

〈논 문〉

## 전단 및 단면 회전관성효과를 고려한 회전 외팔보의 면외 굽힘진동해석

신 상 하\* · 유 흥 희\*\*

(1996년 12월 11일 접수)

### Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering Shear and Rotary Inertia Effects

S. H. Shin and H. H. Yoo

**Key Words :** Rotating Cantilever Beams(회전 외팔보), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Shear Effect(전단효과), Rotary Inertia Effect(단면 회전관성효과), Slenderness Ratio(세장비), Flapwise Bending Vibration(면외 굽힘진동), Chordwise Bending Vibration(면내 굽힘진동)

#### Abstract

A modeling method for the flapwise bending vibration of a rotating cantilever beam which has small slenderness ratio is presented in this paper. It is shown that as the slenderness ratio decreases the shear and rotary inertia effects increase. Such effects become critical for the accurate estimation of the natural frequencies and modeshapes, especially higher frequencies and modes, as the angular speed increases. It is also shown that the flapwise bending natural frequencies are higher than the chordwise bending natural frequencies. The discrepancy between first natural frequencies are especially significant when the hub radius ratio is small.

#### 1. 서 론

회전운동을 하는 외팔보 형태의 구조물들은 발전기의 터빈이나 가스터빈 엔진, 그리고 항공기의 회전익 등에 등장하며 이러한 구조물들의 진동에 대한 연구는 1920년대 초부터<sup>(1,2)</sup> 시작되었다. 현재까지 발표된 문헌들을 살펴보면, 이들은 대개 두께가 얇거나 길이가 긴 세장보에 적용되는 Euler 보 이론에 근거한 연구결과가<sup>(3~5)</sup> 주류를 이루는 것을 쉽게 확인할 수 있는데, 이는 세장비가 큰 보의 형태가 실제적으로 공학적 예제에 많이 등장하기 때문이

다. 그러나 구조물들은 세장비가 작은 값을 갖는 경우도 흔히 등장하며(즉, 보가 두껍거나 길이가 짧음) 이러한 구조물들에 관련된 정확한 해석결과를 얻으려면 Euler 보이론에 근거한 모델링에서는 무시되었던 전단 및 단면 회전관성효과들을 고려할 필요가 생긴다.

정지된 보의 경우에는 전단 및 단면 회전관성효과들의 진동특성에 미치는 영향에 대해서 일찍부터 많은 연구가 진행되어 왔으나, 회전운동을 하는 보의 경우는 연구결과들이<sup>(6~10)</sup> 그리 많지 않다. 그 이유는 보의 회전운동으로 인해 발생하는 원심력을 고려한 모델링 및 운동방정식의 유도과정이 매우 복잡한 것이 주요 원인일 것이다. 실제로 이들 논문들에서는 모델링 및 운동방정식 유도과정의 대부

\*한양대학교 대학원

\*\*회원, 한양대학교 기계공학부

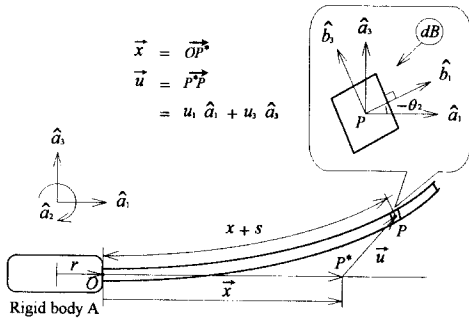


Fig. 1 Configuration of a Timoshenko beam attached to rigid hub

분을 생략한 채, 연구의 고유성을 새로운 수치해석 방법의 적용 (Miklestad-Holzer 방법, 맥급수를 이용한 준해석적 방법, 유한요소법 등) 등에서 찾고 있다.

최근 회전 외팔보의 진동해석을 위한 방정식을 좀더 간명하게 유도할 수 있는 새로운 동적 모델링 방법이<sup>(11,12)</sup> 제시되었다. 이 모델링방법은 기존방법들과 달리 보의 인장 및 굽힘방향 운동방정식이 모두 선형으로 유도되므로 진동해석을 위한 방정식이 직접 얻어지는 것이<sup>(13)</sup> 특징이다. 또한 이 새로운 모델링방법에 기초하여 세장비가 비교적 작은 보의 진동해석을 위해 전단 및 단면 회전관성효과를 고려한 Timoshenko 이론에 근거한 면내 굽힘진동해석을 위한 모델링도<sup>(14)</sup> 유도되었다.

