論文97-34C-8-9

# 계층적 속성 랜덤 그래프의 정의 및 이를 이용한 여러 응용들의 소개

# (Definition of hierarchical attributed random graph and proposal of its applications)

成 桐 洙 *

(Dong Su Seong)


## 요 약

구조적 물체는 먼저 간단한 몇 개의 부분으로 분할하고 분할된 부분들과 이들 사이의 관계를 서술함으로써 잘 표현할 수 있다. 보통의 경우 이러한 분할된 부분들은 더 이상 분할할 수 없는 기본요소(primitive element)가 될 수도 있으며 복잡한 물체의 경우 다시 여러 개의 부분으로 분할되어 질 수도 있다. 따라서 어떠한 경우 복잡한 물체를 계층적인 표현 방법을 이용해 나타내는 것은 매우 자연스러우며, 또한 계층적 서술은 각 버텍스가 기본요소 또는 그래프가 될 수 있는 계층적 그래프(hierarchical graph)로 표현하는 것이 자연스럽다. 또 잡음이나 사소한 변형등에 의해 복잡한 물체의 계층적 서술에 불확실성이 발생할 때, 물체를 확률적으로 서술하는 표현방법이 필요하게 된다. 이를 위하여 본 논문에서는 먼저 계층적 랜덤그래프를 확장한 계층적 속성 랜덤 그래프를 정의하고,임의의 계층적 그래프가 계층적 속성 랜덤 그래프의 결과 그래프가 될 확률을 계산하기 위한 확률식을 유도하였으며, 이 계층적 속성 랜덤 그래프의 변화성을 측정하는 척도로써 사용될 수 있는 엔트로피를 계산하는 식을 유도하였다. 끝으로, 위의 개념들을 이용하여 적용할 수 있는 응용분야들을 제시하였다.

## Abstract

For the representation of a complex object, the object is decomposed into several parts, and it is described by these decomposed parts and their relations. In general, the parts can be the primitive elements that can not be decomposed further ,or can be decomposed into their subparts. Therefore, the hierarchical description method is very natural and it is represented by a hierarchical attributed graph whose vertices represent either primitive elements or graphs. This graphs also have vertices which contain primitive elements or graphs. When some uncertainty exists in the hierarchical description of a complex object either due to noise or minor deformation, a probabilistic description of the object ensemble is necessary. For this purpose, in this paper, we formally define the hierarchical attributed random graph which is extention of the hierarchical random graph, and derive the equations for the entropy calculation of the hierarchical attributed random graph. Finally, we propose the application areas to use these concepts.


## I. 서 론

복잡한 물체를 구조적으로 표현하기 위해서는 그 물체를 구성하고 있는 여러 부분들과 그들사이의 상호관계의 서술이 필요한데, 이때 각 부분들은 더욱 세부적으로 분할하여 표현하는 것이 자연스러운 때가 있다. 이러한 표현방식을 계층적 표현(hierarchical description)이라 부르며 복잡한 물체를 체계적으로 표현하는데 적합한 방식이다. 예를 들어 하늘과 집과 땅으로 이루어진 풍경에서 집은 다시 지붕, 벽 그리고 창문으로 이루어져 있으며

* 正會員, 京畿大學校 電子工學科

(Kyonggi University, Department of Electronic Engineering)

接受日字:1997年1月9日, 수정완료일:1997年7月30日

창문은 다시 몇 개의 직선으로 이루어져 있다면 이들은 계층적 표현으로 서술하는 것이 자연스럽다. 계층적 표현은 계층적 그래프(hierarchical graph) [1]를 이용하여 잘 서술되어 지며, 이 그래프에서 각 노드들은 기본요소가 될 수도 있고 다시 그래프가 될 수도 있다. 또 잡음이나 사소한 변형등에 의해 계층적 표현 방식에 불확실성이 존재할 수 있으므로 계층적 표현 방식에 확률을 첨가하는 표현 방법이 필요하게 된다. 이를 위하여, Wong [2],[3]은 구조적 물체의 인식과 분류를 위하여 랜덤그래프(random graph)의 개념을 도입하였으며, Seong [4]은 이 개념을 확장하여 속성 랜덤그래프(attributed random graph)를 정의하였으며, 이를 구조적 물체의 집단화 [5]에 이용하였다. 또한, Chen [6]은 2층 랜덤그래프 개념을 정의 하고, 이를 문자 인식에 이용하였으며, Seong [7]은 이 개념을 확장하여 계층적 랜덤 그래프(hierarchical random graph)를 정의 하였다.

본 논문에서는 계층적 랜덤 그래프(hierarchical random graph)의 개념을 확장하여, 계층적 속성 랜덤그래프(hierarchical attributed random graph)를 정의 하였다. 이는 노드와 엣지의 속성이 여러개의 속성값을 가질수 있게한 Wong [3]의 랜덤 그래프를 Seong [4]의 속성 랜덤그래프로 확장하는 같은 방법을 이용하였다. 따라서, 계층적 속성 랜덤그래프는 계층적 랜덤 그래프에 비하여 노드와 엣지에 다수의 속성들을 가질 수 있도록 정의 하였다. 또한 계층적 속성 랜덤그래프의 정의와 더불어 이러한 개념의 응용분야를 확장하기 위하여, 임의의 계층적 속성그래프가 이 계층적 속성 랜덤그래프의 결과 그래프가 될 확률을 계산하기 위한 확률식을 유도하였으며 마지막으로 계층적 속성 랜덤그래프의 엔트로피(entropy) 계산식을 유도하였다.

## Ⅱ. 계층적 속성 그래프 및 계층적 속성 랜덤그래프의 정의

이 절에서는 계층적 속성 그래프와 계층적 속성 랜덤그래프를 정의하고 그 특징을 서술하고자 한다. 그리고 계층적 속성 랜덤그래프로부터의 출력 그래프의 확률을 계산하는 식을 유도한다.

**[정의 1:]** 속성버텍스(attributed vertex)와 속성엣지(attributed edge)는 속성집합으로 이루어져있으며, 속성집합의 각 구성요소는 속성이름과 속성값으로 구성되어 있다. 예를들어, 사각형으로 이루어진 속성버택스는 ((형태 사각형)(면적 0.8))로 표현될 수 있다.

**[정의 2:]** 속성그래프(attributed graph) $G_a=(V_a, E_a)$는 버텍스 와 엣지에 속성값을 가지는 그래프 로 정의 된다. 여기에서, $V_a=\{v_1,\dots,v_p,\dots,v_q,\dots,v_n\}$는 속성버텍스(attributed vertex)들의 집합이고 $E=\{\dots, e_{pq},\dots\}$는 속성엣지(attributed edge)들의 집합이며, 여기에서 속성엣지 $e_{pq}$는 속성버텍스 $v_p$ 와 $v_q$ 사이의 속성관계(attributed relation)를 나타낸다.

