

〈논 문〉

경사기능재료의 비정상 열응력에 관한 해석적 연구

최 덕 기 * · 김 창 수*

(1997년 1월 9일 접수)

An Analytical Study on Unsteady Thermal Stresses of Functionally Graded Materials

Deok-Kee Choi and Chang Soo Kim

Key Words : Functionally Graded Material(경사기능재료), Alternative Green's Solution (Alternative Green 함수 해), Thermal Stress Relaxation(열응력 완화), Stress Difference(응력차이)

Abstract

This paper addresses a method which can be used for analyzing thermal stresses of a functionally graded material (FGM) using semi-analytical approach. FGM is a nonhomogeneous material whose composition changes continuously from a metal surface to a ceramic surface. An infinite one dimensional FGM plate is considered. The temperature distribution in the FGM is obtained by approximate Green's function solution. To expedite the convergence of the solutions, alternative Green's function solution is derived and shows good agreement with results from finite difference method. Thermal stresses are calculated using temperature distribution of the plate.

1. 서 론

경사기능재료는 비균질재료로서 한쪽은 구조물을 지지하기 위하여 가벼운 금속으로 하고, 다른 한쪽은 고온의 열하중에 대응하기 위하여 세라믹으로 구성된다. 이러한 재료는 두 소재의 임의의 배합으로 만들어지고, 각 소재의 기능성을 보이기 위하여 체적비와 가공률이 점진적인 변화를 갖는다. 그러므로 열 및 기계적 물성치는 위치에 따라 연속적으로 변화하고, 구성 소재의 적당한 배합에 의해 열응력을 완화시키는 것이 가능하다.

지금까지의 경사기능재료에 대한 연구를 살펴보면 다음과 같다. Noda 등⁽¹⁾은 경사기능재료가 정상상태에서 어떤 적층복합재료보다 열응력을 완화

시킬 수 있다는 것을 보였고, Saito 등⁽²⁾은 scramjet 엔진을, Wakamatsu 등⁽³⁾은 경사기능재료에서의 열충격 측정장치의 개발을 연구하였다. Erdogan 등⁽⁴⁾은 열응력하에서의 균열문제를 연구하였으며, Zhi-He Jin⁽⁵⁾은 균열에서의 응력집중완화에 관한 연구를 하였다. 국내에서는 송준희 등⁽⁶⁾이 경사기능성 재료의 열충격에 대하여 연구하고 있다. 이같은 열응력 완화형 재료인 경사기능재료의 연구에서, 비정상상태에 대한 지금까지의 해석적 방법에 있어서, 섭동이론과 Laplace 변환법을 이용한 해석방법이 연구되었으며,⁽⁷⁾ 또 다른 해석적 방법으로는 섭동이론에 의한 해석방법에 이어서 어려운 방정식을 유도해야 하는 문제점을 해결하기 위한 방법으로 적층판 모델(laminated plate model)과 Laplace 변환법을 이용한 해석방법이 보고되었다.⁽⁸⁾ 그러나, 이러한 방법들은 Laplace 역변환을 수행

*회원, 단국대학교 기계공학과

해야 하는 어려움이 있다. 따라서 Laplace 역변환을 할 필요가 없는 Green 함수를 사용하여 열 및 기계적 물성치에서 가공률이 포함되지 않는 간단한 위치함수의 물성치를 갖는 경사기능재료를 해석하였지만,⁽⁹⁾ 본 연구에서는 점진적인 변화를 갖는 체적분율과 기공률을 포함하는 경사기능재료의 비정상 온도 및 열응력을 구하는데 해석적인 방법과 경사기능재료의 설계에 있어서 적당한 체적분율과 기공률을 구하는데 응력의 차이를 이용하는 방법을 제시하고자 한다.

열전도 문제의 해석에 있어서 Green 함수의 이용에 대한 장점은 여러가지가 있다.⁽¹⁰⁾ 첫째, 모든 초기 및 경계조건을 포함하는 열전도 문제에 있어서 대단히 포괄적인 해를 제공한다. 둘째, non-homogeneous boundary condition인 경우에 있어서 Alternative Green 함수를 사용하여 수렴속도를 빨리 할 수 있다.

셋째, 온도분포의 해가 함수의 형태로 유도되기 때문에 원하는 시간과 좌표에 대해서 그 수치를 대입만 하면 원하는 곳의 온도 및 응력을 구할 수 있다. 이같이 많은 장점이 있지만, 경사기능재료와 같은 비균질재료에 대하여 해석적인 Green 함수를 유도한다는 것은 거의 불가능하다. 이점을 보완하기 위해서 본 논문에서는 근사적인 Green 함수⁽¹¹⁻¹⁴⁾를 사용하였다.

이번 연구에서는 체적비와 기공률을 포함하는 열 및 기계적 물성치를 갖는 경사기능재료에 대해 Green 함수를 사용하여 비정상 온도분포 및 역학적 경계조건을 고려한 열응력분포를 해석적인 방법에 의해 구하였다. 먼저, 고온의 열하중과 구조물의 지탱을 위한 세라믹과 금속으로 ZrO_2 와 Ti-6Al-4V로 이루어진 경사기능재료를 사용한 1차원 무한평판을 생각하기로 한다. 위치에 따른 물성치를 갖는 경사기능재료를 생각하여 nonhomogeneous boundary condition인 경우에 있어서의 Alternative Green 함수 해를 사용하여 온도분포 해를 구하여 유한차분법과의 비교를 하고, 역학적 경계조건에 따른 열응력분포를 계산하는데 있어서 해석적 방법에 의한 열응력 완화형 재료인 1차원 무한평판인 경우의 경사기능재료를 해석하였다. 그리고, 경사기능재료의 설계에 있어서 열응력 완화를 보이기 위한 응력의 차이를 계산하였다.