본 논문은 전단 및 단면 회전관성효과를 고려한 회전 외팔보의 면의 굽힘진동해석을 위한 모델링 및 해석결과를 도출하고, 이의 정확성을 검증함은 물론 앞서 연구된 면내 굽힘진동의 모델링 및 해석결과와 비교하여 그 차이를 규명하는데에 연구 목적을 두었다. 항공기나 가스터빈 엔진 등에 쓰이는 블레이드형 날개의 경우 면내 굽힘방향 강성은 매우 크고 면외 굽힘방향 강성이 비교적 작은 경우가 흔히 등장하므로 이러한 연구는 그러한 구조물들의 설계를 위해 상당한 실용성을 갖는다고 판단된다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 운동방정식의 유도

본 연구에서는 다음 가정들을 사용한다. 보는 균일하고 등방성이며 단면은 대칭으로 일정하다. 따라서 보 단면의 도심과 탄성축은 서로 일치한다. 보는 일정 평면내에서 회전운동을 하며, 면내방향

강성이 면외방향 강성에 비해 훨씬 크므로 면내방향 변위는 무시한다. 따라서 굽힘변형은 면외방향으로만 발생한다. 이 가정들은 보의 회전운동과 전단 및 단면 회전관성효과에 의한 진동특성 변화에 연구의 초점을 맞추고 기타 효과들이 생략된 운동방정식을 간명히 유도하기 위한 것이다.

Fig. 1은 반경  $r$ 의 강체축  $A$ 에 일단이 고정되어 회전운동을 하는 외팔보를 보여준다. 이 그림에서 보여주듯이 보의 변형이 회전평면에 수직으로 발생하는 경우를 면외 굽힘이라 하며, 보가 회전평면 내에서만 굽힘이 일어나면 면내 굽힘이라 부른다. 이 그림에서  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ 는 기준틀  $A$ 에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이다. 또한  $x$ 는 보의 고정점  $O$ 로부터 변형전 탄성축상의 임의질점  $P^*$ 까지의 거리를,  $\vec{u}$ 는 그 질점에서의 탄성변위를,  $s$ 는 그 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 그림 중 확대된 그림은 질점  $P$ 를 도심으로 갖는 보의 미소부분을 나타내며 기준틀  $A$ 의 좌표계와 변형후 보의 미소부분  $dB$ 의 자세관계를 나타낸다.

탄성체의 운동방정식은 본래 편미분방정식으로 주어진다. 이를 수치적으로 해석하기 위해 통상 탄성변형변수들을 시간과 공간좌표들에 대해 변수분리를 한다. 이 시스템에서 나타나는 탄성변형변수  $s, \theta_2, u_3$ 는 가상모드들을 사용해서 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \tag{1}$$

$$\theta_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \tag{2}$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \tag{3}$$

여기서  $\phi_{1j}(x), \phi_{2j}(x), \phi_{3j}(x)$ 는 각각 인장변위, 탄성축의 기울기, 그리고 굽힘변위 들을 근사화 하기 위한 모드함수들이며,  $q_{1j}(t), q_{2j}(t), q_{3j}(t)$ 는 그들을 위한 모드좌표들이고,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ 는 그 개수를 나타낸다.

운동방정식을 구하기 위해서는 먼저 기구운동학적 공식들을 구해야 한다. 먼저 보의 임의 미소부분  $dB$ 의 각속도  $\vec{\omega}^{dB}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{dB} &= \vec{\omega}^A + \vec{A} \vec{\omega}^{dB} \\ &= \omega_3 \hat{a}_3 + \dot{\theta}_2 \hat{a}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서,  $\vec{\omega}^A$ 는 축  $A$ 의 각속도를 나타내며,  $\omega_3$ 는 그 크기를 나타낸다. 또한 보의 임의질점  $P$ 점의

속도  $\vec{v}^P$ 는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + {}^A\vec{v}^P + \vec{\omega}^A \times (\vec{x} + \vec{u}) \quad (5)$$

여기서  $\vec{v}^O$ 는  $O$ 점의 속도,  ${}^A\vec{v}^P$ 는  $P$ 점의 강체  $A$ 에 대한 상대속도,  $\vec{x}$ 는  $O$ 점에서  $P^*$ 점까지의 벡터이고,  $\vec{u}$ 는 앞에서 언급된대로  $P^*$ 점에서  $P$ 점까지의 탄성변위벡터를 나타낸다. 이들은 성분별로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{v}^O = r\omega_3 \hat{a}_2 \quad (6)$$

$${}^A\vec{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (7)$$

$$\vec{x} = x \hat{a}_1 \quad (8)$$

$$\vec{u} = u_1 \hat{a}_1 + u_3 \hat{a}_3 \quad (9)$$

여기서  $u_1$ 과  $u_3$ 는  $\vec{u}$ 의  $\hat{a}_1$  및  $\hat{a}_3$  방향성분을 각각 나타내며, 면내방향 변형은 없다고 가정되었으므로  $\vec{u}$ 의  $\hat{a}_2$  방향성분은 없다. 식 (4)에서 구한 미소 기준틀  $dB$ 의 각속도를 미분하면 각가속도  $\vec{\alpha}^{dB}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{\alpha}^{dB} = \ddot{\theta}_2 \hat{a}_2 + \dot{\omega}_3 \hat{a}_3 \quad (10)$$