**[정의 3:]** 계층적 속성 그래프(hierarchical attributed graph)는 그래프 $G_H=(V^1,E^1)$로 정의 되는데 이때 $V^1=\{h^1_1,\dots,h^1_p,\dots,h^1_q,\dots,h^1_{n_1}\}$은 속성 버텍스들의 집합이며, $E^1=\{\dots,e^1_{pq},\dots\}$은 속성엣지들의 집합이다. 속성버텍스 $h^1$ 은 기본요소 $v^1$ 또는 속성그래프 $G^2$가 되는데, 속성그래프 $G^2$ 는 다시 버텍스로 기본요소 $v^2$ 또는 속성그래프 $G^3$를 가질 수 있고, $G^3$도 마찬가지다. 이것을 일반화시키면 깊이 $m$인 계층적 속성그래프를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$G_H = G^1 = (V^1,E^1)$$

$$V^1 = \{h^1_1,\dots,h^1_p,\dots,h^1_q,\dots,h^1_{n_1}\},$$

$$E^1 = \{\dots,e^1_{pq},\dots\},$$

$$\vdots$$

$$G^k = (V^k,E^k)$$

$$V^k = \{h^k_1,\dots,h^k_p,\dots,h^k_q,\dots,h^k_{n_k}\},$$

여기에서, 만일 $h^k$가 기본요소 이면, $h^k=v^k$ 이며,

그렇지 않으면, $h^k=G^{k+1}$ 이다.

$$E^k = \{\dots,e^k_{pq},\dots\},$$

$$\vdots$$

$$G^m = (V^m,E^m)$$

$$V^m = \{h^m_1,\dots,h^m_p,\dots,h^m_q,\dots,h^m_{n_m}\},$$

$$= \{v^m_1,\dots,v^m_p,\dots,v^m_q,\dots,v^m_{n_m}\},$$

$$E^m = \{\dots,e^m_{pq},\dots\},$$

**[정의 4:]** 계층적 속성그래프에서 속성버텍스 $V^1$의 레벨(level)은 1이며 레벨 $k$인 임의의 속성버텍스가 기

본요소가 아닐 경우 그의 자식 버텍스(child vertex)는 레벨이 $k+1$ 이다.

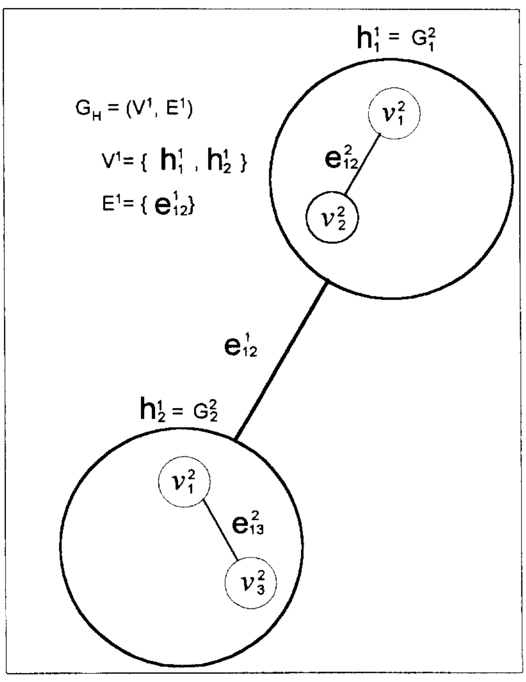
**[정의 5:]** 계층적 속성그래프의 높이(height) 또는 깊이(depth)는 모든 속성버텍스들의 레벨들중 가장 큰 레벨로 정의하며 $n$층 계층적 속성그래프의 높이 또는 깊이는 $n$이다.

**[정의 6:]** 계층적 속성그래프에서 모든 기본 버텍스(primitive vertex)의 레벨이 같으면 그 그래프는 완전 계층적 속성그래프(full hierarchical attributed graph)라 부른다.

예를 들어 그림 1은 2층 계층적 속성그래프 $G_H$의 예이다.

**[정의 7:]** 속성랜덤 버텍스(attributed random vertex)와 속성랜덤 엣지(attributed random edge)는 비존재확률 $F$, 존재확률 $Q$, 그리고 존재시 속성랜덤변수 $x$들의 집합으로 구성되어 있다.

**[정의 8:]** 속성랜덤그래프(attributed random graph)는 랜덤그래프 $R_a=(A_a, B_a)$로 정의 되는데 이때 $A_a=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n\}$는 속성랜덤버텍스의 집합이며 $B_a=\{\ldots, \beta_{pq}, \ldots\}$는 속성랜덤엣지의 집합이다. $\beta_{pq}$는 속성랜덤 버텍스 $\alpha_p$, $\alpha_q$ 사이의 속성랜덤관계(attributed random relation)를 나타낸다.




(a)

$G_H = (V^1, E^1)$

$E^1 = \{e^1_{12}\}$

$e^1_{12} = \{(\text{속성}1\ X_{1a})(\text{속성}2\ X_{2b})\}$

$V^1 = \{h^1_1, h^1_2\}$

$h^1_1 = G^2_1 = (V^2_1, E^2_1)$

$V^2_1 = \{v^2_1, v^2_2\}$

$v^2_1 = \{(\text{속성}3\ X_{3a})(\text{속성}4\ X_{4b})(\text{속성}5\ X_{5c})\}$

$v^2_2 = \{(\text{속성}3\ X_{3b})(\text{속성}4\ X_{4b})(\text{속성}5\ X_{5a})\}$

$E^2_1 = \{e^2_{12}\}$

$e^2_{12} = \{(\text{속성}6\ X_{6c})(\text{속성}7\ X_{7a})\}$

$h^1_2 = G^2_2 = (V^2_2, E^2_2)$

$V^2_2 = \{v^2_1, v^2_3\}$

$v^2_1 = \{(\text{속성}3\ X_{3a})(\text{속성}4\ X_{4b})(\text{속성}5\ X_{5c})\}$

$v^2_3 = \{(\text{속성}3\ X_{3a})(\text{속성}4\ X_{4b})(\text{속성}5\ X_{5a})\}$

$E^2_2 = \{e^2_{13}\}$

$e^2_{13} = \{(\text{속성}6\ X_{6a})(\text{속성}7\ X_{7b})\}$

(b)

그림 1. (a). 2층 계층적 속성 그래프의 예 (b). (a)의 속성값들.

Fig. 1. (a). Example of 2 layer hierarchical attributed graphs. (b). Attributes of graph (a).

**[정의 9:]** 계층적 속성랜덤그래프는 랜덤그래프 $R_H=(A^1, B^1)$로 정의되는데 이때 $A^1=\{\eta^1_1, \ldots, \eta^1_p, \ldots, \eta^1_q, \ldots, \eta^1_{n^1}\}$은 속성랜덤버텍스의 집합이며 $B^1=\{\ldots, \beta^1_{pq}, \ldots\}$은 속성랜덤엣지의 집합이다. 속성랜덤버텍스 $\eta^1$ 은 기본요소 $\alpha^1$ 또는 속성랜덤그래프 $R^2$ 가 될 수 있으며, 속성 랜덤그래프 $R^2$는 다시 기본요소 $\alpha^2$나 속성 랜덤그래프 $R^3$를 포함할 수 있고, $R^3$도 마찬가지다. 이를 일반화시키면 깊이 $m$인 계층적 속성랜덤그래프는 다음과 같이 정의된다.

$$R_H = R^1 = (A^1, B^1)$$

$$A^1 = \{\eta^1_1, \ldots, \eta^1_p, \ldots, \eta^1_q, \ldots, \eta^1_{n_1}\},$$

$$B^1 = \{\ldots, \beta^1_{pq}, \ldots\},$$

$$\vdots$$

$$R^k = (A^k, B^k)$$

$$A^k = \{\eta^k_1, \ldots, \eta^k_p, \ldots, \eta^k_q, \ldots, \eta^k_{n_k}\},$$

여기에서, 만일 $\eta^k$가 기본요소 이면, $\eta^k=\alpha^k$ 이며,

그렇지 않으면, $\eta^k=R^{k+1}$ 이다.

