾. 신호 $y(\vec{n})$ 의 푸리에 크기만을 알고 있을 때에도 점함수의 위치가 특별한 곳에 있으면 원하는 신호를 구할 수 있게 된다. 예를 들어 2차원 신호의 경우, 점함수의 위치가 그림 1에서 I의 영역 안에 있으면, 즉 원 신호의 경계로부터 원 신호의 신호 영역 만큼보다 더 멀리 떨어져 있으면, 이 때는 Off-axis Holography 방법을 이용하여 원하는 신호를 정확히 구할 수 있게 된다¹⁷⁾. 두번째로, 더해지는 점함수의 위치가 II의 영역에 있는 경우에는 신호 $y(\vec{n})$ 의 푸리에 크기로부터 구하고자 하는 신호 $x(\vec{n})$ 의 경계 값을 구할 수 있으며, 이 경계 값과 원 신호의 자기상관함수

를 이용하여 원하는 신호를 구할 수 있다^[8]. 또는, 신호 $y(\bar{n})$ 을 이동 변환과 역공간 변환하여, Eisenstein 조건을 만족하도록 하면, 신호 $y(\bar{n})$ 의 푸리에 크기로부터 유일하게 구할 수 있다^[9]. 하지만, 점신호가 III의 영역이나 원 신호의 영역에 있을 경우의 위상복원문제는 일반적으로 해법이 아직 알려지지 않고 있다. 이 논문의 내용은 점신호가 신호 영역에 위치한 경우의 특별한 경우이다.

III. 일차원 신호의 최소 위상화 (Minimum-phase)

1. 이론적인 배경

최소위상 신호란 모든 영점 (Zero)과 극점 (Pole)이 단위원 안에 들어있는 신호를 말한다. 최소위상 신호는 같은 푸리에 크기를 갖는 신호와 비교해 볼 때, 최소위상 지연 성질 (Minimum Phase-Lag Property), 최소 그룹 지연 성질 (Minimum Group Delay Property), 최소 에너지 지연 성질 (Minimum-energy Delay Property)과 같은 성질을 갖는다^[3]. 이 중 최소 에너지 지연 성질은 같은 푸리에 크기를 갖는 신호들 사이에서 어떤 n 을 취하더라도 다음의 성질

$$\sum_{m=0}^n |h_{\min}(m)|^2 \geq \sum_{m=0}^n |h(m)|^2 \quad (2)$$

을 만족하는 것을 의미한다. 여기서 $h_{\min}(n)$ 은 최소 위상 함수이고, $h(n)$ 은 $h_{\min}(n)$ 와 같은 푸리에 크기를 갖는 임의의 함수이다. 특히 $n=0$ 일 때는 다음과 같은 식

$$|h_{\min}(0)| \geq |h(0)| \quad (3)$$

을 만족하여, 최소 위상 신호의 에너지는 $n=0$ 에 많이 모여있다는 것을 알 수 있다. 이 성질을 응용하여, 임의의 1차원 신호가 주어졌을 때, 이 신호의 원점에 큰 신호 값을 갖는 점함수를 더해주면, 더해진 신호는 그의 대부분의 에너지를 원점 근처에 갖게 되고 결과적으로 이 신호는 최소 위상 신호가 될 수 있다. 다음의 정리는 위의 가설을 뒷받침 해준다.

정리 1.

$x(n)$ 을 실수 값을 갖는 길이 N 의 1차원 신호라고 하고, $y(n)$ 을 점함수 $A\delta(n)$ 을 더하여 구한 함수

$$y(n) = x(n) + A\delta(n)$$

라고 한다. 만일 양의 실수 A 가

$$|A| > \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|$$

을 만족하면, $y(n)$ 은 최소 위상 함수가 된다.

<증명> 먼저, $y(n)$ 의 양변에 z -변환하면,

$$Y(z) = X(z) + A = \frac{X'(z) + G(z)}{z^{N-1}}$$

과 같이 되고, 여기서 $G(z)$ 와 $X'(z)$ 는 각각 $G(z) = Az^{N-1}$, $X'(z) = z^{N-1}X(z)$ 으로 z 의 다항식 (Polynomial)이 된다. 여기서 복소 평면상에서 contour C 를 단위 원으로 잡고, 절대값을 취하면,

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{N-1-n} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| < |Az^{N-1}| = |A| = |G(z)|$$

와 같이 된다. $G(z)$ 와 $X'(z)$ 은 단위원 안에서는 모두 analytic하고, 단위원 위에서는 $|G(z)| > |X'(z)|$ 을 만족하므로, Rouché의 정리에 따라 $G(z)$ 와 $X'(z) + G(z)$ 가 갖는 단위 원안에서의 영점의 수는 같아진다^[10]. 다시 말하여, $G(z)$ 는 단위원 안에 $N-1$ 개의 영점을 가지므로, $X'(z) + G(z)$ 도 역시 $N-1$ 개의 영점을 갖으며, 따라서 $Y(z)$ 의 $N-1$ 개의 영점은 모두 단위 원안에 위치하게 되며, 따라서 $y(n)$ 은 최소위상 신호가 된다. <증명 끝>

위의 정리에서 만일 $x(n)$ 에 더해지는 점함수가 $A\delta(n-n_0)$ 의 형태이고 A 는 위 정리를 만족할 때, n_0 가 $N-1$ 과 같거나 크면, $y(n)$ 은 준 최대 위상 신호가 된다. 또한 점함수의 위치가 신호 $x(n)$ 의 내부에 있을 경우에는, 예를 들어 $A\delta(n-n_0)$ 에서 n_0 가 $0 < n_0 < N-1$ 라고 가정하면, 신호 $y(n)$ 의 $N-1$ 개의 영점 중에서 $N-1-n_0$ 개는 단위원안에 위치하게 되고 나머지는 단위원 밖에 존재하게 된다. 정리2에서는 위의 성질을 요약하였다.