$P$ 점의 각속도  $\vec{\alpha}^P$ 는 속도  $\vec{v}^P$ 를 이용하여 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\vec{\alpha}^P = \frac{d\vec{v}^P}{dt} + \vec{\omega}^A \times \vec{v}^P \quad (11)$$

위식에서 우변 첫째항의 첨자  $A$ 는 그 기준틀에 대한 벡터  $\vec{v}^P$ 의 미분을 의미한다. 이상의 식들에 나타나는  $u_1$ 은 면내굽힘이 발생하지 않는 경우는  $s$ 와  $u_3$ 로만 나타낼 수 있으며, 그들 사이의 근사화된 관계식은 다음과 같다. (참고문헌 (12) 참조)

$$u_1 = s - \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_3}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \quad (12)$$

이를 이용하여  $\vec{v}^P$ 를 구한 후 일반속력  $\dot{q}_a$ 에 대한 편속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_1} = \phi_{1,1} \hat{a}_1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_3} = \left( - \int_0^x \phi'_{3i} \sum_{j=1}^{u_3} \phi'_{3j} q_{3j} d\sigma \right) \hat{a}_1 + \phi_{3,3} \hat{a}_3 \quad (15)$$

또,  $\vec{\omega}^{dB}$ 의  $\dot{q}_a$ 에 대한 미분값을 구하면, 다음과 같이 편각속도가 구해지게 된다.

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_2} = \phi_{2,2} \hat{a}_2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_3} = 0 \quad (18)$$

이상의 결과들을 이용하여 단면 회전관성효과를 고려한 일반관성력을 아래 식으로부터 구할 수 있다. (참고문헌 (15) 참조)

$$F_i^* = - \int_0^L \rho \vec{v}_i^P \cdot \vec{\alpha}^P dx - \int_0^L \vec{\omega}_i^{dB} \cdot (\vec{\alpha}^{dB} \cdot \underline{I} + \vec{\omega}^{dB} \times \underline{I} \cdot \vec{\omega}^{dB}) dx \quad (19)$$

여기서,  $L$ 은 보의 길이,  $\rho$ 는 단위길이당 질량,  $\underline{I} dx$ 는  $dB$ 의 관성 다이아덕(inertia dyadic),  $\vec{v}_i^P$ 와  $\vec{\omega}_i^{dB}$ 는 식 (12~17)에서 구해진  $i$ 번째 편속도와 편각속도를 나타낸다. 그런데 평면운동시 관성 다이아덕  $\underline{I}$ 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{I} = \rho \frac{I_2}{A} \hat{a}_2 \hat{a}_2 \quad (20)$$

여기서,  $I_2$ 는  $\hat{a}_2$ 축에 대한 면적모멘트,  $A$ 는 보의 단면적을 나타낸다.

보에 작용하는 외력은 보의 자유진동해석에 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 외력이 작용하지 않는다고 생각하면 일반작용력은 탄성에너지에 의해서 결정되며, 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (21)$$

여기서, 탄성에너지  $U$ 는 보의 전단효과를 고려하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_2 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kGA \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \theta_2 \right)^2 dx \quad (22)$$

여기서,  $E$ 는 영계수,  $G$ 는 전단강성계수,  $k$ 는 보의 단면형상에 따라 결정되는 전단보정계수이다. 식 (19)와 (21)에서 구한 일반관성력과 일반작용력을 더하고 선형화하면 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{u_1} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{1j} \ddot{q}_{1j} dx - \omega_3^2 \sum_{j=1}^{u_1} \int_0^L \rho \phi_{1j} \phi_{1j} q_{1j} dx + \sum_{j=1}^{u_1} \int_0^L EA \phi'_{1j} \phi'_{1j} dx$$

$$= \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_1 dx + r \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_1 dx \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \frac{I_2}{A} \phi_{2j} \phi_{2j} \ddot{q}_{2j} dx + \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L EI_2 \phi'_{2j} \phi'_{2j} q_{2j} dx \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L kGA \phi_{2j} \phi'_{3j} q_{3j} dx + \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L kGA \phi_{2j} \phi_{2j} q_{2j} dx \\ & = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L \rho \phi_{3j} \phi_{3j} \ddot{q}_{3j} dx \\ & + \frac{1}{2} \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L \rho (L^2 - x^2) \phi'_{3j} \phi'_{3j} q_{3j} dx \\ & + r \omega_3^2 \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L (L - x) \phi'_{3j} \phi'_{3j} q_{3j} dx \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_3} \int_0^L kGA \phi'_{3j} \phi'_{3j} q_{3j} dx \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L kGA \phi'_{3j} \phi_{2j} q_{2j} dx \\ & = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