$$B^k = \{\ldots, \beta^k_{pq}, \ldots\},$$

$$R^m = (A^m, B^m)$$

$$A^m = \{\eta_1^m, \dots, \eta_p^m, \dots, \eta_q^m, \dots, \eta_{n_m}^m\},$$

$$= \{\alpha_1^m, \dots, \alpha_p^m, \dots, \alpha_q^m, \dots, \alpha_{n_m}^m\},$$

$$B^m = \{\dots, \beta_{pq}^m, \dots\},$$

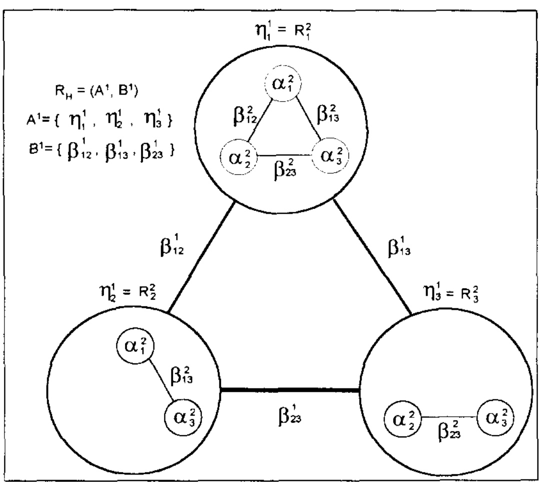
여기에서, 기본요소의 속성랜덤 버텍스(attributed random vertex) 와 속성랜덤 엣지(attributed random edge)는 존재확률 $Q$, 비존재확률 $P$, 그리고 존재시 속성랜덤변수 $x$들의 집합으로 구성되어 있다.

예를 들어, 그림2는 2층 계층적 속성랜덤그래프 $R_H$를 나타내고 있으며, 이러한 계층적 속성랜덤그래프는 계층적 속성그래프의 구조적인 정보와함께 확률적 정보를 가지게 되므로 복잡한 물체들로 구성된 임의의 클래스(class)를 표현하는데 훨씬 용이하다.

그림2의 예에서 $X$는 속성값을 나타낸다. 예를들어 $e_{12}^1 = \{(\text{속성1 } X_{1a})(\text{속성2 } X_{2b})\}$는 엣지 $e_{12}^1$는 속성1의 값으로 $X_{1a}$ 를 가지고, 속성2의 값으로 $X_{2b}$ 를 가진다는 것이다.

**[특성1: ]** 계층적 속성랜덤그래프 $R_H = (A_1, B_1)$의 결과(outcome)는 계층적 속성 그래프 $G_H = (V_1, E_1)$이다.

**[특성2: ]** 깊이가 1인 계층적 속성그래프는 속성그래프이다. 따라서 속성그래프는 계층적 속성 그래프의 한 경우이다.




(a)

$R_H = (A^1, B^1)$

$B^1 = \{\beta_{12}^1, \beta_{13}^1, \beta_{23}^1\}$

$\beta_{12}^1 = \{(\text{속성1 } x_{11})(\text{속성2 } x_{21})\} \quad P_{\beta_{12}^1} = 0.1\ ,\ Q_{\beta_{12}^1} = 0.9$

$x_{11} = \{(X_{1a}\ 0.7)(X_{1b}\ 0.1)(X_{1c}\ 0.1)(X_{1d}\ 0.1)\}$

$x_{21} = \{(X_{2a}\ 0.1)(X_{2b}\ 0.8)(X_{2c}\ 0.1)\}$

$\beta_{13}^1 = \{(\text{속성1 } x_{12})(\text{속성2 } x_{22})\} \quad P_{\beta_{13}^1} = 0.8\ ,\ Q_{\beta_{13}^1} = 0.2$

$x_{12} = \{(X_{1a}\ 0.6)(X_{1b}\ 0.2)(X_{1c}\ 0.1)(X_{1d}\ 0.1)\}$

$x_{22} = \{(X_{2a}\ 0.3)(X_{2b}\ 0.5)(X_{2c}\ 0.2)\}$

$\beta_{23}^1 = \{(\text{속성1 } x_{13})(\text{속성2 } x_{23})\} \quad P_{\beta_{23}^1} = 0.9\ ,\ Q_{\beta_{23}^1} = 0.1$

$x_{13} = \{(X_{1a}\ 0.6)(X_{1b}\ 0.1)(X_{1c}\ 0.2)(X_{1d}\ 0.1)\}$

$x_{23} = \{(X_{2a}\ 0.2)(X_{2b}\ 0.2)(X_{2c}\ 0.6)\}$

$A^1 = \{\eta_1^1, \eta_2^1, \eta_3^1\}$

$\eta_1^1 = R_1^2 = (A_1^2, B_1^2)$

$A_1^2 = \{\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2\}$

$\alpha_1^2 = \{(\text{속성3 } x_{31})(\text{속성4 } x_{41})(\text{속성5 } x_{51})\} \quad P_{\alpha_1^2} = 0.1\ ,\ Q_{\alpha_1^2} = 0.9$

$x_{31} = \{(X_{3a}\ 0.8)(X_{3b}\ 0.1)(X_{3c}\ 0.1)\}$

$x_{41} = \{(X_{4a}\ 0.1)(X_{4b}\ 0.9)\}$

$x_{51} = \{(X_{5a}\ 0.1)(X_{5b}\ 0.1)(X_{5c}\ 0.7)(X_{5d}\ 0.1)\}$

$\alpha_2^2 = \{(\text{속성3 } x_{32})(\text{속성4 } x_{42})(\text{속성5 } x_{52})\} \quad P_{\alpha_2^2} = 0.0\ ,\ Q_{\alpha_2^2} = 1.0$

$x_{32} = \{(X_{3a}\ 0.0)(X_{3b}\ 0.9)(X_{3c}\ 0.1)\}$

$x_{42} = \{(X_{4a}\ 0.0)(X_{4b}\ 1.0)\}$

$x_{52} = \{(X_{5a}\ 0.9)(X_{5b}\ 0.1)(X_{5c}\ 0.0)(X_{5d}\ 0.0)\}$

$\alpha_3^2 = \{(\text{속성3 } x_{33})(\text{속성4 } x_{43})(\text{속성5 } x_{53})\} \quad P_{\alpha_3^2} = 0.9\ ,\ Q_{\alpha_3^2} = 0.1$

$x_{33} = \{(X_{3a}\ 1.0)(X_{3b}\ 0.0)(X_{3c}\ 0.0)\}$

$x_{43} = \{(X_{4a}\ 0.0)(X_{4b}\ 1.0)\}$

$x_{53} = \{(X_{5a}\ 0.0)(X_{5b}\ 1.0)(X_{5c}\ 0.0)(X_{5d}\ 0.0)\}$

$B_1^2 = \{\beta_{12}^2, \beta_{13}^2, \beta_{23}^2\}$

$\beta_{12}^2 = \{(\text{속성6 } x_{61})(\text{속성7 } x_{71})\} \quad P_{\beta_{12}^2} = 0.0\ ,\ Q_{\beta_{12}^2} = 1.0$

$x_{61} = \{(X_{6a}\ 0.1)(X_{6b}\ 0.0)(X_{6c}\ 0.9)\}$

$x_{71} = \{(X_{7a}\ 0.7)(X_{7b}\ 0.2)(X_{7c}\ 0.1)\}$

$\beta_{13}^2 = \{(\text{속성6 } x_{62})(\text{속성7 } x_{72})\} \quad P_{\beta_{13}^2} = 0.9\ ,\ Q_{\beta_{13}^2} = 0.1$