정리 2.

$x(n)$ 을 실수 값을 갖는 길이 N 의 1차원 신호라고 하고, $y(n)$ 을

$$y(n) = x(n) + A \delta(n - n_0) \quad (4)$$

라고 가정한다. 실수 A가 다음의 조건

$$|A| > \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| \quad (5)$$

을 만족할 때,

1. 만일 $n_0 \leq 0$ 이면, $y(n)$ 은 최소위상 (Minimum-phase) 신호
2. 만일 $n_0 \geq N-1$ 이면, $y(n)$ 은 준 최대 위상 (Maximum-phase) 신호
3. 만일 $0 < n_0 < N-1$ 이면, $y(n)$ 의 $N-1$ 개의 영점 중에서 $(N-1-n_0)$ 개의 영점은 단위원 안에 존재하고 나머지는 단위원 밖에 존재한다.

최대위상 신호는 엄밀히 모든 영점과 극점이 모두 단위원 밖에 존재하는 신호로, 따라서 Non-causal이어야 한다. 이 정리에서의 준 최대 위상 신호란 모든 영점만이 단위원 밖에 존재하며, 극점은 $z=0$ 에만 존재하는 신호를 말한다. 이 정리의 증명은 마찬가지로 Rouché의 정리를 이용하여 증명할 수 있다.

<정리2의 3의 증명>

먼저, $y(n)$ 의 양변을 z -변환하면,

$$Y(z) = X(z) + A z^{-n_0} = \frac{X'(z) + G(z)}{z^{N-1}}$$

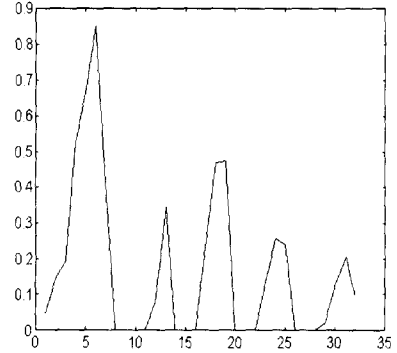
와 같이 되고, 여기서 $G(z)$ 와 $X'(z)$ 는 각각 $G(z) = Az^{N-1-n_0}$, $X'(z) = z^{N-1}X(z)$ 와 같이 된다. 정리1에서와 마찬가지로 Contour C 를 단위 원으로 잡으면

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{N-1-n} \right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)| < |Az^{N-1-n_0}| = |A| = |G(z)|$$

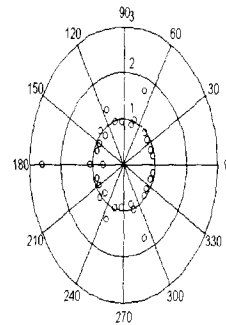
와 같고, $X(z)$, $G(z)$, $X'(z)$ 은 단위원 안에서는 모두 Analytic하다. 단위원 상에서 $|G(z)| > |X'(z)|$ 을 만족하므로, Rouché의 정리에 따라 단위 원안의 $X'(z) + G(z)$ 의 영점의 수는 $G(z)$ 와 같이 $N-1-n_0$ 가 되고, 따라서 나머지 n_0 개의 영점은 단위원 밖에 존재한다. <증명 끝.>

만일 어떤 실수 신호가 최소 위상 신호 (또는 최대

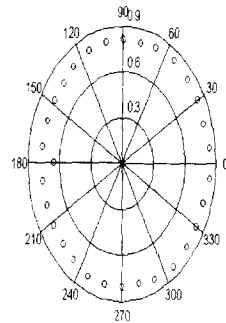
위상 신호)일 때, 이 신호와 같은 푸리에 크기를 갖는 최소 위상 신호 (또는 최대 위상 신호)는 자기 자신과 자기 자신에 음(-)의 부호를 붙인 신호밖에 없으므로 [2], 정리 1의 최소 위상 신호와 정리2의 최대위상 신호는 푸리에 크기로부터 유일하게 정해진다. 위의 두 정리가 내포하는 의미는 다음 예에서 볼 수 있다.



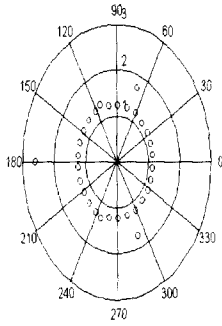
(a) 원 신호
(a) Original Signal



(b) 신호 (a)의 영점의 분포
(b) Distribution of zeros of the signal (a)



(c) 원점에 점함수가 더해진 신호의 영점 분포
(c) Distribution of zeros of the signal added by a point signal at the origin



(d) 끝점에 점함수가 더해진 신호의 영점 분포
 (d) Distribution of zeros of the signal added by a point signal at the end point

그림 2. 원 신호와 원 신호에 점함수가 더해진 신호의 영점 분포
 Fig. 2. The Distribution of zeros of the original signal and the added signals by a delta signal.