위에서 구한 운동방정식으로부터 시스템의 일반적 특성을 결정하는 변수들을 추출하고 해석결과의 보편성을 확보하기 위해 운동방정식을 무차원화한다. 이를 위해 다음과 같은 변수들을 사용한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (26)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (27)$$

$$y_{ij} \equiv \frac{q_{ij}}{L} \quad (28)$$

식 (26)에서  $T$ 는 기준시간으로 보의 제원에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI_2}} \quad (29)$$

식 (26)~(28)의 무차원변수들을 이용하여 유도된 무차원 운동방정식을 관찰하면 다음과 같은 3개의 무차원 특성변수들을 발견할 수 있다.

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (30)$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{AL^2}{I_2}} \quad (31)$$

$$r \equiv \omega_3 T \quad (32)$$

식 (30)~(32)에 정의된 특성변수들을 이용하고 행렬을 이용해 나타낸 운동방정식은 다음과 같다.

$$M^{11} \ddot{y}_1 - r^2 M^{11} y_1 + \alpha^2 K^{11} y_1 = \gamma^2 N_1 + \delta \gamma^2 P_1 \quad (33)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} M^{22} \ddot{y}_2 + \frac{kG\alpha^2}{E} K^{23} y_3 + \frac{kG\alpha^2}{E} M^{22} y_2 + K^{22} y_2$$

$$= 0 \quad (34)$$

$$M^{33} \ddot{y}_3 + \delta \gamma^2 K^{GA} y_3 + \gamma^2 K^{GB} y_3 + \frac{kG\alpha^2}{E} K^{33} y_3$$

$$\frac{kG\alpha^2}{E} K^{32} y_2 = 0 \quad (35)$$

여기서, 식 (33~35)에 나타난 행렬들의 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi$$

$$K_{ij}^{22} = \int_0^1 \psi_{2i,\epsilon} \psi_{2j,\epsilon} d\xi$$

$$K_{ij}^{33} = \int_0^1 \psi_{3i,\epsilon} \psi_{3j,\epsilon} d\xi$$

$$K_{ij}^{23} = \int_0^1 \psi_{2i,\epsilon} \psi_{3j,\epsilon} d\xi$$

$$K_{ij}^{32} = \int_0^1 \psi_{3i,\epsilon} \psi_{2j,\epsilon} d\xi$$

$$K_{ij}^{GA} = \int_0^1 (1 - \xi) \psi_{3i,\epsilon} \psi_{3j,\epsilon} d\xi$$

$$K_{ij}^{GB} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2) \psi_{3i,\epsilon} \psi_{3j,\epsilon} d\xi$$

$$P_{1i} = \int_0^1 \psi_{1i} d\xi$$

$$N_{1i} = \int_0^1 \xi \psi_{1i} d\xi \quad (36)$$

식 (36)에서 무차원변수  $\xi$ 를 사용하는 함수  $\psi_{ai}$ 의 값은  $x$ 를 사용하는 함수  $\phi_{ai}$ 의 값과 동일한 값을 갖는다.

## 2.2 진동방정식

식 (33~35)에서 관찰할 수 있듯이 인장방향과 굽힘방향 운동간의 상호 연성효과는 존재하지 않는다. 이것은 참고문헌 (14)에서 유도된 상호 연성효과를 갖는 면내 굽힘진동방정식과 다른 점이다. 참고문헌 (14)의 면내 굽힘진동해석에서는 따라서 연성효과가 크지 않다고 가정하고 해석을 수행했으나, 면외 굽힘진동의 경우는 인장과 굽힘방향 운동간에 연성효과가 존재하지 않으므로 아무런 가정없이 진동해석을 위해 인장방향 운동방정식인 식 (33)을 분리해 낼 수 있다. 식 (34)와 (35)의 두 식은 다시 다음과 같이 정리하여 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{y} + Ky = 0 \quad (37)$$

여기서,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} M^{22} & 0 \\ 0 & M^{33} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (39)$$

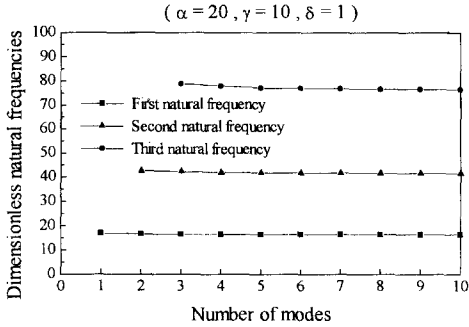


Fig. 2 Convergence of natural frequencies

$$y = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

식 (39)의 강성행렬의 부분행렬은 앞에서 이미 정의된 행렬들과 다음의 관계를 갖는다.