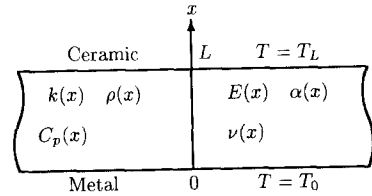


Fig. 1 A one-dimensional infinite plate with the location dependent material properties

2. 이론 해석

Fig. 1에서 보는 바와 같이 한쪽은 금속, 다른 한쪽은 세라믹, 중앙에는 금속과 세라믹의 혼합물 질로 구성되어 있는 두께 L 을 가진 1차원 무한평판을 생각해 보기로 한다. 위치와 시간에 대해서 다음과 같이 무차원화 한다.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}$$

$$\bar{t} = \frac{\zeta_m}{L^2} t$$

여기서, $\zeta_m = x_m / (\rho_m C_{pm})$, x 는 열전도율, ρ 는 밀도, C_p 는 비열, 점차 m 은 금속쪽의 물성치를 의미한다.

무차원화된 비정상 1차원 열전도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\chi(\bar{x}) \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} \right] + g(\bar{x}, \bar{t}) = \zeta_m C(\bar{x}) \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} \quad (1)$$

여기서, $C(\bar{x}) = \rho(\bar{x}) C_p(\bar{x})$, T 는 위치와 시간에 대한 온도 함수, $g(\bar{x}, \bar{t})$ 는 열원, $\rho(\bar{x})$ 와 $C_p(\bar{x})$ 는 각각 밀도, 비열의 위치의 함수이다. 식 (1)에 대한 초기 및 경계조건은 다음과 같다.

$$T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x})$$

$$T(0, \bar{t}) = T_0$$

$$T(1, \bar{t}) = T_L$$

Green 함수를 구하기 위한 식 (1)에 상응하는 보조방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\chi(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial \bar{x}} \right] + C(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(\bar{t} - \bar{T}) = \zeta_m C(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial \bar{t}} \quad (2)$$

여기서, $G = G(\bar{x}, \bar{t} | \bar{x}', \bar{T})$ 이고, δ 는 디랙

Table 1 The properties of thematerials

	κ W/(mk)	C_p J/(kg K)	ρ kg/m ³	E GPa	α 1/K	ν	σ_{bt} MPa	σ_{bc} MPa
ZrO ₂	2.09	456.7	5331	151.0	10.0×10^{-6}	1/3	146	3136
Ti-6Al-4V	7.50	537.0	4420	116.7	9.5×10^{-6}	1/3	921	921

κ : Thermal conductivity, C_p : Specific Heat, ρ : Density
 E : Young's Modulus, α : Coefficient of Linear Thermal Expansion
 ν : Poisson's Ratio, σ_{bt} : Tensile Strength, σ_{bc} : Compressive Strength

델타함수이다. 식 (2)의 경계조건은 다음과 같다.

$$G|_{x=0} = 0$$

$$G(\bar{x}, \bar{t} | \bar{x}', \bar{T}) = 0, \bar{t} < \bar{T}$$

Table 1은 상온에서의 ZrO₂와 Ti-6Al-4V의 열 및 기계적 물성치를 나타낸다.

2.1 Green 함수 해

식 (1), 식 (2) 그리고 Green 함수의 성질 $G(\bar{x}, \bar{t} | \bar{x}', \bar{T}) = G(\bar{x}' - \bar{T} | \bar{x}, -\bar{t})$ 를 이용하여 열원이 없는 Green 함수 해(Green's function solution : GFS)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C(\bar{x})T(\bar{x}, \bar{t}) = \zeta_m \int_{x'=0}^1 C(\bar{x}')F(\bar{x}')G(\bar{x}', \bar{t} | \bar{x}', 0) d\bar{x}' + \int_{\tau=0}^t \int k(s') \left(G \frac{\partial T}{\partial m} - T \frac{\partial G}{\partial n} \right) |_{s ds' t \bar{T}} \quad (3)$$

여기서, $G = G(\bar{x}', -\bar{T} | \bar{x}, -\bar{t})$, n 과 s 는 각각 외향법선벡터와 표면을 의미한다.

2.2 Alternative Green 함수 해

Nonhomogeneous boundary condition인 경우에 있어서 GFS의 경계수렴속도가 대단히 느린 것을 보완하기 위해서 Alternative Green 함수 해(Alternative Green's function solution : AGFS)를 사용한다. AGFS는 nonhomogeneous boundary condition을 만족하는 가장 간단한 함수인 T^* 의 정의로부터 시작된다.

$$T^* = (T_L - T_0) \bar{x} + T_0 \quad (4)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial T^*}{\partial \bar{x}} \right] \quad (5)$$

T_0 는 금속쪽의 경계값, T_L 는 세라믹쪽의 경계값이다. 식 (4)와 식 (5) 그리고 식 (2)를 사용하여 Green 함수 해, 방정식을 유도한 후 Green's theorem을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_{\tau=0}^t \int k(\bar{x}) \left(G \frac{\partial T^*}{\partial n} - T^* \frac{\partial G}{\partial n} \right) |_{s ds' d\bar{T}} = C(\bar{x})T^* + \int_{\tau=0}^t \int_0^1 G \Gamma d\bar{x}' d\bar{T} - \int_0^1 C(\bar{x}') \left[G |_{\tau=0} T^*(\bar{x}, 0) + \int_{\tau=0}^t G \left(\frac{\partial T^*}{\partial \bar{T}} \right) d\bar{T} \right] d\bar{x}' \quad (6)$$

여기서, $G = G(\bar{x}', \bar{T} | \bar{x}, -\bar{t})$ 이다. 식 (6)을 식 (3)에 대입, 정리하여 AGFS를 구하면 다음과 같다.

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = (T_L - T_0) \bar{x} + T_0 + \frac{1}{C(\bar{x})} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^1 G \Gamma d\bar{x}' d\bar{T} \cdot \frac{\zeta_m}{C(\bar{x})} \int_{x'=0}^1 C(\bar{x}') G |_{\tau=0} [T(\bar{x}', 0) - T^*(\bar{x}', 0)] d\bar{x}' \quad (7)$$

여기서, $G = G(\bar{x}', -\bar{T} | \bar{x}, -\bar{t})$ 이다. 경사기능재료와 같은 비균질재료에 대한 Green 함수를 해석적으로 유도한다는 것은 불가능하다. 따라서 본 연구에서는 Galerkin 방법을 이용하여 근사적인 Green 함수를 유도하였다.