$x_{62} = \{(X_{6a}\ 0.6)(X_{6b}\ 0.3)(X_{6c}\ 0.1)\}$

$x_{72} = \{(X_{7a}\ 0.1)(X_{7b}\ 0.1)(X_{7c}\ 0.8)\}$

$\beta_{23}^2 = \{(\text{속성6 } x_{63})(\text{속성7 } x_{73})\} \quad P_{\beta_{23}^2} = 0.9\ ,\ Q_{\beta_{23}^2} = 0.1$

$x_{63} = \{(X_{6a}\ 0.1)(X_{6b}\ 0.9)(X_{6c}\ 0.0)\}$

$x_{73} = \{(X_{7a}\ 0.1)(X_{7b}\ 0.1)(X_{7c}\ 0.8)\}$

$\eta_2^1 = R_2^2 = (A_2^2, B_2^2)$

$A_2^2 = \{\alpha_1^2, \alpha_3^2\}$

$\alpha_1^2 = \{(\text{속성3 } x_{34})(\text{속성4 } x_{44})(\text{속성5 } x_{54})\} \quad P_{\alpha_1^2} = 0.1\ ,\ Q_{\alpha_1^2} = 0.9$

$x_{34} = \{(X_{3a}\ 0.8)(X_{3b}\ 0.1)(X_{3c}\ 0.1)\}$

$x_{44} = \{(X_{4a}\ 0.0)(X_{4b}\ 1.0)\}$

$x_{54} = \{(X_{5a}\ 0.0)(X_{5b}\ 0.1)(X_{5c}\ 0.9)(X_{5d}\ 0.0)\}$

$\alpha_3^2 = \{(\text{속성3 } x_{35})(\text{속성4 } x_{45})(\text{속성5 } x_{55})\} \quad P_{\alpha_1^2} = 0.0\ ,\ Q_{\alpha_3^2} = 1.0$

$x_{35} = \{(X_{3a}\ 0.8)(X_{3b}\ 0.1)(X_{3c}\ 0.1)\}$

$x_{45} = \{(X_{4a}\ 0.0)(X_{4b}\ 1.0)\}$

$x_{55} = \{(X_{5a}\ 0.7)(X_{5b}\ 0.0)(X_{5c}\ 0.1)(X_{5d}\ 0.2)\}$

$B_2^2 = \{\beta_{13}^2\}$

$\beta_{13}^2 = \{(\text{속성6 } x_{64})(\text{속성7 } x_{74})\} \quad P_{\beta_{13}^2} = 0.0\ ,\ Q_{\beta_{13}^2} = 1.0$

$x_{64} = \{(X_{6a}\ 0.8)(X_{6b}\ 0.2)(X_{6c}\ 0.0)\}$

$x_{74} = \{(X_{7a}\ 0.0)(X_{7b}\ 0.9)(X_{7c}\ 0.1)\}$

$\eta_3^1 = R_3^2 = (A_3^2, B_3^2)$

$A_3^2 = \{\alpha_2^2, \alpha_3^2\}$

$\alpha_2^2 = \{(\text{속성3 } x_{36})(\text{속성4 } x_{46})(\text{속성5 } x_{56})\} \quad P_{\alpha_2^2} = 0.9\ ,\ Q_{\alpha_2^2} = 0.1$

$x_{36} = \{(X_{3a}\ 1.0)(X_{3b}\ 0.0)(X_{3c}\ 0.0)\}$

$x_{46} = \{(X_{4a}\ 1.0)(X_{4b}\ 0.0)\}$

$x_{56} = \{(X_{5a}\ 0.9)(X_{5b}\ 0.0)(X_{5c}\ 0.1)(X_{5d}\ 0.0)\}$

$\alpha_3^2 = \{(\text{속성3 } x_{37})(\text{속성4 } x_{47})(\text{속성5 } x_{57})\} \quad P_{\alpha_3^2} = 0.8\ ,\ Q_{\alpha_3^2} = 0.2$

$x_{37} = \{(X_{3a}\ 0.1)(X_{3b}\ 0.0)(X_{3c}\ 0.9)\}$

$x_{47} = \{(X_{4a}\ 1.0)(X_{4b}\ 0.0)\}$

$x_{57} = \{(X_{5a}\ 0.1)(X_{5b}\ 0.9)(X_{5c}\ 0.0)(X_{5d}\ 0.0)\}$

$B_2^2 = \{\beta_{23}^2\}$

$\beta_{23}^2 = \{(\text{속성6 } x_{65})(\text{속성7 } x_{75})\} \quad P_{\beta_{23}^2} = 0.9\ ,\ Q_{\beta_{23}^2} = 0.1$

(b)

그림 2. (a). 2층 계층적 속성 랜덤그래프의 예. (b). 랜덤그래프 (a) 의 랜덤속성값들

Fig. 2. (a). Example of 2 layer hierarchical attributed random graph. (b). Random attributes of random graph.

**[특성3: ]** 깊이가 1인 계층적 속성랜덤그래프는 속성랜덤그래프이다.

**[특성4: ]** 계층적 속성랜덤그래프에서 속성 랜덤 엣지의 양끝중 어느 것이라도 널(null)인 결과를 가지면 그 속성 랜덤엣지의 결과가 널(null)일 확률은 아래의 식과 같이 1 이다. 즉 양쪽의 버텍스중 하나라도 존재하지않는 엣지는 그래프의 정의에의하여 존재할수 없다.

$Prob\{\ \beta = \phi \mid \sigma(\beta) = \phi \text{ or } \tau(\beta) = \phi\} = 1,$

이때 $\sigma(\beta)$ 와 $\tau(\beta)$ 는 각각 속성랜덤엣지 $\beta$의 시작과 끝의 속성랜덤버텍스이다.

**[특성5: ]** 계층적 속성랜덤그래프 $R_H$의 확률 공간은 그래프 사상관계 $M : G_H \rightarrow R_H$에 의한 결과 그래프 $G_H$들의 집합이다. 여기서 $M$은 두개의 사상 집합 $\mu : h \rightarrow \eta$와 $\gamma : e \rightarrow \beta$로 구성되어 있다. 즉, $\mu(h)$와 $\gamma(e)$는 $\eta$와 $\beta$ 이며, $\mu^{-1}(\eta)$와 $\gamma^{-1}(\beta)$는 $h$와 $e$ 이다. 여기에서, $h$는 $\eta$에 대응되는 계층적 그래프내 버텍스이며, $e$는 $\beta$에 대응되는 계층적 그래프내 엣지이며, $\mu$와 $\gamma$는 계층적 랜덤 그래프와 계층적 그래프와내의 버텍스들과 엣지들간의 사상관계를 나타낸다.

이때, 확률 $P(G_H, M)$는 아래의 조건을 만족한다.

$$P(G_H, M) \geq 0 \text{ for } all\ G_H \in I,$$

$$\sum_{G_H \in I} P(G_H, M) = 1,$$

여기에서 $I$는 $R_H$의 치역이며, 치역내 그래프가 랜덤그래프로부터의 확율은 존재하며, 치역내 그래프들의 확률을 모두 더하면 1이된다. 그림 1은 그림 2의 계층적 속성랜덤그래프의 결과 그래프이며 이때의 사상관계 M을 그림 3에 나타내었다.

$$\begin{aligned}
&M : G_H \rightarrow R_H \\
&\mu : h_1^1 \rightarrow \eta_1^1,\ h_2^1 \rightarrow \eta_2^1 \\
&\gamma : e_{12}^1 \rightarrow \beta_{12}^1 \\
&M : G_1^2 \rightarrow R_1^2 \\
&\mu : v_1^2 \rightarrow \alpha_1^2,\ v_2^2 \rightarrow \alpha_2^2 \\
&\gamma : e_{12}^2 \rightarrow \beta_{12}^2 \\
&M : G_2^2 \rightarrow R_2^2 \\
&\mu : v_1^2 \rightarrow \alpha_1^2,\ v_3^2 \rightarrow \alpha_3^2 \\
&\gamma : e_{13}^2 \rightarrow \beta_{13}^2
\end{aligned}$$

그림 3. 그림 1의 계층적속성 그래프와 그림 2의 계층적속성 랜덤그래프 사이의 사상관계

Fig. 3. Mapping relations between hierarchical attributed graph in Fig 1 and hierarchical attributed random graph in Fig2.