예제 1.

$x(n)$ 을 그림 2.(a)에서와 같이 32-point의 신호로서 $x(n)$ 의 31개의 영점들은 그림 2.(b)와 같이 분포하여 있다고 가정하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 $x(n)$ 의 영점들은 단위원의 안팎으로 고루 분포해 있음을 알 수 있고, 따라서 이 신호는 최소 위상 신호도 최대 위상 신호도 아닌 것을 알 수 있다. 신호 $x(n)$ 의 절대 값의 합은 $\sum_{n=0}^{31} |x(n)|$ 은 5.4800이므로, 점신호의 크기를 이보다 큰 값인 50으로하여 $x(n)$ 의 원점에 다음과 같이 더하여 보았다.

$$y(n) = x(n) + 50\delta(n)$$

이렇게 구한 신호 $y(n)$ 의 영점들은 그림 2.(c)에 나타나 있다. 그림에 나타나 있듯이 $y(n)$ 의 영점들은 모두 단위원 안에 분포해 있음을 알 수 있고, 따라서 이 신호는 최소 위상 신호가 되었음을 알 수 있다. 다음에는 같은 크기의 점신호 함수를 $x(n)$ 의 끝점인 $n=31$ 에 더하여 보았다. 이때 구해진 신호를 $z(n)$ 이라고 하면 $z(n)$ 은

$$z(n) = x(n) + 50\delta(n-31)$$

로서 나타내어지고, 이 $z(n)$ 의 영점의 분포는 그림 2.(d)와 같이 되었다. 따라서 이 신호는 준 최대 위상 신호 (Maximum-phase) 신호가 되었음을 알 수 있다.

2. 위상복원문제에의 응용

위의 정리의 결과는 위상복원문제에 응용할 수 있다. 먼저 위상복원문제에서 구하고자하는 신호 $y(n)$ 이 최소 위상 신호라고 가정한다. Gauss의 Fundamental Theorem of Algebra에 따르면, 임의의 일차원 신호 (복소수 값을 갖는 신호 포함)는 항상 일차의 인수를 갖는다. 예를 들어, 임의의 일차원 신호 $y(n)$ 이 길이 N 이라고 하면, 이 신호의 z -변환은 항상 $N-1$ 개의 인수를 가지며, 이들을 z_1, z_2, \dots, z_{N-1} 이라고 하면, 다음과 같이 인수분해 된다.

$$Y(z) = y(0) \prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z^{-1}). \tag{6}$$

일차원 함수 $y(n)$ 의 자기상관함수 $r_y(n)$ 의 z -변환은

$$R_y(z) = Y(z)Y^*(z^{-1}) = |y(0)|^2 \prod_{k=1}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z) \tag{7}$$

이 되어 자기상관함수의 영점은 항상 pair로 존재하게 된다. 즉, $z = z_0$ 가 $R_y(z)$ 의 한 영점이면, $z = \frac{1}{z_0^*}$ 도 $R_y(z)$ 의 영점이 된다. 예를 들어 $|z_0| < 1$ 이면, 그의 공액 복소수의 역수 (Conjugate Reciprocal)인 $z = \frac{1}{z_0^*}$ 의 크기는 1보다 커지게 된다. 따라서, 만일 $y(n)$ 이 최소 위상 신호이면 $R_y(z)$ 의 영점 중에서 단위원 안에 있는 영점들은 $Y(z)$ 의 영점들과 정확히 일치하게 된다. 특히, $y(0)$ 이 양의 실수이면 $y(0) = |y(0)|$ 이므로, 자기상관함수로부터 정확히 복원할 수 있게 된다. N 개의 길이를 갖는 1차원 신호의 자기상관함수는 그 신호의 푸리에 크기의 제곱의 $2N+1$ 개 이상의 샘플을 역푸리에 변환하여 정확하게 구할 수 있다^[2,5]. 예제 2에서는 임의의 일차원 신호에 적절한 점함수를 더하여 얻어진 신호의 푸리에 크기가 주어지거나 주어졌을 때 이로부터 원하는 신호를 얻는 예를 보인다.

예제 2.

알고자 하는 신호 $x(n)$ 을 $x = [6, 2, 10, 4, 2, 3, 4, 5]$ 와 같이 주어졌다고 가정하고, $y(n)$ 을 신호 $x(n)$ 의 원점에 정리 1의 조건을 만족하도록 40의 크기를 갖는 점함수를 더하여 얻어진 신호라고 하면 $y = [46, 2, 10, 4, 2, 3, 4, 5]$ 와 같이 된다.