2.3 Galerkin 방법을 이용한 Green 함수 유도

식 (1)에서 열원이 $g(\bar{x}, \bar{t}) = C(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(\bar{t} - \bar{T}')$ 로 된다면 Green 함수는 식 (2)의 해가 된다. Green 함수를 구하기 위하여, 식 (1)을 제차방정식과 비제차방정식으로 나누어서 생각할 수 있다.

2.3.1 제차방정식

식 (1)에서 제차방정식의 해를 $\theta(\bar{x}, \bar{t})$ 라 하면 식 (1)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right] = \zeta_m C(\bar{x}) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} \quad (8)$$

$\theta(\bar{x}, \bar{t})$ 를 다음과 같이 가정하여 식 (8)을 고

유치 문제로 변환한다.

$$\theta = \sum_{k=1}^n c_n \psi_n(\bar{x}) \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] \quad (9)$$

여기서, c_n , $\psi_n(\bar{x})$, γ_n 은 각각 상수, 고유함수, 고유값이며, 계산되어질 미지수이다. θ 를 식 (8)에 대입하고, 양변에 시도함수 $f_i(\bar{x})$ 를 곱하고 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 f_i \frac{d}{d\bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{d\psi_n}{d\bar{x}} \right] d\bar{x} + \gamma_n \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) \cdot \psi_n f_i d\bar{x} = 0 \quad (10)$$

여기서, 시도함수 f_i 는 $f_i(\bar{x})$ 를 의미한다. 식 (10)에서 고유벡터와 시도함수를 이루어지는 고유함수 ψ_n 을 다음과 같이 가정하다.

$$\psi_n(\bar{x}) = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(\bar{x}) \quad (11)$$

여기서, $f_j(\bar{x})$ 는 시도함수, d_{nj} 는 고유벡터이다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^N d_{nj} \left[\int_{f_j} \frac{d}{d\bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{df_j}{d\bar{x}} \right] d\bar{x} + \gamma_n \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) f_j f_j d\bar{x} \right] = 0 \quad (12)$$

위의 식을 행렬식으로 나타내면 식 (8)은 다음과 같은 고유치 문제로 변환시킬 수 있다.

$$(A + \gamma_n B) d_n = 0 \quad (13)$$

$$a_{ij} = \int_0^1 f_i \frac{d}{d\bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{df_j}{d\bar{x}} \right] d\bar{x} \quad (14)$$

$$b_{ij} = \int_0^1 L^2 C(\bar{x}) f_i f_j d\bar{x} \quad (15)$$

a_{ij} 와 b_{ij} 는 각각 A , B 행렬의 요소이다. A 행렬을 대칭행렬로 만들기 위해서, 식 (14)의 우변에 Green's theorem을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 f_i \frac{d}{d\bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{df_j}{d\bar{x}} \right] d\bar{x} = \int_s k(\bar{x}) f_i \left(\frac{df_i}{dn} \right) ds - \int_0^1 k(\bar{x}) \frac{df_i}{d\bar{x}} \frac{df_j}{d\bar{x}} d\bar{x} \quad (16)$$

시도함수의 경계조건이 homogeneous boundary condition을 만족하므로 식 (16)에서 우변의 첫째 항은 0이 된다. 따라서 식 (14)의 a_{ij} 를 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$a_{ij} = - \int_0^1 k(\bar{x}) \frac{df_i}{d\bar{x}} \frac{df_j}{d\bar{x}} d\bar{x} \quad (17)$$

고유치 문제, 식 (13)을 풀면 고유값, γ_n 과 고유벡터, d_n 을 구할 수 있고, 식 (11)로부터 고유함수, $\psi_n(\bar{x})$ 을 얻을 수 있다.

2.3.2 비제차방정식

식 (1)의 비제차방정식의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$T(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^N c_n(\bar{t}) \psi_n(\bar{x}) \cdot \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] \quad (18)$$

여기서, 시간의 함수 $c_n(\bar{t})$ 는 미지수이고 고유함수, $\psi_n(\bar{x})$ 과 고유값, γ_n 은 2.3.1에서 구했다. 식 (18)을 원래의 열전도방정식 식 (1)에 대입하여, 양변에 시도함수 f_i 를 곱하여 적분하면 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^N c_n(\bar{t}) \left[\int \frac{d}{d\bar{x}} \left[k(\bar{x}) \frac{d\psi_n}{d\bar{x}} \right] f_i d\bar{x} + \gamma_n \int L^2 C(\bar{x}) \psi_n f_i d\bar{x} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] + \int f_i g(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} - \sum_{n=1}^N \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \cdot \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] \int \zeta_m C(\bar{x}) \psi_n f_i d\bar{x} = 0 \quad (19)$$

식 (19) 좌변의 첫번째 각괄호는 식 (10)으로부터 0이 되므로 식 (19)는 미지수 $c_n(\bar{t})$ 을 갖는 다음과 같은 식이 된다.