## III. 계층적 속성 랜덤 그래프에서 임의의 결과그래프의 확률

계층적 속성 랜덤 그래프의 모든 속성랜덤 엣지들과 버텍스들로 이루어진 확률 공간은 가능 부분집합과 불가능 부분집합으로 나눌 수 있다. 불가능 부분집합은 출력된 결과에서 적어도 하나의 엣지가 하나의 버텍스에만 연결된 경우 또는, 버텍스에 연결되지 않는 버텍스가 있는 경우이다. 따라서 불가능집합에 속한 출력은 계층적 속성그래프의 정의에 의하여 계층적 속성 랜덤그래프의 출력이 될수없다. 따라서 출력그래프의 확률은 불가능 부분집합의 확률공간이 0인, 계층적 속성 랜덤그래프의 모든 랜덤 엣지들과 랜덤 버택스들로 이루어진 공간내의 대응되는 출력의 확률과 같다고 정의되며 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$P(G_H, M) = Prob\{\ (\eta^1 = \mu^{-1}(\eta^1),\ \text{for} all\ \eta^1 \in A^1), \\ (\beta^1 = \gamma^{-1}(\beta^1),\ \text{for} all\ \beta^1 \in B^1)\}. \quad (1)$$

실생활에서의 응용에서 출력그래프의 확률을 계산하기위하여 확률장의 차원을 낮출 필요가 있으며, 이를위하여 다음의 가정들이 이루어졌다. 첫째, 계층적 속성 랜덤그래프내의 랜덤 버택스들은 상호 독립적이며, 랜덤 엣지들과도 독립적이다. 둘째, 랜덤 엣지들은 상호 독립적이며, 각 엣지와 연결된 랜덤 버택스 $\sigma(\beta)$ 와 $\tau(\beta)$를 제외한 나머지 랜덤 버택스와는 독립적이다. 셋째, 랜덤 버택스와 랜덤 엣지내의 속성 랜덤 변수들은 상호 독립적이다. 끝으로, 만일 랜덤 엣지의 양쪽의 랜덤 버택스의 출력이 실재로 존재한다면, 랜덤 엣지로부터의 출력 확률은 양쪽의 실제값에 관계없이 같다. 위의 가정들로 부터, 출력 그래프 $P(G_H, M)$의 확률식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
P(G_H, M) &= \prod_{\eta^1 \in A^1} Prob\{\eta^1 = \mu^{-1}(\eta^1)\} \\
&\times \prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} Prob\{\ \beta^1 = \gamma^{-1}(\ \beta^1) \mid \sigma(\beta^1) \\
&\neq \phi,\ \tau(\beta^1) \neq \phi\ \},
\end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $(B^1)^*$는 각 랜덤 엣지의 끝점의 출력이 출력 그래프 $G_H$안에 존제하는 랜덤 엣지의 집합이다. 위의 수식을 이용하기 쉬운형태로 표현하기위하여, 다음의 기호들이 사용되었다.

$$P_\alpha = Prob\{\alpha = \phi\}, \quad (3)$$

$$Q_\alpha = 1 - P_\alpha, \tag{4}$$

$$P_\eta = \text{Prob}\{\eta = \phi\}, \tag{5}$$

$$P_\beta = \text{Prob}\{\beta = \phi \mid \sigma(\beta) \neq \phi, \tau(\beta) \neq \phi\}, \tag{6}$$

$$Q_\beta = 1 - P_\beta, \tag{7}$$

$$C_\beta = \text{Prob}\{\sigma(\beta) \neq \phi,\ \tau(\beta) \neq \phi\}, \tag{8}$$

$$P_\alpha(v) = \text{Prob}\ \{\alpha = v\} = Q_\alpha \prod_{x_i \in \alpha} p_{x_i}(X_i), \tag{9}$$

$$P_\eta(h) = \text{Prob}\{\eta = h\}, \tag{10}$$

$$P_\beta(e) = \text{Prob}\{\beta = e \mid \sigma(\beta) \neq \phi,\ \tau(\beta) \neq \phi\}, \tag{11}$$

$$= Q_\beta \prod_{x_i \in \beta} P_{x_i}(X_i | \sigma(\beta) \neq \phi, \tau(\beta) \neq \phi), \tag{12}$$

$$= Q_\beta \prod_{x_i \in \beta} P^*_{x_i}(X_i). \tag{13}$$

이때 식(9)에서 $x_i$는 속성랜덤 버텍스 $\alpha$내의 $i$ 번째 속성랜덤 변수이며, $X_i$는 $x_i$가 가질수 있는 값이다. 따라서, $P_{x_i}(X_i)$는 속성랜덤 변수 $x_i$가 $X_i$가될 확률이다. 또한 식(13)에서 $x_i$는 속성랜덤 엣지 $\beta$내의 $i$ 번째 속성랜덤 변수이며, $X_i$는 $x_i$가 가질수 있는 값이며, $P^*_{x_i}(X_i)$는 속성랜덤 엣지 $\beta$와 연결된 속성랜덤 버텍스들의 출력이 존재할 때, 속성랜덤 변수 $x_i$가 $X_i$가될 확률이다.

식 (3) - (13)을 이용하여 출력 그래프의 확률은 (14)과 같이 표현할 수 있다.

$$P(G_H, M) = \prod_{\eta^1 \in A^1} P_{\eta^1}(\mu_1^{-1}(\eta^1)) \prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} P_{\beta^1}(\gamma_1^{-1}(\beta^1)). \tag{14}$$

여기에서,

$$P_{\eta^k}(\mu_k^{-1}(\eta^k))$$

$$= P_{\alpha^k}(0) = P_{\alpha^k}, \qquad \text{if } \mu_k^{-1}(\eta^k) = 0 \text{ and } \eta^k = \alpha^k,$$

$$= P_{R^{k+1}}(0) = \prod_{\eta^{k+1} \in A^{k+1}} P_{\eta^{k+1}}, \quad \text{if } \mu_k^{-1}(\eta^k) = 0 \text{ and } \eta^k = R^{k+1},$$

$$= P_{\alpha^k}(\mu_k^{-1}(\alpha^k)) = Q_{\alpha^k} \prod_{x_i \in \alpha^k} P_{x_i}(X_i), \text{ if } \mu_k^{-1}(\eta^k) \neq 0 \text{ and } \eta^k = \alpha^k,$$

$$= P_{R^{k+1}}(\mu_k^{-1}(R^{k+1})), \qquad \text{if } \mu_k^{-1}(\eta^k) \neq 0 \text{ and } \eta^k = R^{k+1}.$$

$$P_{\beta^k}(\gamma_k^{-1}(\beta^k))$$

$$= P_{\beta^k}, \qquad \text{if } \gamma_k^{-1}(\beta^k) = 0,$$

$$= Q_{\beta^k} \prod_{x_i \in \beta^k} P^*_{x_i}(X_i), \qquad \textit{otherwise}.$$