$$K_{22} = K^{22} + \frac{kG\alpha^2}{E} M^{22} \quad (41)$$

$$K_{23} = \frac{kG\alpha^2}{E} K^{23} \quad (42)$$

$$K_{32} = \frac{kG\alpha^2}{E} K^{32} \quad (43)$$

$$K_{33} = \delta\gamma^2 K^{GA} + \gamma^2 K^{CB} + \frac{kG\alpha^2}{E} K^{33} \quad (44)$$

자유진동시 열벡터  $y$ 는 다음과 같은 형태의 해를 갖는다고 가정하여 모드해석을 수행할 수 있다.

$$y = e^{i\lambda\tau}\eta \quad (45)$$

여기서,  $\lambda$ 는 고유진동수이고,  $\eta$ 는 모드형상을 나타내는 열벡터이다. 식 (45)를 (37)에 대입 정리하면 다음과 같다.

$$-\lambda^2 M\eta + K\eta = 0 \quad (46)$$

### 3. 수치해석

수치해석시에는 굽힘변위의 가상모드들로는 고정된 외관보의 굽힘진동모드들을 사용하였고  $\theta_2$ 의 가상모드들은 굽힘변위의 모드들을 공간좌표  $x$ 로 한번 미분한 함수들을 사용하였다. 보의 전단보정계수  $k$ 의 값은 대표적인 값으로 사각형 단면의 경우에 해당하는 1.1769를 사용하였다. (참고문헌 (16) 참조)

Fig. 2는 해석에 사용된 모드수 증가에 따른 고유진동수들의 수렴을 대표적으로 보여준다. 수치해

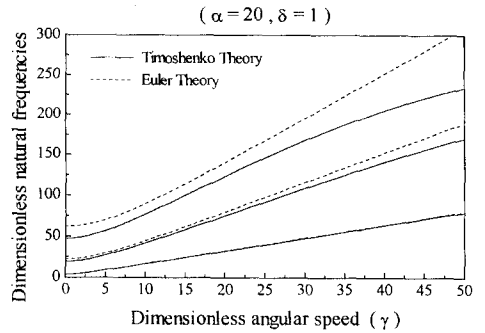


Fig. 3 Dimensionless natural frequencies vs dimensionless angular speed

석은 Timoshenko 보 모델링에 근거하여 수행된 것이며, 사용된 무차원변수들의 값은  $\alpha=20$ ,  $\gamma=10$ ,  $\delta=1$ 이다. 그림에서 수평축은  $\theta_2$ 와  $\omega_3$ 를 위해 각각 사용된 모드수를 나타내는데 모드수의 증가에 따라 고유진동수들이 빠르게 수렴하는 것을 관찰할 수 있다. 두 변수를 위한 모드수가 각각 9개일 때와 10개 일 때를 비교하여 보면 서로 최대 0.16% 정도의 차이가 있음을 수치적으로 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 이 정도의 차이를 해의 충분한 수렴으로 간주하고, 이후 결과들은 항상 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 3은 세장비  $\alpha$ 가 20이고(직사각형 단면을 갖는 보의 경우, 길이가 굽힘방향 두께의 약 5배에 해당하는 경우) 축반경비  $\delta$ 가 1일 때 회전각속도의 증가에 따른 가장 낮은 세 고유진동수들의 변화를 보여준다. 그림에서 실선과 점선은 전단 및 단면 회전관성효과를 고려한 해석결과와 고려하지 않은 해석결과를 각각 나타낸다. 두 결과는 모두 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 증가를 보여 주는데, 전단 및 단면 회전관성효과를 고려했을 때가 고려하지 않았을 때에 비해 더 작은 값의 고유진동수를 예측하는 것을 알 수 있다. 또한 두 이론에 의한 해석결과는 1차보다 2차 이상의 고차모드에서 더 큰 차이가 나게되는 것을 보여주며 회전각속도가 커질수록 그 차이가 증가하는 것도 알 수 있다. 이러한 경향은 면내 굽힘진동해석결과에서도 유사하게 나타났었다.