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] \int_0^1 \zeta_m C(\bar{t}) \cdot \psi_n f_i d\bar{x} = g_i^* \quad (20)$$

여기서,

$$g_i^* = \int_0^1 g(\bar{x}, t) f_i(\bar{x}) d\bar{x} \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (21)$$

식 (20)에서 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 구하기 위해서 고유함수 식 (11)를 식 (20)에 대입하고, 다음과 같이 치환한다.

$$h_{ij} = \int_0^1 \zeta_m C(\bar{x}) f_i f_j d\bar{x} \quad (22)$$

$$e_{in} = \sum_{j=1}^N d_{nj} h_{ji} \quad (23)$$

식 (20)은 다음과 같이 되며,

$$\sum_{n=1}^N e_{in} \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp\left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}\right] = g_i^* \quad (24)$$

윗식을 다음과 같이 치환하여 식 (24)를 행렬식으로 만든다.

$$x_n = \left[dc_n \frac{\bar{t}}{d\bar{t}} \right] \exp \left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t} \right] \quad (25)$$

식 (25)를 사용하여 식 (24)를 표현하면 다음과 같이 간단히 될 수 있다.

$$\sum_{n=1}^N e_{in} x_n = g_i^*$$

위의 식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{EX} = \mathbf{g}^*$$

식 (27)에서 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 포함하고 있는 \mathbf{X} 를 구하기 위하여, 다음과 같이 역행렬을 이용하여 \mathbf{X} 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{g}^* \quad (28)$$

여기서, $\mathbf{P} = \mathbf{E}^{-1}$ 이다. \mathbf{P} 는 P_{ni} 의 요소를 갖는 행렬이다. 이제 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 구하기 위해서 식 (25)를 식 (28)에 대입하면 다음과 같다.

$$x_n = \left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] \exp \left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t} \right] = \sum_{i=1}^N P_{ni} \mathbf{g}_i^* \quad (29)$$

윗식을 다시 $dc_n(\bar{t})/d\bar{t}$ 에 대하여 정리하면, 식 (30)과 같다.

$$\left[\frac{dc_n(\bar{t})}{d\bar{t}} \right] = \sum_{i=1}^N P_{ni} \mathbf{g}_i^* \exp \left[\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t} \right] \quad (30)$$

이제 미지수 $c_n(\bar{t})$ 를 구하기 위해서 식 (30)을 시간에 따라 적분하면 다음과 같이 $c_n(\bar{t})$ 를 구할 수 있다.

$$c_n(\bar{t}) = A_n + \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^{\bar{t}} \mathbf{g}_i^* \cdot \exp \left[\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}' \right] d\bar{t}' \quad (31)$$

여기서, A_n 은 적분상수이다. 식 (31)에서 구한 계수 $c_n(\bar{t})$ 를 식 (18)에 대입하면 다음과 같이 온도분포함수를 구할 수 있다.

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^N \psi_n(\bar{x}) \cdot \exp \left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t} \right] \cdot \left[A_n + \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^{\bar{t}} \mathbf{g}_i^* \cdot \exp \left[\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} \bar{t}' \right] d\bar{t}' \right] \quad (32)$$

식 (32)에서 적분상수인 미지수 A_n 을 구하기 위해서 초기조건 $T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x})$ 를 식 (32)에 대

입하면 다음과 같이 된다.

$$F(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N \psi_n(\bar{x}) A_n \quad (33)$$

식 (33)의 양변에 $\zeta_m C(\bar{x}) f_i F(\bar{x}) d\bar{x}$ 를 곱하고 적분하면 적분상수인 A_n 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$A_n = \sum_{i=1}^N P_{ni} \int_0^1 \zeta_m C(\bar{x}) f_i F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (34)$$

이제 적분상수인 식 (34)를 식 (32)에 대입하여, 초기온도 $F(\bar{x}) = 0$ 이고, $g(\bar{x}, \bar{t}) = C(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(\bar{t} - \bar{t}')$ 이면 식 (32)는 식 (2)의 해인 Green 함수와 같게 된다. 그러나, Green 함수 해와 Alternative Green 함수 해에서는 Green 함수를 $G(\bar{x}', \bar{T} | \bar{x}, \bar{t})$ 를 사용했으므로, Green 함수의 성질 $G(\bar{x}', \bar{t} | \bar{x}, \bar{T}) = G(\bar{x}', -\bar{T} | \bar{x}, -\bar{t})$ 를 이용하여 다음과 같이 Green 함수를 정의할 수 있다.

$$G(\bar{x}', \bar{t} | \bar{x}, \bar{T}) = C(\bar{x}) \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N d_{nj} \cdot \exp \left[-\gamma_n \frac{L^2}{\zeta_m} (\bar{t} - \bar{T}) \right] f_i(\bar{x}') f'(\bar{x}) \quad (35)$$

지금까지 구한 Green 함수를 식 (7)에 대입하면, 온도분포 해인 Alternative Green 함수 해를 얻을 수 있다.

2.4 열응력해석

1차원 무한평판에 있어서 열응력 $\sigma(\bar{x})$ 은 $\bar{x} = 0$ 에서의 변형률을 ϵ_0 , 곡률반경률 r_0 , 재료의 초기 온도를 T_i 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁵⁾

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{E(\bar{x})}{1 - \nu(\bar{x})} \cdot \left[\epsilon_0 + \frac{\bar{x}L}{r_0} - \alpha(\bar{x}) \left[T(\bar{x}) - T_i \right] \right] \quad (36)$$

역학적 경계조건은 다음의 경우만을 고려하였다.⁽¹⁶⁾ 신장구속, 곡률구속

$$\epsilon_0 = 0, \quad r_0 = \infty$$

식 (36)에서 위의 경계조건을 만족하는 응력식, 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{E(\bar{x})}{1 - \nu(\bar{x})} \left[-\alpha(\bar{x}) \left[T(\bar{x}) - T_i \right] \right] \quad (37)$$

Alternative Green 함수 해를 사용하여 구한 온도분포 해와 부록 A에서의 기계적 물성치 $E(\bar{x})$, $\alpha(\bar{x})$, $\nu(\bar{x})$ 를 응력식에 대입하면 비정상 응력분포를 구할 수 있다.

경사기능재료를 설계할 때 부록 A에서 체적분율과 기공률에 영향을 주는 M 과 R 이 변화함에 따른 최대응력(σ_{max})과 최소응력(σ_{min})의 응력의 차이(f_{diff})를 계산하면 각 시간에 따른 응력의 변화를 볼 수 있다. 다음 식은 응력의 차이를 계산하기 위한 식이다.

$$f_{diff} = \{ \sigma_{max} - \sigma_{min} \} \quad (38)$$

경사기능재료를 설계할 때, 식 (38)을 이용하는 것은 응력의 차이가 시간이 지남에 따라 가장 빨리 완화되는 경우에 있어서 M 과 R 를 결정짓는 인자가 될 수 있다.