여기서, 신호 $y(n)$ 의 푸리에 크기

$$|Y| = [76, 52, 44, 41, 34, 44, 44, 52, 48, 52, 44, 44, 34, 41, 44, 52]$$

가 주어지고, $x(n)$ 의 원점에 더해진 점함수의 크기를 알고 있다고 가정하면 $x(n)$ 을 구할 수 있다. 먼저 이 푸리에 크기를 제공하여 역푸리에 변환을 하면 신호 y 의 자기상관함수는 다음과 같이 구해진다.

$$r_y = [230, 194, 196, 158, 244, 523, 198, 2290, 198, 523, 244, 158, 196, 194, 230]$$

이 식으로부터 $R_y(z)$ 는

$$R_y(z) = 2116 \times \{1 + .667z^{-1}\} \{1 + .667z\} \\ \{1 - (.639 \pm .420i)z^{-1}\} \{1 - (.639 \pm .420i)z\} \\ \{1 - (.429 \pm .533i)z^{-1}\} \{1 - (.429 \pm .533i)z\} \\ \{1 - (.102 \pm .763i)z^{-1}\} \{1 - (.102 \pm .763i)z\}$$

와 같이 구해진다. 이 가운데 단위원안에 있는 영점만을 선택하여 다항식을 꾸미면

$$Y(z) = 1 + 0.0435z^{-1} + 0.2174z^{-2} + 0.0870z^{-3} + 0.0435z^{-4} \\ + 0.0652z^{-5} + 0.0870z^{-6} + 0.1087z^{-7}$$

와 같이 얻어지며, 여기에 $|y(0)| = 46$ 을 곱하면 $y = [46, 2, 10, 4, 2, 3, 4, 5]$ 와 같이 구해지며, 따라서 $x(n)$ 은 복원된 $y(n)$ 으로부터 구해진다.

IV. 2차원 신호의 최소 위상화

III장에서 보인 1차원 신호의 최소 위상화와 위상복원문제에의 응용은 2차원 위상복원문제에도 적용할 수 있다.

정리 3.

$x(m, n)$ 은 $R(M, N)$ 의 신호영역을 갖는 임의의 실수 2차원 신호이고, $y(m, n)$ 은

$$y(m, n) = x(m, n) + A\delta(m, n) \quad (8)$$

라고 가정한다. 실수 A 가 다음의 조건

$$|A| > \sum_{(m, n) \in R(M, N)} |x(m, n)| \quad (9)$$

를 만족하고, $y(m, n)$ 이 자기 자신만을 인수로 갖는 (irreducible) 다항식이면, $y(m, n)$ 은 푸리에 크기 $|Y(\omega_1, \omega_2)|$ 로부터 유일하게 결정된다.

<증명>

위 정리의 증명은 위 정리의 조건을 만족하면서 같은 푸리에 크기를 갖는 서로 다른 두 신호는 존재하지

않는 것을 보이면 된다. $y(m, n)$ 을 자기 자신만을 인수로 갖는다고 가정했으므로, $Y(z_1, z_2)$ 는

$$Y(z_1, z_2) = y(0, 0)Y_m(z_1, z_2) \quad (10)$$

의 형태가 된다. 여기서 $Y_m(z_1, z_2)$ 은

$$Y_m(z_1, z_2) = 1 + a_m(1, 0)z_1^{-1} + a_m(0, 1)z_2^{-1} + \dots + a_m(M, N)z_1^{-M}z_2^{-N} \quad (11)$$

의 형태로, 상수항이 1이고, z_1^{-1} 과 z_2^{-1} 의 최고차가 각각 M 과 N 인 다항식 (Modal Polynomial)이다.

$\check{y}(m, n)$ 을 $\check{y}(m, n) = \check{x}(m, n) + A\delta(m, n)$ 로, 위의 $y(m, n)$ 과 같은 조건을 갖는 신호라고 가정한다. 조건에 따라 $|Y(\omega_1, \omega_2)| = |\check{Y}(\omega_1, \omega_2)|$ 이므로, [5]의 정리 6에 따라서 $\check{Y}(z_1, z_2)$ 는

$$\check{Y}(z_1, z_2) = \pm z_1^{-m_0}z_2^{-n_0}y(0, 0) Y_m(z_1, z_2) \quad (12)$$

또는

$$\check{Y}(z_1, z_2) = \pm z_1^{-m_0}z_2^{-n_0}y(0, 0) z_1^{-M}z_2^{-N} Y_m(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (13)$$

의 형태가 되어야 한다. 여기서 m_0 와 n_0 는 임의의 정수이다. 이 두가지 경우 모두 $\check{y}(m, n)$ 은 $y(m, n)$ 과 같이 $R(M, N)$ 의 신호영역에 있어야 하므로, $m_0 = n_0 = 0$ 이어야 하며, 또한 $\check{y}(0, 0) = A + \check{x}(0, 0)$ 이므로, $\check{y}(m, n)$ 은 $y(m, n)$ 과 같은 부호를 가져야 한다. 따라서 $\check{Y}(z_1, z_2) = Y(z_1, z_2)$ 이거나 또는 $\check{Y}(z_1, z_2) = y(0, 0)z_1^{-M}z_2^{-N}Y_m(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ 이어야 하며, $\check{y}(m, n)$ 은 $y(m, n)$ 과 같거나 $y(M-m, N-n)$ 와 같아야 한다. 하지만, $y(M-m, N-n)$ 은 $\check{y}(m, n) = \check{x}(m, n) + A\delta(m, n)$ 와 $|A| > \sum_{(m, n) \in R(M, N)} |\check{x}(m, n)|$ 를 동시에 만족하지 못하므로 해가 될 수 없고, 따라서 $y(m, n)$ 은 유일하게 결정된다. <증명 끝>.