Table 1과 2는  $\delta$ 값이 0일 때와 1일 때, 회전각속도 및 세장비의 변화에 따른 첫번째 면외 굽힘 고유진동수와 면내 굽힘 고유진동수를 비교하여 나타낸 것이며, Table 3과 4는 두번째 고유진동수를 비교한 것이다. 보 단면의 면내 및 면외 굽힘방향

**Table 1** Comparison of the first natural frequency ( $\delta=0$ )

$\gamma$	0		10		20		30		40	
	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.
10	3.24	3.24	10.7	4.04	20.3	4.88	30.1	5.90	39.7	7.05
20	3.44	3.44	11.0	4.67	20.8	5.81	30.7	6.83	40.6	7.91
30	3.48	3.48	11.1	4.86	20.9	6.22	30.8	7.34	40.8	8.44
40	3.50	3.50	11.1	4.94	21.0	6.43	30.9	7.63	40.9	8.77
50	3.50	3.50	11.2	4.98	21.0	6.54	31.0	7.81	41.0	8.97
60	3.51	3.51	11.2	5.00	21.1	6.61	31.0	7.91	41.0	9.11
70	3.51	3.51	11.2	5.01	21.1	6.65	31.0	7.99	41.0	9.20

(F.: Flapwise, C: Chordwise)

**Table 2** Comparison of the first natural frequency ( $\delta=1$ )

$\gamma$	0		10		20		30		40	
	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.
10	3.24	3.24	16.0	12.6	31.2	24.4	45.9	36.2	55.3	47.3
20	3.44	3.44	16.4	13.0	31.9	24.9	47.5	37.0	63.3	49.2
30	3.48	3.48	16.5	13.1	32.0	25.1	47.7	37.2	63.5	49.3
40	3.50	3.50	16.5	13.2	32.1	25.1	47.8	37.2	63.6	49.4
50	3.50	3.50	16.6	13.2	32.2	25.2	47.9	37.3	63.6	49.5
60	3.51	3.51	16.6	13.2	32.2	25.2	47.9	37.3	63.6	49.5
70	3.51	3.51	16.6	13.2	32.2	25.2	47.9	37.4	63.7	49.5

(F.: Flapwise, C: Chordwise)

**Table 3** Comparison of the second natural frequency ( $\delta=0$ )

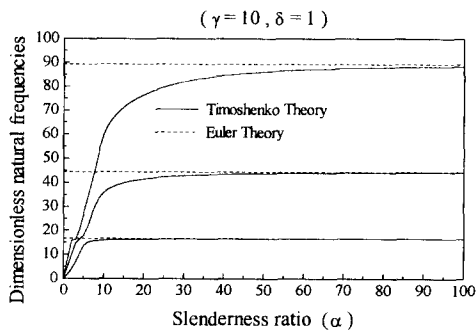
$\gamma$	0		10		20		30		40	
	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.
10	14.7	14.7	26.8	25.3	43.2	40.7	52.8	51.0	56.7	55.4
20	19.2	19.2	31.0	29.4	51.8	48.1	74.1	68.3	96.6	88.9
30	20.6	20.6	32.3	30.7	53.4	49.7	76.3	70.4	99.7	91.7
40	21.2	21.2	32.8	31.3	54.1	50.3	77.2	71.2	101.	92.7
50	21.5	21.5	33.1	31.6	54.4	50.7	77.6	71.7	101.	93.2
60	21.7	21.7	33.3	31.7	54.6	50.9	77.9	71.9	102.	93.5
70	21.8	21.8	33.4	31.8	54.8	51.0	78.0	72.1	102.	93.7

(F.: Flapwise, C: Chordwise)

**Table 4** Comparison of the second natural frequency ( $\delta=1$ )

$\gamma$	0		10		20		30		40	
	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.	F.	C.
10	14.7	14.7	35.8	34.8	52.9	52.1	58.5	57.4	66.1	60.0
20	19.2	19.2	41.5	40.4	74.6	72.2	108.	104.	140.	136.
30	20.6	20.6	42.9	41.8	77.0	74.4	112.	108.	148.	143.
40	21.2	21.2	43.5	42.3	77.8	75.3	114.	110.	150.	144.
50	21.5	21.5	43.8	42.6	78.3	75.7	114.	110.	151.	145.
60	21.7	21.7	44.0	42.8	78.6	76.0	115.	111.	151.	146.
70	21.8	21.8	44.1	42.9	78.7	76.2	115.	111.	151.	146.

(F.: Flapwise, C: Chordwise)



**Fig. 4** Dimensionless natural frequencies vs slenderness ratio

구조강성이 서로 같다면 보의 회전시에는 무차원화된 면외굽힘 고유진동수는 면내 굽힘 고유진동수에

비해 항상 큰 값을 갖는다. 또한 두 결과의 차이는 축반경비가 작을 때, 첫번째 고유진동수에서 현격하게 나타나며, 축반경비가 증가함에 따라 그 차이는 줄어든다. 두번째 고유진동수의 경우는 축반경비와 상관없이 그 값이 서로 상당히 접근해 있음을 알 수 있다. 회전 외팔보가 면내 및 면외 방향으로 동일한 구조강성을 가질 때 면외 굽힘방향 고유진동수가 면내 굽힘방향 고유진동수보다 항상 큰 이유는, 참고문헌 (14)에 유도된 면내 굽힘방향 운동방정식과 본 논문에서 유도된 면외굽힘방향 운동방정식은 단 하나의 항만을 제외하고는 동일한데 면내방향 운동방정식에 있는 이 항이 회전운동에 따라 음의 값을 갖는 강성항이기 때문이다.