3. 해 석

3.1 온도해석

부록 A에서 구한 물성치를 갖는 경사기능재료의 온도분포를 해석하였다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 열 및 기계적 물성치는 위치의 함수임을 알 수 있다. 본 연구에서는 기공률을 무시하지 않고 모든 경우에 있어서 기공률을 포함시켰다. 먼저 시도함수는 $f_i(\bar{x}) = \bar{x}^i(1-\bar{x})$ $i=1, 2, 3, \dots$ 를 사용하여, 초기온도 $T(\bar{x}, 0) = 300$ K, 경계온도 $T_0 = 770$ K, $T_1 = 1680$ K로 된 열응력 완화형 재료인 경사기능재료를 해석하기 위해서, 식 (A1), 식 (A2) 그리고 식 (A3)을 식 (17)과 식 (15)에 대입하여 행렬 **A**와 **B**를 구하여 식 (13)에 대입한 다음 고유치 문제를 풀면, 고유벡터 \mathbf{d}_n , 고유값 γ_n 을 구할 수 있다. 그리고 식 (22)를 사용하여 h_{ji} 를 구하여, d_{nj} 와 h_{ji} 를 식 (23)에 대입한 다음 e_{in} 를 구하고 역행렬을 계산하면, 행렬 **P**를 얻을 수 있다. 따라서 Green 함수인 식 (35)에 이를 대입하면 근사적인 Green 함수를 얻을 수 있다. 그러나, 서론에서 언급한 바와 같이 비제차 경계조건인 경우의 경계에서 수렴속도가 대단히 느리므로 AGFS를 사용하기 위해서 식 (35)를 식 (7)에 대입하여 비정상 온도분포 해인 AGFS를 구하였다.

본 해법의 타당함을 보이기 위해서 Table 2는 시도함수 9항을 사용한 AGFS와 Explicit Central Scheme을 사용한 유한차분법과 수치적으로 비교

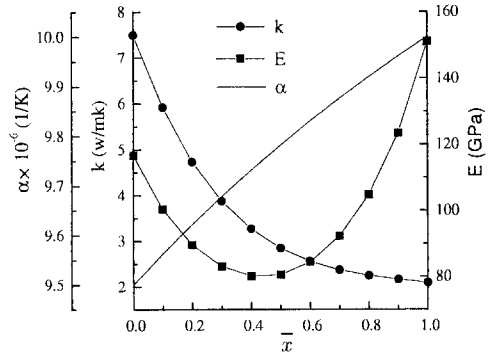


Fig. 2 The properties of thermal conductivity(k), Young's modulus(E) and the coefficient of thermal expansion(α) for $M=1, R=1$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus each the property

Table 2 The comparison of the temperatures obtained by the finite difference method and the alternative Green's function solution at $\bar{t}=0.01$ for $M=1$ and $R=1$

\bar{x}	FDM	AGFS
0.0	770.0	770.9
0.1	534.6	534.3
0.2	369.2	371.2
0.3	310.6	307.8
0.4	300.6	302.0
0.5	300.0	301.3
0.6	300.0	297.2
0.7	300.3	302.5
0.8	315.4	314.3
0.9	564.9	566.3
1.0	1680.0	1680.0

한 도표이다. 유한차분법에서의 시간간격은 0.00005, 위치간격은 0.01로 하였다.

도표에서 보는 바와 같이 유한차분법과 Alternative Green 함수 해가 서로 근사함을 알 수 있다.

다음의 그림은 부록 A에서 금속의 체적분율, 기공률에 영향을 주는 M 과 R 의 변화에 따른 Alternative Green 함수를 사용하여 구한 비정상 온도분포 해의 그래프이다.

Fig. 3~Fig. 8에서 보는 바와 같이 무차원 시간

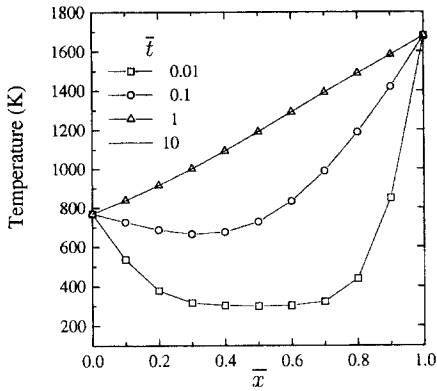


Fig. 3 The temperature variations for $M=0.1$ and $R=1$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

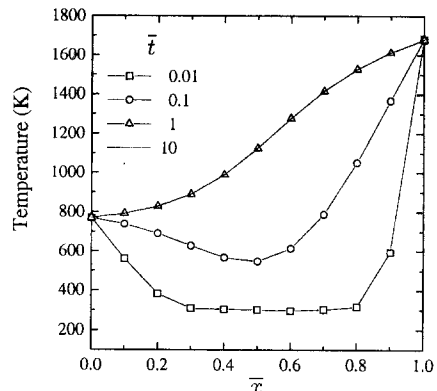


Fig. 6 The temperature variations for $M=1$ and $R=3$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

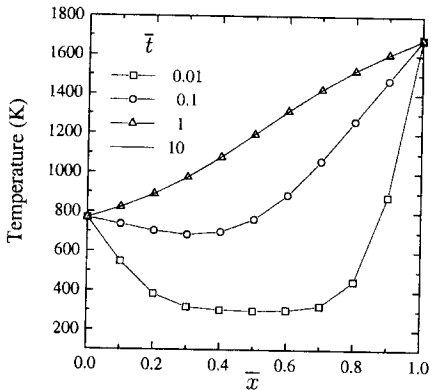


Fig. 4 The temperature variations for $M=0.1$ and $R=2$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