2차원 신호 또는 그 이상의 신호는 99% 이상이 자기 자신만을 인수로 가지므로 [11], 위의 정리에서의 가정인 ' $y(m, n)$ 이 자기 자신만을 인수로 갖는다'는 것은 매우 적절한 가정으로 볼 수 있다. 일반적으로 2차원 신호 $y(m, n)$ 의 z -변환은

$$Y(z_1, z_2) = y(0, 0) \prod_{k=1}^L Y_k(z_1, z_2) \quad (14)$$

의 형태이고, (여기서 $Y_k(z_1, z_2)$ 는 상수항이 1, 최고차

가 (M_k, N_k) 인 z_1^{-1} 과 z_2^{-1} 의 다항식 (modal polynomial), $y(m, n)$ 과 같은 푸리에 크기를 갖는 신호 $\hat{y}(m, n)$ 은

$$\hat{Y}(z_1, z_2) = \pm y(0, 0) \prod_{k \neq l} Y_k(z_1, z_2) \prod_{k \neq l} \hat{Y}_k(z_1, z_2) \quad (15)$$

의 형태를 갖는다 (여기서 $\hat{Y}_k(z_1, z_2)$ 는

$$\hat{Y}_k(z_1, z_2) = z_1^{-M_k} z_2^{-N_k} Y_k(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (16)$$

이고 l 는 정수 집합 $[1, l]$ 의 부분집합) [15]. 이를 이용하여 일반적인 신호의 경우에도 확장 할 수 있지만, 이 논문에서는 생략하기로 한다.

IV. 복 원

임의의 2차원 신호 $x(m, n)$ 의 2-D 푸리에 변환은 다음과 같이,

$$\begin{aligned} X(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} x(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \\ &= \sum_{m=0}^{2M-1} \left[\sum_{n=0}^{2N-1} x(m, n) e^{-j\omega_2 n} \right] e^{-j\omega_1 m} \end{aligned} \quad (17)$$

행과 열의 1차원의 푸리에 변환을 차례로 수행함으로써 얻을 수 있다 [14]. 전 절의 정리의 조건을 만족하는 신호 복원의 경우, 위의 사실을 이용하면, 2차원 위상 복원 문제를 1차원의 최소 위상 신호의 위상복원문제로 분해할 수 있고 따라서 해결 가능하다. 그림3에는 제안한 알고리즘의 개요도를 보였다.

그림 3의 알고리즘의 동작 원리는 다음과 같다. 먼저 $x(m, n)$ 을 $R(M, N)$ 의 신호영역을 갖고 $y(m, n)$ 을 정리 3에서와 같이 $y(m, n) = x(m, n) + A\delta(m, n)$ 으로 주어졌다고 가정한다. Step 1에서 $y(k, n)$ 을 $y(m, n)$ 의 m 방향으로의 $2M$ point, 1-D 푸리에변환,

$$y(k, n) = \sum_{m=0}^{2M-1} y(m, n) e^{-j\pi \frac{mk}{M}} \quad (18)$$

라고 정의하고, $y_k(n)$ 을 $y(k, n)$ ($k=0, 1, \dots, 2M-1$)에서 $m=k$ 인 행으로 구성된 신호라고 정의한다.(그림 4

참조). 그러면, $|y_k(0)|$ 와 $\sum_{n=1}^{N-1} |y_k(n)|$ 은 각각

$$|y_k(0)| = \left| \sum_{m=0}^{M-1} y(m, 0) e^{-j\pi \frac{mk}{M}} \right| > \left| \sum_{m=0}^{M-1} |x(m, 0)| \right| \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} |y_k(n)| &= \sum_{n=1}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^{M-1} y(m, n) e^{-j\pi \frac{km}{M}} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^{M-1} x(m, n) e^{-j\pi \frac{km}{M}} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} |x(m, n)| \end{aligned} \quad (20)$$

의 식을 만족한다. 정리의 가정으로부터

$$|A| > \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |x(m, n)| = \sum_{m=0}^{M-1} |x(m, 0)| + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} |x(m, n)|$$

이므로, $|y_k(0)| > \sum_{n=1}^{N-1} |y_k(n)|$ 의 관계식이 성립한다. 따라서 정리 1에 의하여 각 k 값에 대하여 신호 $y_k(n)$ 은 최소위상 신호가 되며, $y_k(n)$ 의 행 방향의 푸리에 변환의 크기인 $|Y_k(l)|$, ($l=0, 1, \dots, 2N-1$)로부터 $Y_k(z)$ 의 영점과 $|y_k(0)|$ 를 결정할 수 있다.