이 식으로부터 출력 그래프의 확률은 첫번째층 그래프에서의 속성 랜덤버텍스와 속성 랜덤엣지의 결합 확률로부터 계산할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 첫 번째 레벨 그래프에서 속성랜덤버텍스의 확률은 두 번째 레벨 그래프에서의 속성 랜덤버텍스와 랜덤 엣지의 결합 확률로부터 구해지게 된다. 따라서 출력 그래프의 확률은 이러한 귀납계산(recursive calculation)에 의해 구해지게 된다. 층이 하나인 계층적 랜덤그래프에서의 출력 그래프의 확률식은 속성 랜덤 그래프의 확률식과 같은며 (15)와 같다.

$$P(G_H, M) = \prod_{\eta^1 \in A^1} P_{\eta^1}(\mu_1^{-1}(\eta^1)) \prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} P_{\beta^1}(\gamma_1^{-1}(\beta^1)),$$

$$= \prod_{\alpha \in A} P_\alpha(\mu^{-1}(\alpha)) \prod_{\beta \in B^*} P_\beta(\gamma^{-1}(\beta)). \tag{15}$$

2층 완전 계층적 랜덤그래프에서의 확률식은 식(14)로 부터 (16)과 같이 표현되며 K층 완전 계층적 랜덤그래프에서의 확률식은 (17)과 같다.

$$P(G_H, M) = \prod_{R^2 \in A^1} \Big( \prod_{\alpha^2 \in A^2} P_{\alpha^2}(\mu_2^{-1}(\alpha^2)) \prod_{\beta^2 \in (B^2)^*} P_{\beta^2}(\mu_2^{-1}(\beta^2)) \Big)$$

$$\prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} P_{\beta^1}(\gamma_1^{-1}(\beta^1)). \tag{16}$$

$$P(G_H, M) = \prod_{R^2 \in A^1} \Big( \prod_{R^3 \in A^2} \Big( \ldots \Big( \prod_{\alpha^k \in A^k} P_{\alpha^k}(\mu_k^{-1}(\alpha^k)) \prod_{\beta^k \in (B^k)^*} P_{\beta^k}(\mu_k^{-1}(\beta^k)) \Big)$$

$$\ldots \Big) \prod_{\beta^2 \in (B^2)^*} P_{\beta^2}(\mu_2^{-1}(\beta^2)) \Big) \prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} P_{\beta^1}(\gamma_1^{-1}(\beta^1)). \tag{17}$$

예를 들어, 그림 2의 계층적 속성 랜덤그래프로 부터 그림 1의 계층적 속성그래프가 출력 그래프가 될 확률은 식(14)로 부터와 아래와 같이 계산되어진다

$$P(G_H, M) = \prod_{\eta^1 \in A^1} P_{\eta^1}(\mu_1^{-1}(\eta^1)) \prod_{\beta^1 \in (B^1)^*} P_{\beta^1}(\gamma_1^{-1}(\beta^1))$$

$$= P_{\eta_1^1}(G_1^2) P_{\eta_2^1}(G_2^2) P_{\eta_3^1}(0) P_{\beta_{12}^1}(e_{12}^1) = 0.0197$$

여기에서,

$$P_{\eta_1^1}(G_1^2) = P_{R_1^2}(G_1^2)$$

$$= \{P_{\alpha_1^2}(v_1^2) P_{\alpha_2^2}(v_2^2) P_{\alpha_3^2}(0) P_{\beta_{12}^2}(e_{12}^2)\}_{R_1^2} = 0.21$$

여기에서,

$$\{P_{\alpha_1^2}(v_1^2)\}_{R_1^2} = Q_{\alpha_1^2} P_{\text{속성}3}(X_{3a}) P_{\text{속성}4}(X_{4b}) P_{\text{속성}5}(X_{5c}) = 0.45$$

$$\{P_{\alpha_2^2}(v_2^2)\}_{R_1^2} = Q_{\alpha_2^2} P_{\text{속성}3}(X_{3b}) P_{\text{속성}4}(X_{4b}) P_{\text{속성}5}(X_{5a}) = 0.81$$

$$\{P_{\beta_{12}^2}(e_{12}^2)\}_{R_1^2} = Q_{\beta_{12}^2} P^*_{\text{속성}6}(X_{6c}) P^*_{\text{속성}7}(X_{7a}) = 0.63$$

$$P_{\eta_2^1}(G_2^2) = P_{R_2^2}(G_2^2)$$

$$= \{P_{\alpha_1^2}(v_1^2)P_{\alpha_3^2}(v_3^2)P_{\beta_{13}^2}(e_{13}^2)\}_{R_2^2} = 0.26$$

여기에서,

$$\{P_{\alpha_1^2}(v_1^2)\}_{R_2^2} = Q_{\alpha_1^2}P_{속성3}(X_{3a})P_{속성4}(X_{4b})P_{속성5}(X_{5c}) = 0.65$$

$$\{P_{\alpha_3^2}(v_3^2)\}_{R_2^2} = Q_{\alpha_3^2}P_{속성3}(X_{3a})P_{속성4}(X_{4b})P_{속성5}(X_{5a}) = 0.56$$

$$\{P_{\beta_{13}^2}(e_{13}^2)\}_{R_2^2} = Q_{\beta_{13}^2}P^*_{속성6}(X_{6a})P^*_{속성7}(X_{7b}) = 0.72$$

$$P_{\eta_1^1}(G_1^2) = P_{R_1^2}(0)$$
$$= \{P_{\alpha_2^2}(0)P_{\alpha_3^2}(0)\}_{R_3^2} = 0.72$$

$$P_{\beta_{12}^1}(e_{12}^1) = Q_{\beta_{12}^1}P^*_{속성1}(X_{1a})P^*_{속성2}(X_{2b}) = 0.50$$

## Ⅳ. 계층적 속성 랜덤그래프의 엔트로피

계층적 속성 랜덤그래프의 변화성을 측정하는 척도로서 엔트로피를 사용할 수 있다. 엔트로피의 정의로부터 계층적 속성 랜덤그래프의 엔트로피를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$H(R_H) = -\sum_{(G_H,M)\in\Gamma} P(G_H,M)\log P(G_H,M). \qquad (18)$$

여기에서 $\Gamma$ 는 계층적 속성 랜덤그래프의 가능한 출력 그래프인 $G_H$들로 이루어진 집합이다.
만일 계층적 속성 랜덤그래프의 출력 그래프들 사이에 많은 유사성을 가지고 있다면, 엔트로피 $H(R_H)$의 값은 작으며, 그렇지 않을 경우 그 값은 크다. 계산을 쉽게 하기위하여, 식 (17)을 식 (18)에 대입하면 $k$층 완전 계층적 랜덤그래프의 경우 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
H(R_H) &= -\sum_{G_H} P(G_H,M)\log P(G_H,M),\\
&= \sum_{\eta^1\in A^1} H_{\eta^1} + \sum_{\beta^1\in B^1} H_{\beta^1},\\
&= \sum_{\eta^1\in A^1}\{-\sum_{h^1} P_{\eta^1}(h^1)\log P_{\eta^1}(h^1)\} + \sum_{\beta^1\in B^1} H_{\beta^1},\\
&= \sum_{R^1\in A^1}\{\sum_{R^2\in A^2}\{\ldots\{\sum_{\alpha^k\in A^k} H_{\alpha^k} + \sum_{\beta^k\in B^k} H_{\beta^k}\}\ldots\}\\
&\quad + \sum_{\beta^2\in B^2} H_{\beta^2}\} + \sum_{\beta^1\in B^1} H_{\beta^1}, \qquad (19)
\end{aligned}$$