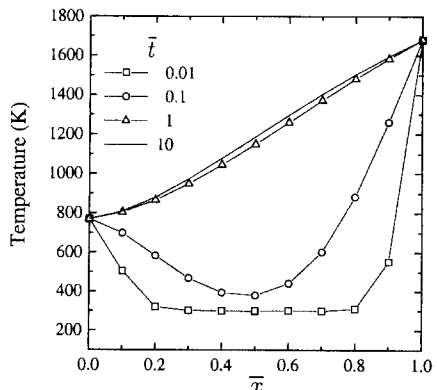


Fig. 7 The temperature variations for $M=10$ and $R=1$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

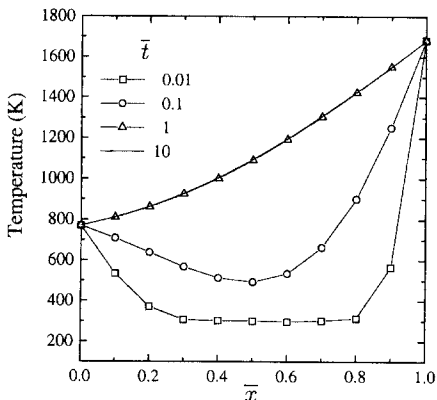


Fig. 5 The temperature variations for $M=1$ and $R=1$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

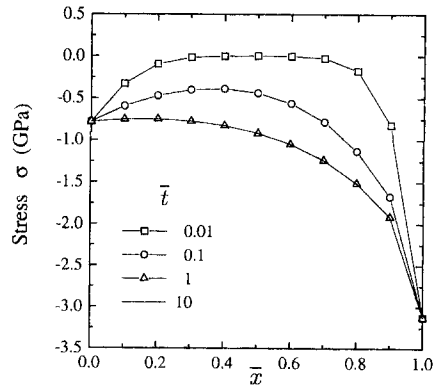


Fig. 8 The temperature variations for $M=10$ and $R=2$ of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

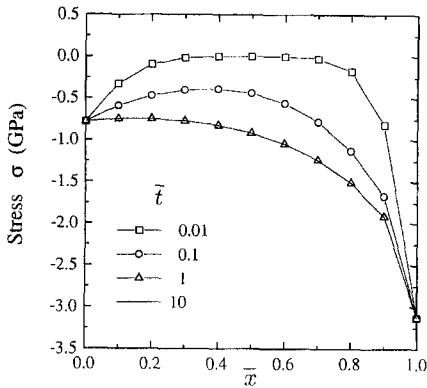


Fig. 9 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=0.1$ and $R=1$

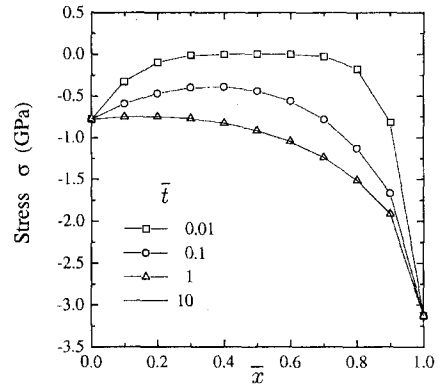


Fig. 12 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=1$ and $R=3$

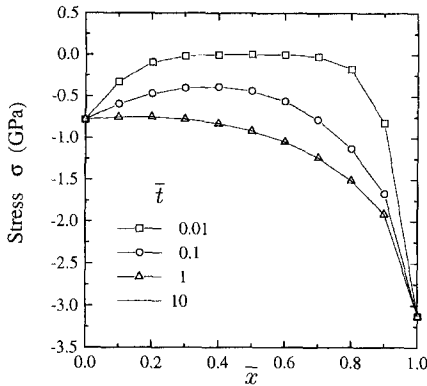


Fig. 10 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=0.1$ and $R=2$

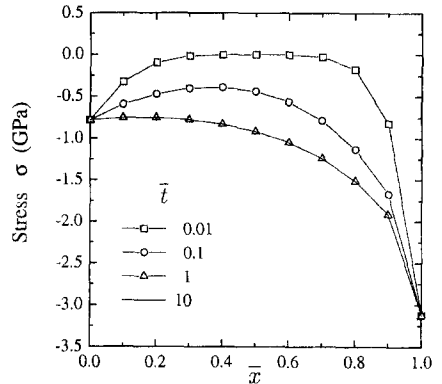


Fig. 13 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=10$ and $R=1$

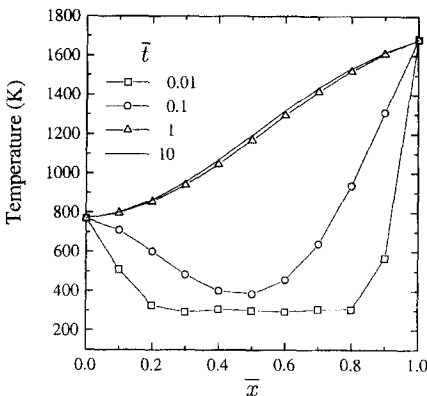


Fig. 11 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=1$ and $R=1$

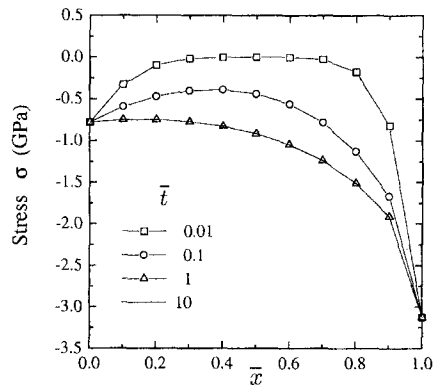


Fig. 14 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t} for $M=10$ and $R=2$

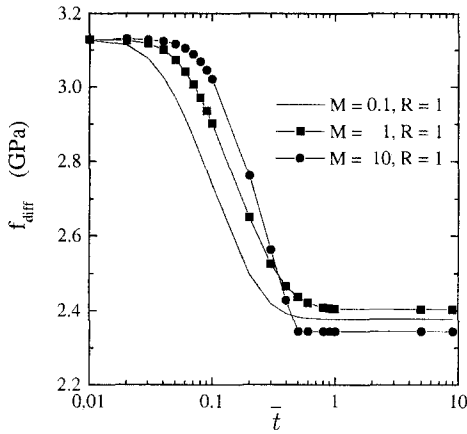


Fig. 15 The stress variations of the plate along the dimensionless location, \bar{x} versus the dimensionless time, \bar{t}

$\bar{t}=1$ 정도될 때 1차원 경사기능재료의 무한 평판에 있어서 온도분포가 정상상태에 도달함을 알 수 있다. 그리고 기공률이 많아짐에 따라 세라믹쪽에 가까운 위치에서 온도가 높은 경향을 보이고 있다.