복원 알고리즘

Step 1:	주어진 푸리에 크기 $ Y(k, l) $ 의 모든 행을 제곱, 1차원 역푸리에 변환하여 각 $y_k(n)$ ($k=0, 1, \dots, 2M-1$)의 자기상관함수를 구한다
Step 2:	각 자기상관함수의 단위원안의 zero와 $ y_k(0) ^2$ ($k=0, 1, \dots, 2M-1$)를 구한다
Step 3:	$[y_0(0) , y_1(0) , \dots, y_{2M-1}(0)]$ 를 푸리에 크기로 갖는 최소 위상 신호를 구한다
Step 4:	구해진 최소 위상 신호를 푸리에 변환하여 $[y_0(0), y_1(0), \dots, y_{2M-1}(0)]$ 를 구한다.
Step 5:	각 행에 대하여 Step 2에서 구해진 zero들과 Step 4에서 구한 $[y_0(0), y_1(0), \dots, y_{2M-1}(0)]$ 를 곱하여 행렬 $y(k, n)$ 을 구한다.
Step 6:	역푸리에 변환하여 원하는 신호 $y(m, n)$ 을 구한다.

그림 3. 복원알고리즘의 개요도

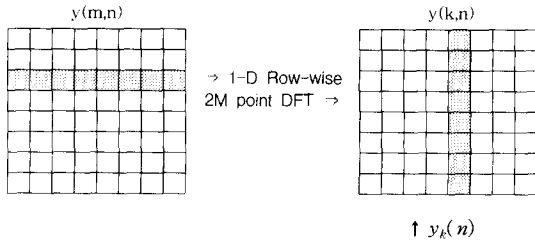
Fig. 3. Block diagram of the Proposed Reconstruction Algorithm.

다음에 정확한 $y(k, n)$ 을 구하려면, $|y_k(0)|$ 이 아닌 $y_k(0)$ 를 알아야 한다. 각 k 에 대한 $y_k(0)$ 의 값은 다음과 같이 구해진다. 벡터 $[y_0(0), y_1(0), y_2(0), \dots, y_{2M-1}(0)]$ 는 $y(m, n)$ 의 첫번째 열인 $y(m, 0) = x(m, 0) + A\delta(m, 0)$ 의 푸리에 변환이고, 또한

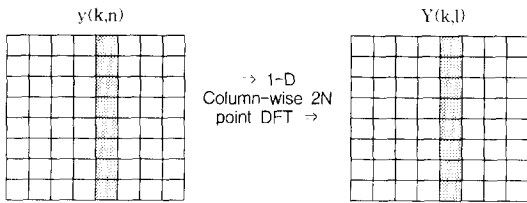
$$|A| > \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |x(m, n)| > \sum_{m=0}^{M-1} |x(m, 0)| \quad (21)$$

를 만족하므로, 정리 1에 의하여 $y(m, 0)$ 은 최소위상 신호가 된다. 따라서 Step 2에서 얻어진 $|y_k(0)|$ 로부터 III장의 2절에 서술한 방법으로 최소위상 신호 $y(m, 0)$

를 구할 수 있다. 마지막으로 구해진 $y(m,0)$ 을 다시 푸리에 변환하여 $y_k(0)$ 를 구하고 Step 2에서 구한 영점과 함께 다항식을 꾸미면 정확한 $y(k,n)$ 이 얻어지고 이로부터 $y(m,n)$ 을 구할 수 있게 된다.



(a) 열 방향의 푸리에 변환
(a) Row-wise Fourier Transform



(b) 행 방향의 푸리에 변환
(b) Column-wise Fourier Transform

그림 4. $y(m,n)$, $y(k,n)$, $y_k(n)$ 및 $Y(k,l)$ 의 관계식
Fig. 4. The Relationship among $y(m,n)$, $y(k,n)$, $y_k(n)$, and $Y(k,l)$.

다음 예는 위의 알고리즘이 동작하는 것을 보여준다.

예제 3.

$x(m,n)$ 을 4×4 행렬로서 아래와 같이 주어졌다고 가정한다. 이 신호 값들의 절대값의 합은 61이므로 여기에 이 값보다 큰 70의 신호 값을 갖는 점함수를 원점에 더하면 신호 $y(m,n)$ 이 구해진다.

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 71 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

신호 $y(m,n)$ 의 푸리에 변환의 크기는 다음과 같이 주어진다.

$$|Y| = \begin{bmatrix} 131 & 88 & 60 & 82 & 69 & 82 & 60 & 88 \\ 89 & 42 & 68 & 72 & 66 & 76 & 65 & 92 \\ 64 & 70 & 73 & 65 & 72 & 70 & 63 & 67 \\ 84 & 72 & 63 & 73 & 74 & 70 & 69 & 76 \\ 69 & 64 & 68 & 72 & 67 & 72 & 68 & 64 \\ 84 & 76 & 69 & 70 & 74 & 73 & 63 & 72 \\ 64 & 67 & 63 & 71 & 72 & 65 & 73 & 70 \\ 89 & 92 & 65 & 76 & 66 & 72 & 68 & 42 \end{bmatrix}$$

$y(m,n)$ 의 푸리에변환의 크기만이 주어졌다고 가정하고 신호 $y(m,n)$ 을 구하면 다음과 같다.

Step 1: 위의 행렬을 제공한 뒤, 이를 행방향으로 역푸리에 변환하여, $y_k(n)$ 의 자기상관함수를 구한다.