Fig. 4는 무차원 회전각속도  $\gamma$ 는 10, 축 반경비

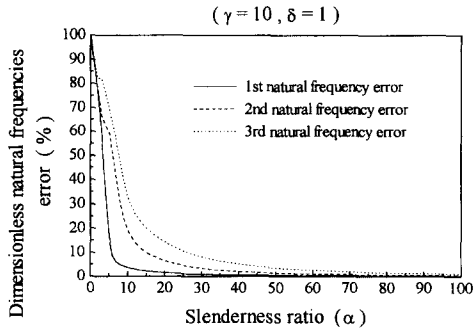


Fig. 5 Percentage error of the dimensionless natural frequencies

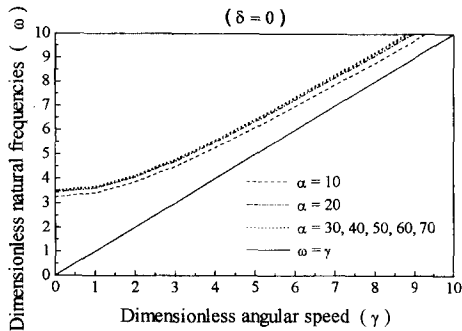
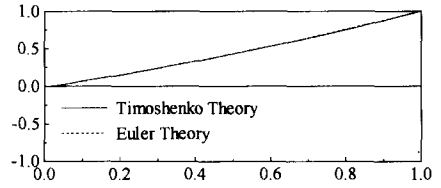


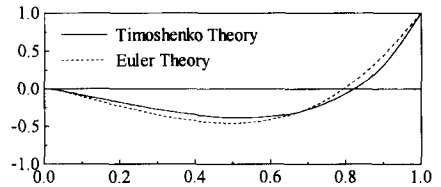
Fig. 6 Non-existence of the critical angular speed

$\delta$ 는 1일 때 세장비의 변화에 따른 가장 낮은 세고유진동수의 변화를 보여준다. 여기서 관찰할 수 있듯이 세장비가 커질수록 단면 회전관성과 전단효과에 의한 두 이론간의 차이가 점점 줄어드는 것을 관찰할 수 있다.  $\alpha$ 가 70일 때(보의 길이가 두께의 약 20배에 해당하는 경우) 두 이론에 의한 결과는 세번째 고유진동수의 경우도 서로 약 1.9%이내의 차이에 머무르는 것을 확인할 수 있었다. 그림에서 Timoshenko 보이론의 경우  $\alpha$ 가 0으로 갈 때 (보이론에서 실제적 의미는 없지만) 고유진동수가 0으로 접근하는 것은 이 때 강제운동에 의한 고유진동수값이 구해지기 때문이다.

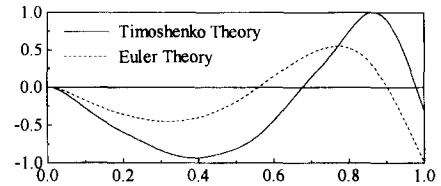
Fig. 5는 Timoshenko 보이론과 Euler 보이론에 의해 예측된 고유진동수값 간의 오차를 나타낸다.  $\alpha$ 가 20인 경우는 세번째 고유진동수에서 14.3%의 큰 차이가 발생하였으나  $\alpha$ 가 70인 경우는 단지 1.9%의 차이만이 발생하는 것을 확인할 수 있었다. 이것은 단면 회전관성효과나 전단효과는 세장비가 큰 경우 고려되지 않아도 되나 세장비가 작아질수록 그 영향이 커진다는 일반적 가설이 회전하는 외팔보의 경우에도 성립한다는 것을 의미한다.