3.2 비정상 열응력분포

2.4절에서 언급한 바와 같이 부록 A에서 체적분율과 기공률에 영향을 주는 M 과 R 에 따른 신장구속, 곡률구속의 경우에 대한 비정상 열응력을 계산하였다.

다음의 그림은 부록 A에서 M 과 R 의 변화에 따른 Alternative Green 함수를 사용하여 구한 비정상 온도분포 해를 가지고 2.4절에서 구한 응력식, 식 (37)을 사용하여 비정상 응력분포를 구하였다.

Fig. 9~Fig. 14에서 보는 바와 온도분포에서와 마찬가지로 무차원 시간 $\bar{t}=1$ 정도되는 시간에 정상상태에 도달함을 알 수 있다. 신장구속, 곡률구속의 역학적 경계조건을 이용함으로써 체적분율과 기공률의 변화에도 $\bar{x}=0$ 와 $\bar{x}=1$ 인 지점에서 응력이 고정되어 있으며, 모든 시간에 따라 압축응력이 작용하고 있음을 알 수 있다. 그리고 기공률이 많아짐에 따라 정상상태에서의 응력분포가 곡선을 이루고 있음을 알 수 있다.

Fig. 15는 체적분율과 기공률에 따른 응력의 크기, 식 (38)을 이용하여 각 시간에 따른 f_{diff} 를 구하였다. 그림에서 보는 바와 같이 체적분율과 기공률의 M 과 R 에 따른 변화가 있는 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

Green 함수를 사용하여 열 및 기계적 물성치가 점진적인 변화를 갖고 기공률을 포함하는 Ti-6Al-4V와 ZrO_2 로 이루어진 1차원 무향평판의 경사기능재료를 해석한 결과는 다음과 같다.

(1) Green 함수를 사용하여, 기공률이 존재하는, 위치에 따라 물성치가 연속적으로 변하는 열응력 완화형 재료인 경사기능재료에 대하여 온도분포 및 신장구속, 곡률구속인 경우의 역학적 경계조건에 대한 응력분포를 계산하는데 해석적인 방법을 제시하였다.

(2) 서론에서 언급한 바와 같이 이 전의 연구에서 볼 수 있었던 섭동이론이나 Laplace 변환법을 사용하지 않고 적분해를 이용하여 비정상 온도분포 및 열응력분포 해를 유도할 수 있다.

(3) 해석적인 방법을 사용함으로써 온도 및 열응력분포에 대한 해가 함수의 형태로 유도되기 때문에 원하는 지점과 시간에 대한 수치만 대입하면 간단히 그 지점의 온도 및 열응력을 구할 수 있다.

(4) 응력의 차이(f_{diff})를 이용하여 시간에 따른 응력의 완화를 알 수 있었다. 따라서 경사기능재료를 설계함에 있어서 체적분율과 기공률에 영향을 주는 인자 M 과 R 을 결정짓는데, 본 연구에서 제시한 응력의 차이(f_{diff})는 하나의 설계인자가 될 수 있으리라 기대된다.

(5) 본 연구에서 고려한 신장구속, 곡률구속인 역학적 경계조건인 경우를 생각해 볼때, 상대적으로 초기시간에 가까운 부분에서, 즉 $0.1 < \bar{t} < 1$ 인 시간에 응력이 급격한 변화가 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 1996년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 ME 96-C-03)에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Obata, Y. and Noda, N., 1904, "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Mate-

- rial," *J. of Thermal Stresses*, Vol. 17, pp. 471~487.
- (2) Saito, T., Ueda, S., Sakuranaka, N., Wakamatsu, Y., Niino, M., Nomura, T., Yamaoka, I. and Kiyoto, S. I., 1993, "Application of Functionally Gradient Materials to Scramjet Engines," *8th International Symposium on Air Breathing Engines*, Tokyo, Japan, Vol. 1, pp. 662~669.
- (3) Wakamatsu, Saito, T., Ueda, S. and Niino, M., 1993, "Development of a Thermal Shock Evaluation Device for Functionally Gradient Materials for Aerospace Applications," *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Thermal Shock and Thermal Fatigue Behavior of Advanced Ceramics*, pp. 555~565.
- (4) Erdogan, F. and Wu, B.H., 1996, "Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses," *J. of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 237~265.
- (5) Jin, Z. H. and Batra, R. C., 1996, "Stress Intensity Relaxation at the Tip of an Edge Crack in a Functionally Graded Material Subjected to a Thermal Shock," *J. of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 317~339.
- (6) 송준희, 임재규, 1996, "경사기능성 세라믹/금속 복합재료의 열충격특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제7호, pp. 213~2140.
- (7) 小畑良洋, 野田直剛, 1993, "傾斜機能平板の非定常熱應力(一次元非定常溫度場の解析)," *日本機械學會論文集*, A編, 59卷, 560號, pp. 208~214.
- (8) Tanigawa, Y., Akai, T., Kawamura, R. and Oka, N., 1996, "Transient Heat conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties," *J. of Thermal Stresses*, Vol. 19, pp. 77~102.
- (9) 최덕기, 김창수, 1996, "Green 함수를 사용한 열응력 완화재료에 관한 해석적 연구," 대한기계학회 추계학술대회 논문집, A, pp. 85~90.
- (10) Beck, J. V., 1984, "Green's Functions Solution for Transient Heat Conduction Problems," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, No. 8, pp. 1235~1244.
- (11) Haji-Sheikh, A. and Mashena, M., 1987, "Integral Solution of Diffusion Equation: Part 1-General Solution," *ASME, J. of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 551~556.
- (12) Haji-Sheikh, A., 1988, "Heat Diffusion in Heterogenous Bodies Using Heat-Flux-Conserving Basis Functions," *ASME, J. of Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 276~282.
- (13) Choi, D. K., 1995, "A Study on Thermal Characteristics of Fiber-Reinforced Composites by Analytical Method," *J. of the Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 22, No. 6, pp. 77~85.
- (14) Choi, D. K. and Nomura, S., 1996, "Micromechanical Study of Particulate Reinforced Composites," *Proceedings of the ASME Aerospace and Materials Divisions*, AD-Vol. 51/MD-Vol. 73, pp. 33~38.
- (15) 野田直剛, 迂知章, 1991, "傾斜機能平板の定常熱應力," *日本機械學會論文集*, A編, 57卷, 533號, pp. 98~103.
- (16) 小畑良洋, 野田直剛, 1992, "傾斜機能平板の定常熱應力(力學的境界條件の影響)," *日本機械學會論文集*, A編, 58卷, 553號, pp. 159~165.