Step 2: 각 $y_k(n)$ 의 자기상관함수의 영점들 중, 단위 원 안에 있는 영점들을 구하면 아래와 같이 구해진다. 예를 들어, $y_0(n)$, $y_1(n), \dots, y_4(n)$ 의 영점들은

$$\begin{bmatrix} -.5185 & .4485 + .5217i & -.3095 + .2460i & .0961 + .3692i & -.3672 \\ .1793 + .6079i & .0162 - .5121i & .3852 + .0722i & -.2605 - .0881i & .1797 - .2785i \\ .1793 - .6059i & -.4911 + .1257i & -.0464 - .3494i & .1175 - .2578i & .1797 - .2785i \end{bmatrix}$$

로서 주어지며, 또한 $|y_k(0)|^2 (k=0,1,\dots,7)$ 도 [6724, 4927, 4360, 5244, 4900, 5244, 4360, 4927] 로서 주어진다. $y_5(n)$, $y_6(n)$, $y_7(n)$ 의 z-변환의 영점들은 각각 $y_3(n)$, $y_2(n)$, $y_1(n)$ 의 z-변환의 영점들의 공액 복소수로 주어진다.

Step 3: 위의 $|y_k(0)|^2 (k=0,1,\dots,2M-1)$ 을 역푸리에 변환하여 $y(m,0)$ 자기상관함수의 단위원 안의 영점을 구하면

$$\{-0.3306, 0.1512 + 0.3841i, 0.1512 - 0.3841i\}$$

로서 구해지며, $y(0,0)$ 는 71이 된다. 이를 이용하여 다항식을 구성하면, $y(m,0)$ 은

$$y(m,0) = 71 \times [1, .0282, .0704, .0563] = [71, 2, 5, 4]$$

로서 얻어진다.

Step 4: 위의 $y(m,0)$ 를 푸리에 변환하면 $y_k(0), (k=0,1,\dots,2M-1)$ 는

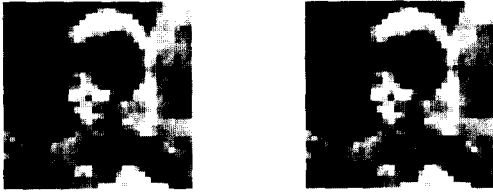
$$y_k(0) = [82, 69.6 - 9.2i, 66.0 + 2.0i, 72.4 + .75i, 70, 72.4 - .75i, 66.0 - 2.0i, 69.6 + 9.2i]$$

로 구할 수 있다.

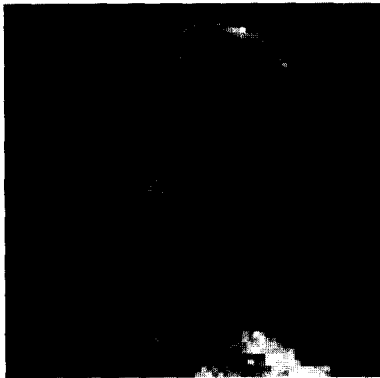
Step 5와 6: 위에서 구한 $y_k(0) (k=0,1,\dots,2M-1)$ 를 Step 2에서 구한 영점들로 만든 다항식을 곱하고, 다시 역푸리에 변환하면,

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 71 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

가 구해지며, 위의 신호는 정확히 $y(m,n)$ 과 일치한다.



(a) 32 x 32 원 신호 (b) 복원된 신호
 (a) 32 x 32 Original Image (b) Reconstructed Signal



(c) 64 x 64 원 신호
 (c) 64 x 64 Original Signal



(d) 복원된 신호
 (d) Reconstructed Signal

그림 5. 정리3과 복원 알고리즘의 2차원 영상에의 응용

Fig. 5. Result after the application of Theorem 3 and the Reconstruction Algorithm to 2 Dimensional Image Signals.

다음은 정리3의 결과와 알고리즘을 실제의 영상에 응용하였다. 그림 5의 (a)에는 32×32의 original 영상 신호이다. 이 신호의 원점에 크기 1,000,000의 크기를 갖는 점함수를 더한 뒤에 2차원 푸리에 크기를 구하고,

이로부터 위의 알고리즘을 이용하여 복원을 한 결과를 (b)에 보였다. 그림에서 볼 수 있듯이 복원된 영상 신호는 original 신호와 별로 차이가 없음을 알 수 있다. 그림 (c)는 64×64의 original 영상 신호이고, 전과 마찬가지로 원점에 1,000,000의 크기를 갖는 점함수를 더한 신호의 푸리에 크기로부터 같은 알고리즘을 이용하여 복원을 수행한 결과가 그림 (d)이다. 그림 (d)에서 보면 중앙 column 부분에 많은 artifact가 생긴 것을 알 수 있다. 이 artifact는 주로 register의 finite-length effect에 의하여 생기는 현상으로, 충분히 많은 비트 수를 할당하면 어러 없이 복원할 수 있을 것으로 생각된다.