여기에서,

$$H_{\alpha^k} = -\sum_{v^k} P_{\alpha^k}(v^k)\log P_{\alpha^k}(v^k),$$
$$= -Q_{\alpha^k}\sum_{x_i\in\alpha^k}\sum_{X_i\in x_i} P_{x_i}(X_i)\log P_{x_i}(X_i) - P_{\alpha^k}\log P_{\alpha^k} - Q_{\alpha^k}\log Q_{\alpha^k},$$

$$H_{\beta^k} = -C_{\beta^k}\sum_{e^k} P_{\beta^k}(e^k)\log P_{\beta^k}(e^k),$$
$$= -C_{\beta^k}Q_{\beta^k}\sum_{x_i\in\beta^k}\sum_{X_i\in x_i} P^*_{x_i}(X_i)\log P^*_{x_i}(X_i) - C_{\beta^k}P_{\beta^k}\log P_{\beta^k} - C_{\beta^k}Q_{\beta^k}\log Q_{\beta^k},$$

$$H_{\beta^2} = -C_{\beta^2}\sum_{e^2} P_{\beta^2}(e^2)\log P_{\beta^2}(e^2),$$
$$= -C_{\beta^2}Q_{\beta^2}\sum_{x_i\in\beta^2}\sum_{X_i\in x_i} P^*_{x_i}(X_i)\log P^*_{x_i}(X_i) - C_{\beta^2}P_{\beta^2}\log P_{\beta^2} - C_{\beta^2}Q_{\beta^2}\log Q_{\beta^2},$$

$$H_{\beta^1} = -C_{\beta^1}\sum_{e^1} P_{\beta^1}(e^1)\log P_{\beta^1}(e^1).$$
$$= -C_{\beta^1}Q_{\beta^1}\sum_{x_i\in\beta^1}\sum_{X_i\in x_i} P^*_{x_i}(X_i)\log P^*_{x_i}(X_i) - C_{\beta^1}P_{\beta^1}\log P_{\beta^1} - C_{\beta^1}Q_{\beta^1}\log Q_{\beta^1},$$

이다.

또한, 2층 완전 계층적 랜덤그래프인 경우 식(19)에 따라 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(R_H) = \sum_{R^1\in A^1}\{\sum_{\alpha^2\in A^2} H_{\alpha^2} + \sum_{\beta^2\in B^2} H_{\beta^2}\} + \sum_{\beta^1\in B^1} H_{\beta^1}, \qquad (20)$$

여기에서,

$$H_{\alpha^2} = -\sum_{v^2} P_{\alpha^2}(v^2)\log P_{\alpha^2}(v^2),$$
$$= -Q_{\alpha^2}\sum_{x_i\in\alpha^2}\sum_{X_i\in x_i} P_{x_i}(X_i)\log P_{x_i}(X_i) - P_{\alpha^2}\log P_{\alpha^2} - Q_{\alpha^2}\log Q_{\alpha^2},$$

$$H_{\beta^2} = -C_{\beta^2}\sum_{e^2} P_{\beta^2}(e^2)\log P_{\beta^2}(e^2),$$
$$= -C_{\beta^2}Q_{\beta^2}\sum_{x_i\in\beta^2}\sum_{X_i\in x_i} P^*_{x_i}(X_i)\log P^*_{x_i}(X_i) - C_{\beta^2}P_{\beta^2}\log P_{\beta^2} - C_{\beta^2}Q_{\beta^2}\log Q_{\beta^2},$$

$$H_{\beta^1} = -C_{\beta^1}\sum_{e^1} P_{\beta^1}(e^1)\log P_{\beta^1}(e^1),$$
$$= -C_{\beta^1}Q_{\beta^1}\sum_{x_i\in\beta^1}\sum_{X_i\in x_i} P^*_{x_i}(X_i)\log P^*_{x_i}(X_i) - C_{\beta^1}P_{\beta^1}\log P_{\beta^1} - C_{\beta^1}Q_{\beta^1}\log Q_{\beta^1},$$

이다.

이러한 식들로부터 계층적 랜덤그래프의 엔트로피는 모든 랜덤 엣지와 기본랜덤 버텍스들의 엔트로피들의 합으로 계산되어짐을 알 수 있다. 예를 들어, 그림2의 계층적 속성 랜덤그래프의 엔트로피는 식(20)을 이용하여 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned}
H(R_H) &= \sum_{R^1\in A^1}\{\sum_{\alpha^2\in A^2} H_{\alpha^2} + \sum_{\beta^2\in B^2} H_{\beta^2}\} + \sum_{\beta^1\in B^1} H_{\beta^1}\\
&= \{H_{\alpha_1^2}+H_{\alpha_2^2}+H_{\alpha_3^2}+H_{\beta_{12}^2}+H_{\beta_{13}^2}+H_{\beta_{23}^2}\}_{R_1^2} + \{H_{\alpha_1^2}+H_{\alpha_3^2}+H_{\beta_{13}^2}\}_{R_2^2}\\
&\quad + \{H_{\alpha_2^2}+H_{\alpha_3^2}+H_{\beta_{23}^2}\}_{R_3^2} + \{H_{\beta_{12}^1}+H_{\beta_{13}^1}+H_{\beta_{23}^1}\}\\
&= 5.27
\end{aligned}$$

여기에서,

$$\{H_{\alpha_1^2}\}_{R_1^2} = -\sum_{v^2} P_{\alpha_1^2}(v^2)\log P_{\alpha_1^2}(v^2),$$
$$= -Q_{\alpha_1^2}\sum_{x_i\in\alpha_1^2}\sum_{X_i\in x_i} P_{x_i}(X_i)\log P_{x_i}(X_i) - P_{\alpha_1^2}\log P_{\alpha_1^2} - Q_{\alpha_1^2}\log Q_{\alpha_1^2},$$
$$= 0.89$$

$$
\begin{aligned}
(H_{\beta_{12}^{i}})_{R_i^2} &= -C_{\beta_{12}^{i}} \sum_{e^2} P_{\beta_{12}^{i}}(e^2) \log P_{\beta_{12}^{i}}(e^2), \\
&= -C_{\beta_{12}^{2}} Q_{\beta_{12}^{2}} \sum_{x_i \in \beta_{12}^{2}} \sum_{X_i \in x_i} P^{*}_{x_i}(X_i) \log P^{*}_{x_i}(X_i) - C_{\beta_{12}^{2}} P_{\beta_{12}^{2}} \log P_{\beta_{12}^{2}} - C_{\beta_{12}^{2}} Q_{\beta_{12}^{2}} \log Q_{\beta_{12}^{2}}, \\
&= 0.44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{\beta_{12}^{i}} &= -C_{\beta_{12}^{i}} \sum_{e^2} P_{\beta_{12}^{i}}(e^2) \log P_{\beta_{12}^{i}}(e^2), \\
&= -C_{\beta_{12}^{2}} Q_{\beta_{12}^{2}} \sum_{x_i \in \beta_{12}^{2}} \sum_{X_i \in x_i} P^{*}_{x_i}(X_i) \log P^{*}_{x_i}(X_i) - C_{\beta_{12}^{2}} P_{\beta_{12}^{2}} \log P_{\beta_{12}^{2}} - C_{\beta_{12}^{2}} Q_{\beta_{12}^{2}} \log Q_{\beta_{12}^{2}}, \\
&= 0.76
\end{aligned}
$$