부 록

열 및 기계적 물성치

열응력 완화형 경사기능성재료로서, 내열, 단열재료로 우수한 지르콘늄 세라믹(ZrO_2)과 가볍고, 고강도의 Ti-6Al-4V로 된 재료를 사용하였다. 기공률을 포함한 경사기능성재료의 열 및 기계적 물성치는 다음과 같은 함수의 형태로 나타나게 된다.⁽¹⁶⁾

$$V_m = (1 - \bar{x})^M$$

$$V_c = 1 - V_m(\bar{x})$$

$$S = R\bar{x}(1 - \bar{x}) \quad (0 \leq R < 4)$$

여기서, $V_m(\bar{x})$ 은 금속체적분율, $S(\bar{x})$ 는 기공률로서 M 과 R 에 따라 모든 물성치는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}
k(\bar{x}) = & \left[\left(1 - (R\bar{x}(1-\bar{x}))^{1/3} \right) \right. \\
& \left. / \left\{ k_c + 3k_c(k_m - k_c)(1-\bar{x})^M / \{3k_c + (k_m - k_c) \cdot (1 - (1-\bar{x})^M)\} \right\} + (R\bar{x}(1-\bar{x}))^{1/3} \right. \\
& \left. / \left\{ \left(1 - (R\bar{x}(1-\bar{x})) \right)^{2/3} \left\{ k_c + 3k_c(k_m - k_c) \times ((1 - (1-\bar{x})^M) / \{3k_c + (k_m - k_c)(1 - (1-\bar{x})^M)\}) \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + (R\bar{x}(1-\bar{x}))^{2/3} k_a \right\} \right]^{-1} \tag{A1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_p(\bar{x}) = & \left\{ (C_{pm}\rho_m((1-\bar{x})^M) + C_{pc}\rho_c(1 - (1-\bar{x})^M)) / (\rho_m((1-\bar{x})^M) + \rho_c(1 - (1-\bar{x})^M)) \right\} \\
& \times (\rho_m((1-\bar{x})^M) + \rho_c(1 - (1-\bar{x})^M)(1 - R\bar{x}(1-\bar{x})) C_{pa}\rho_n R\bar{x}(1-\bar{x})) \\
& / \left\{ (\rho_m(1-\bar{x})^M + \rho_c(1 - (1-\bar{x})^M))(1 - R\bar{x}(1-\bar{x})) + \rho_a R\bar{x}(1-\bar{x}) \right\} \tag{A2}
\end{aligned}$$

$$\rho(\bar{x}) = \{\rho_m(1-\bar{x})^M + \rho_c(1 - (1-\bar{x})^M)\}(1 - R\bar{x}(1-\bar{x})) + \rho_a R\bar{x}(1-\bar{x}) \tag{A3}$$

$$\begin{aligned}
E(\bar{x}) = & \left\{ E_c \left\{ E_c + (E_m - E_c)((1-\bar{x})^M)^{2/3} \right\} \right. \\
& \left. / \left\{ E_c + (E_m - E_c) \left(((1-\bar{x})^{M2/3} - (1-\bar{x})^M) \right) \right\} \right\} \times (1 - R\bar{x}(1-\bar{x})) \\
& / \left[1 + R\bar{x}(1-\bar{x})(5 + 8\nu(\bar{x}))(37 - 8\nu(\bar{x})) / \{8(1 + \nu(\bar{x}))(23 + 8\nu(\bar{x}))\} \right] \tag{A4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\bar{x}) = & \left\{ \alpha_m(1-\bar{x})^M E_m / \{2(1 - \nu_m)\} + \alpha_c \nu_c E_c / \{2(1 - \nu_c)\} \right\} \\
& / \left\{ (1-\bar{x})^M E_m / \{2(1 - \nu_m)\} + (1 - (1-\bar{x})^M) E_c / \{2(1 - \nu_c)\} \right\} \tag{A5}
\end{aligned}$$

$$\nu(\bar{x}) = \nu_m(1-\bar{x})^M + \nu_c(1 - (1-\bar{x})^M) \tag{A6}$$

여기서, 첨자 c 와 m 은 세라믹과 금속을 의미한 비열, $E(\bar{x})$ 는 탄성계수, $\alpha(\bar{x})$ 는 열팽창계수, ν 다. $k(\bar{x})$ 는 열전도계수, $\rho(\bar{x})$ 는 밀도, $C_p(\bar{x})$ 는 (\bar{x}) 는 푸아송비, 첨자 a 는 공기를 의미한다.