위에서 볼 수 있듯이 이 방법으로 위상 복원 문제를 풀 때에, 예를 들어 구하는 신호가 $N \times N$ 의 영역을 갖는다고 가정하면, 대칭성 때문에 $N+2$ 번 ($N+1$ 개의 행과 $y(m,0)$)의 일차원 위상복원 문제를 풀으로써 원하는 결과를 얻을 수 있다. 또한 위의 알고리즘에서 행과 열을 바꾸어도 같은 결과를 얻을 수 있기 때문에, 일반적으로 $M \times N$ 의 신호의 경우 $\min\{M, N\} + 2$ 번의 일차원 위상 복원 문제를 풀으로써 2차원 위상 복원 문제를 풀 수 있다.

V. 결론

이 논문에서는 첫째로, 임의의 1차원 신호가 주어졌을 때, 이 신호에 큰 신호 값을 갖는 점함수를 적절히 더하면 인위적으로 최소위상 신호 및 최대위상 신호를 구할 수 있다는 것을 이론적으로 보였다. 다음에 이 사실을 이용하여, 둘째로, 임의의 2차원 신호의 원점에 충분히 큰 신호 값을 갖는 점함수를 더하면, 더해진 신호는 푸리에변환의 크기로부터 유일하게 결정이 될 수 있다는 것을 이론적으로 보였으며, 셋째로, 여러 개의 일차원의 최소위상 신호로 분해할 수 있다는 것을 보였고, 복원 알고리즘을 구하였으며, 마지막으로 2차원의 matrix와 영상 신호를 이용하여 복원 알고리즘이 동작하는 것을 보였다. 이 알고리즘을 이용할 경우 이 문제는 $R(N, M)$ 의 신호영역을 갖는 신호의 경우 $N+2$ 개의 일차원 위상복원문제로 분해되고, 따라서 이 수만 큼의 일차원 위상복원 알고리즘을 수행하여 원하는 신호를 구할 수 있다는 것을 보였다.

최근에 천문학에서는 turbulent한 대기의 영향을 없애기 위하여 큰 출력의 레이저를 이용하여 인공별을

만들어 별의 영상을 복원하는 연구가 활발히 진행되고 있다. 여기에서 영상을 복원하는 방법 중 가장 대표적인 것이 Off-axis Holography 방법이다. Off-axis Holography 방법은 항상 원하는 신호가 유일하게 결정이 되고, 구할 수 있다는 장점이 있는 대신, 복원에 필요한 신호영역이 기존의 다른 방법에 비해 2배 이상이 된다는 문제점을 갖고 있다. 이 문제점은 때때로 위상복원문제를 해결하는데 있어서 큰 제약조건이 될 수 있다. 하지만 이 논문에서의 결과를 Off-axis Holography Technique에 응용을 한다면, 기존 장비의 교체 없이 Implement할 수 있고, 복원에 필요한 신호 영역은 다른 보통의 방법과 같아지므로 간단히 Software만을 교환하여 이용할 수 있게 되어 매우 유용하게 사용될 것으로 예측된다.

참 고 문 헌

- [1] 김 우 식, "위상복원문제", 한국통신학회, 정보 통신지, 5월호, pp 53-70, 1993
- [2] M.H. Hayes, J.S. Lim, and A.V. Oppenheim, "Signal Reconstruction from Phase or Magnitude", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, December, 1980, ASSP-28, No.6, pp 672-680.
- [3] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [4] Y. Kano and E. Wolf, "Temporal Coherence of Black Body Radiation", Proc. Phys. Soc., 1962, Vol. 80, pp 1273--1276.
- [5] M.H. Hayes, "The Reconstruction of a Multidimensional Sequence from the Phase or Magnitude of Its Fourier Transform," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, April 1982, ASSP-30, No. 2, , pp140 - 154.
- [6] W. Kim and M. H. Hayes, "Phase retrieval using two Fourier transform intensities", Journal of Optical Society of America A, March 1990, Vol. 7, No. 3, , pp441-449.
- [7] L. S. Taylor, "The Phase Retrieval Problem", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, March, 1981, AP-29, No. 2, pp 386--391,.
- [8] M.H. Hayes and T. F. Quatieri. "Recursive phase retrieval using boundary conditions", J. Opt. Soc. Am., 73(11):pp1427-1433, November, 1983.
- [9] M.A. Fiddy, B. J. Brames, and J. C. Dainty, "Enforcing irreducibility for phase retrieval in two dimensions". Optics Letters, February, 1983, 8(2):pp96-98.
- [10] R. Churchill and J. W. Brown, "Complex Variables and Applications", McGraw Hill, 4-th Edition.
- [11] M.H. Hayes. and J.H. McClellan, "Reducible Polynomial in More than One Variable", Proceedings of IEEE, VOL 70, No. 2, February 1982, pp197-199.

저 자 소 개



金 禹 植(正會員)

1961년 3월 8일생. 1984년 서울대학교 전자공학과 공학사. 1986년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 공학석사. 1991년 9월 미국 Georgia Institute of Technology 공학박사. 1992년 9월 ~ 1993년 12월 서울대학교 의과대학부설 의공학연구소 특별연구원. 1993년 12

월 ~ 1995년 2월 한국통신 연구개발원 무선통신개발단 선임연구원. 1995년 3월 ~ 현재 명지대학교 전기전자공학부 조교수. 주관 심분야는 신호처리 및 응용, 통신 (VOD, ADSL, PCS, FPLMTS 등), 의공학