## Ⅴ. 계층적 속성 랜덤그래프를 이용한 여러 응용분야들의 제시

계층적 속성 랜덤 그래프 및 확률식 그리고 엔트로피는 자연과학 및 공학의 여러 분야에 응용될 수 있으며, 각 개념들이 사용될 수 있는 분야를 컴퓨터 비젼을 중심으로 살펴보면 다음과 같다. 계층적 속성 랜덤 그래프는 물체의 모델을 구조적 그리고 통계적으로 표현하기 때문에 계층적 속성 그래프로 표현되는 복잡한 현상이나 물체의 모델을 표현하기 위하여 사용될 수 있다. 특히, 컴퓨터 비젼 및 패턴인식에서 계층적 속성 그래프에 의하여 표현되는 물체의 모델을 구성하는데 있어 입력 영상을 취득하는데 외부의 잡음에 의해 속성값의 변화나 사소한 변형이 생길 수 있으며 이로 인하여 계층적 표현에 불확실성이 발생할 수 있으므로 물체를 확률적으로 서술하는 계층적 속성 랜덤 그래프가 유용하게 이용될 수 있다. 다음으로, 임의의 계층적 그래프가 계층적 랜덤 그래프의 결과 그래프가 될 확률을 구하는 확률식은 모델 베이스로부터 임의의 복잡한 물체를 인식하는 패턴인식 및 컴퓨터 비젼의 영역에서 이용될 수 있다. 일반적인 비젼 시스템은 학습과 인식의 두과정으로 동작한다. 학습과정에서, 소속을 알고 있는 패턴들이 시스템에 차례로 주어지게되며 그 결과, 여러 패턴들의 모델들이 형성된다. 이 때, 각 패턴들이 계층적 속성 그래프에 의해 표현된다면, 각 모델들은 계층적 속성 랜덤 그래프에 의해서 표현되어 진다. 인식과정에서, 자신의 소속을 모르는 패턴이 시스템에 부여된다. 시스템은 모델베이스로부터 패턴에 상응하는 모델을 찾기 위하여 노력한다. 즉 이 패턴은 각 모델의 계층적 속성 랜덤 그래프와 비교함에 의하여 분류될 수 있다. 즉 $R_{H_1}, R_{H_2}, \ldots, R_{H_n}$이 n개의 서로 다른 모델들을 표현하고 $G_H$가 모르는 패턴을 표현하는 계층적 속성그래프라고 할 때, $G_H$를 n개의 모델들중 하나로 분류하기 위하여 먼저 $G_H$와 $R_{H_i}$사이의 유사성을 측정해야하며 이는 $G_H$가 $R_{H_i}$의 결과 그래프가 될 확률을 계산함에 의해 해결할 수 있다. 그리고 이를 이용하여 각 모델에대하여 $G_H$의 확률을 구한 다음 가장 확률이 높은 모델로 이 패턴을 인식하면 된다.

계층적 속성 랜덤 그래프의 엔트로피는 다음과 같이 여러 분야에 응용할 수 있다. 먼저, 계층적 속성 랜덤 그래프로 표현되는 모델의 특성을 분석하는데 엔트로피를 이용할 수 있다. 즉 모델의 엔트로피로부터 그 모델에 속한 각 개체들 사이의 유사성 정도를 알 수 있다. 어떤 모델의 엔트로피가 낮다는 것은 이 모델에 속한 개체들 사이의 유사성이 상당히 높다는 것을 의미하며, 엔트로피가 높다는 것은 그 반대의 경우로 해석할 수 있다. 다음으로, 두개의 계층적 속성 랜덤 그래프를 합성하기 위해서는 그들 사이의 모피즘(Morphism) M이 필요하며 속성 랜덤그래프에서 이용[8]한 엔트로피를 이용하여 이를 해결할 수 있다. 계층적 랜덤 그래프의 엔트로피가 이로부터 나올 수 있는 결과 그래프의 가변성을 나타내므로, 계층적 랜덤 그래프 사이의 모피즘은 두개의 계층적 랜덤 그래프의 합성으로 이루어진 계층적 랜덤 그래프의 엔트로피를 최소화하는 방향으로 이루어 져야 한다. 즉, 두개의 계층적 랜덤 그래프 사이의 가능한 모피즘의 집합으로부터 합성된 계층적 랜덤 그래프들 중 엔트로피가 최소가 되는 계층적 랜덤 그래프를 선택하면 된다. 엔트로피를 이용하여 두개의 계층 랜덤 그래프 사이의 유사성을 계산할 수 있으며, 이를 이용하여 계층적 랜덤 그래프들을 응집적 집단화(agglomerative clustering) 방법을 이용하여 계층적으로 집단화할 수 있다. 또 계층적 그래프들을 단층 집단화(level clustering)하기 위하여 엔트로피 최소화에 근거한 평가함수를 정의할 수 있으며, 이를 이용하여 K-means 알고리즘을 적용할 수 있다.

## Ⅵ. 결 론

본 논문에서는 계층적 랜덤 그래프의 개념을 확장하여, 계층적 속성 랜덤그래프를 정의 하였다. 즉, 계층적 속성 랜덤그래프는 계층적 랜덤 그래프에 비하여 노드와 엣지에 다수의 속성들을 가질 수 있도록 정의 하였다. 또한 계층적 속성 랜덤그래프의 정의와 더불어 이러한 개념의 응용분야를 확장하기 위하여, 임의의 계층적 속성 그래프가 이 계층적 속성 랜덤그래프의 결과 그래프가 될 확률을 계산하기 위한 확률식을 유도하였으며, 마지

적 속성 랜덤그래프의 엔트로피 계산식을 유도하였다. 끝으로 이의 개념들을 이용할 수 있는 여러 응용분야들을 소개하였으며, 추후 과제로는 실제로 이 개념들을 제시한 응용분야들에 이용하는 것이다.

## 참 고 문 헌


[1] H. Niemann, "Hierarchical graphs in pattern analysis," *in Proc. 1980 Int. Conf. Pattern Recognition* , pp. 213-216, 1980.

[2] A. K. C. Wong and H. E. Ghahraman, "Random graph : Structural-contextual dichotomy," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* vol. 2 no. 4, pp. 341-348, 1980.

[3] A. K. C. Wong and M. You, "Entropy and distance of random graphs with appication to structural pattern recognition," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* vol. 7, no. 5, pp. 599-609, 1985.

[4] D. S. Seong, H. S. Kim, K. H. Park "Definition of Attributed Random Graph and Proposal of its applications" *IEICE Tran. on Information and Systems.* vol. E76-D, no. 8, 1993.

[5] D. S. Seong, H. S. Kim, K. H. Park "Incremental Clustering of Attributed Graphs" *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.* vol. 23, no. 5, 1993.

[6] L. H. Chen and J. R. Li도, "Handwritten character recognition using a 2-layer random graph model by relaxation matching," *Pattern Recognitionv* vol. 23 no. 11, pp. 1189-1205, 1990.

[7] D. S. Seong, H. S. Kim, K. H. Park, "Formal Definition and entropy calculation of hierarchical random graphs," *Pattern Recognition Letter* vol. 13 pp 545-555, 1992.

[8] D. S. Seong, Y. K. Choi, H. S. Kim, K. H. Park "Optimal Graph isomorphism between Two Random Graphs" *Pattern Recognition Letter* vol. 15, pp 321-327, 1994.


## 저 자 소 개


**成 桐 洙(正會員)**

1987년 한양대학교 공과대학 전자공학과 (학사). 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (석사). 1992년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (박사). 1993년 한국과학기술원 정보전자연구소 연구원. 1993년 ~ 현재 경기대학교 전자공학과 조교수. 관심분야는 지능컴퓨터, 멀티미디어통신, 병렬처리컴퓨터