(a) First mode shapes



(b) Second mode shapes



(c) Third mode shapes

Fig. 7 Variation of first three mode shapes

Fig. 6은 축반경비  $\delta$ 가 0일 때,  $\gamma$ 의 변화에 따른 첫번째 고유진동수의 변화를 여러 가지  $\alpha$ 값에 대해 나타낸 그림이다. 이 그림에는  $\omega = \gamma$ 의 직선이 나타나 있는데 여기서 보듯이 고유진동수의 궤적이 이 직선과 만나는 경우는 없다. 축반경비가 증가하거나 고차모드에서는 고유진동수의 증가율이 이 그림에 나타난 경우보다 항상 더 크므로 고유진동수와 축의 회전각속도가 같아져서 공진이 발생하는 임계각속도는 본 논문에서 초기에 정한 가정의 범위안에서는 결코 존재하지 않는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 세장비  $\alpha$ 는 20, 축반경비  $\delta$ 는 1,  $\gamma$ 는 50일 때 두 해석모델에 의해 구해진 모드형상 차이를 보여주고 있다. 이 결과는 두 해석이론에 의한 결과가 고유진동수와 마찬가지로 저차모드에서는 별 차이를 주지 않으나 고차모드에서는 상당한 차이를 주는 것을 보여준다. 특별히 3차 모드의 경우 최대 진폭이 보의 자유단 끝이 아닌 약간 안쪽으로 이동된 위치에 존재하는 것도 흥미있는 결과이다.

Table 5는 본 논문에서 제시된 모델링에 의한 해석결과의 정확성을 검증하기 위해서 기존의 연구 결과들과[참고문헌 (9, 10) 참조] 비교한 것이다.

**Table 5** Comparison of numerical results for accuracy confirmation

Natural frequency	$\alpha = 10$			$\alpha = 20$		
1st Frequency	23.19 (P)	23.05 (Y)	23.04 (W)	23.64 (P)	23.52 (Y)	23.51 (W)
2nd Frequency	45.69 (P)	45.60 (Y)	45.43 (W)	56.43 (P)	56.11 (Y)	56.07 (W)
3rd Frequency	66.97 (P)	67.72 (Y)	66.85 (W)	97.83 (P)	97.19 (Y)	95.01 (W)

( $\delta=3, \lambda=3, E/G=2.6, k=0.85$ )

이 결과를 도출하기 위해 사용된 무차원변수들의 값들은  $\delta = 3, \gamma = 3, E/G = 2.6, k = 0.85$ 이다. 표에서 P로 나타낸 것은 본 논문의 방법에 의한 해석결과이고, Y는 Yokoyama의 결과, W는 Wang의 결과를 각각 나타낸다. 세 결과는 서로 최대 1% 미만의 차이로 서로 일치하고 있으며 이는 본 논문에서 제시된 방법의 정확성을 잘 나타내 주는 것이다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 단면 회전관성효과와 전단 효과를 고려한 회전 외팔보의 면외 굽힘진동해석을 위한 모델링이 제시되었으며, 기존 결과와의 비교를 통해 그 해석결과의 정확성을 검증하였다. Timoshenko 보 가정에 근거하여 계산된 고유진동수는 Euler 보가정에 근거한 고유진동수에 비해 항상 큰 값을 가지며, 두 이론에 의한 수치해석결과들의 차이는 세장비가 커짐에 따라 무시할 만큼 감소하였다. 두 이론은 세장비가 감소함에 따라 모드형상 예측, 특히 고차모드의 예측에 큰 차이를 보여주었다. 또한 회전체에 따라 무차원 면외 굽힘 고유진동수가 면내 굽힘 고유진동수보다 항상 큰 값을 갖는 것을 확인할 수 있었으며, 면내 굽힘 진동과는 달리 면외 굽힘진동에서는 공진을 일으키는 임계 각속도가 존재하지 않는 것도 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No.* 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175~185.
- (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass" *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369~381.
- (5) Wright, A., Smith C., Thresher, R. and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 197~202.
- (6) Krupka, R. M. and Baumanis, A. M., 1969, "Bending-Bending Mode of a Rotating Tapered-Twisted Turbomachine Blade Including Rotatory Inertia and Shear Deformation" *J. of Engineering for Industry*, 91, pp. 1017~1024.
- (7) Stafford, R. O. and Giurgiutiu, 1975, "Semi-Analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams" *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 17, pp. 719~727.
- (8) Abbas, B. A., 1985, "Dynamic Analysis of Thick Rotating Blades with Flexible Roots" *The Aeronautical Journal*, 89, pp. 10~16.
- (9) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (10) Wang, J. T., Mahrenholtz, O. and Bohm, J., 1976, "Extended Galerkin's Method for Rotating Beam Vibrations Using Legendre Polynomials," *Solid Mech. Arch.* 1, pp. 341~346.
- (11) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (12) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2),



- pp. 261~278.
- (13) 유홍희, 1991, "회전 외팔보의 굽힘진동해석," 대한기계학회지논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.
- (14) 신상하, 유홍희, 1996, "전단 및 단면 관성효과를 고려한 회전 외팔보의 모델링 및 진동해석," 한국소음진동공학회지, 제6권, 제2호, pp. 179~186.
- (15) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics : Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- (16) Pilkey, W. D., 1994, *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*, John Wiley & Sons Inc., New York.