〈논 문〉

탄성 기계시스템에서의 효율적인 좌표분할법 선정에 관한 연구

김 외 조* · 유 완 석**

(1997년 1월 15일 접수)

Selection of Efficient Coordinate Partitioning Methods in Flexible Multibody Systems

Oe-Jo Kim and Wan-Suk Yoo

Key Words: Flexible Multibody System(탄성다물체계), Modal Coordinates(모드좌표), Coordinate Partitioning(좌표분할), LU Decomposition(LU분할), QR Decomposition (QR분할)

Abstract

In multibody dynamics, differential and algebraic equations which can satisfy both equation of motion and kinematic constraint equation should be solved. To solve these equations, coordinate partitioning method and constraint stabilization method are commonly used. In the coordinate partitioning method, the coordinates are divided into independent and dependent coordinates. The most typical coordinate partitioning method are LU decomposition, QR decomposition, and SVD (singular value decomposition). The objective of this research is to find an efficient coordinate partitioning method in the dynamic analysis of flexible multibody systems. Comparing two coordinate partitioning methods, i. e. LU and QR decomposition in the flexible multibody systems, a new hybrid coordinate partitioning method is suggested for the flexible multibody analysis.

I. 서 론

여러 물체로 이루어진 계의 동적 거동을 다루는 다물체동역학은 우주선의 동역학 해석, 기계시스템 동역학 및 차량동역학 분야 등에서 광범위하게 응용되고 있다. 최근의 기구들은 정밀도와 고속화 및 에너지 관점에서 경량화 부재가 요구되며, 이러한 요소에서 탄성효과를 배제하면 실제의 결과와는 다른 결과를 가져올 수 있으므로 보다 정확한 계의 해석을 위해서는 부재의 탄성변형효과를 고려하여야 한다.

탄성체동역학 해석에 있어서 변형을 나타내기 위해 사용되는 좌표로는 복잡한 탄성기구의 운동방정식을 효과적으로 해석하는 유한요소법에 기초한 방법으로서 상대적으로 적은 좌표수를 사용하는 모드좌표계[1,2]가 널리 사용된다. 이 방법에서는 고차 고유진동수를 고려하지 않는 경우 컴퓨터 실행시간이 짧아져서 절점좌표에 비해 효율성을 갖는다.

다물체계에 대한 운동방정식을 유도할 때 좌표계의 선택에는 절대좌표계(cartesian coordinate system)와 조인트좌표계(joint coordinate system)의 2가지로 크게 구분된다. 절대좌표계를 사용하는 경우 운동방정식의 유도가 편리한 점이 있으나, 적분시간 및 구속식을 만족시키기 위한 계산시간이 길어지는 비효율성이 있다. 반면, 조인트좌표[3]를 이용하는 경우는 최소의 미분방정식 및 대수방정식을

*부산대학교 대학원 기계공학부
**회원, 부산대학교 기계공학부

얻게되므로 효율적인 수치적분을 할 수 있으나, 운동방정식의 유도가 복잡하고 구속식을 일반화하는데 어려움이 따른다.

이러한 다물체동역학에서 각각의 물체는 운동방정식 뿐만 아니라 조인트 연결부위에서 기구학적 제한조건(구속조건)을 만족시켜야 하므로, 다물체 동역학에서는 미분방정식과 대수방정식이 연립된 미분-대수방정식을 만들게 되며, 이 방정식은 상미분방정식의 해법을 그대로 적용할 수 없다. 예측-수정자법(predictor-corrector method)과 같은 잘 알려진 상미분방정식 해법을 적용하기 위해서는 동역학 해석 알고리듬 속에 구속조건을 만족시키도록 하는 과정이 필수적으로 있어야만 한다. 이러한 구속조건을 만족시키기 위하여 좌표를 독립좌표와 종속좌표로 분할한 뒤, 매시간마다 구속조건을 만족하도록 종속좌표의 값을 수정하는 좌표분할법이 많이 이용되고 있다.

좌표의 분할방법으로는 Wehage[4]가 사용한 LU decomposition, Kim[5]이 사용한 QR decomposition, Mani[6]가 사용한 SVD(singular value decomposition), Liang[7]이 사용한 Gram-Schmidt법 등이 있다. 이들 방법중에서 LU와 QR이 효율성이 있는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 절대좌표계를 사용하는 경우 탄성효과를 고려한 자코비안 행렬에 LU, QR 등의 좌표분할법을 적용하고, 컴퓨터의 효율성과 해의 정확성을 비교 분석하고, 두 방법의 장점을 동시에 취하는 혼합좌표분할법을 제안하고자 한다. 제안된 알고리듬을 적용한 컴퓨터 프로그램을 구성하여, 탄성체의 예제에 대하여 혼합좌표분할법을 적용하여 알고리듬의 유용성을 확인하였다.

2. 이론해석

2.1 탄성체를 가지는 시스템의 운동방정식[1]

n개의 일반좌표와 k개의 모드좌표의 조합으로 표현되는 탄성체 시스템 전체의 일반좌표는 다음식과 같이 표현된다.

$$q=[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k] \tag{1}$$

계에 m개의 서로 독립인 구속조건이 발생하는 경우의 구속식은 다음과 같다.

$$\Phi(q,\ t)=[\Phi_1(q,\ t),\ \cdots,\ \Phi_m(q,\ t)]=0 \tag{2}$$

구속식을 가지는 탄성체계의 라그랑지방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)^T-\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^T+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)^T+\Phi_q^T\lambda=F \tag{3}$$

여기서, T는 물체의 운동에너지를 나타내고, U는 전체 변형에너지를 나타내며, F는 물체에 작용하는 외력항이다. Φ_q는 오일러-파라메터 구속식을 포함하는 자코비안행렬을 나타낸다. 식 (3)의 각 항을 정리하면, 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$M\ddot{q}+\Phi_q^T\lambda=F \tag{4}$$

여기서, M은 시스템 전체의 질량행렬이고, λ는 라그랑지곱수를 나타내며, 각 항에 대한 상세한 유도과정은 참고문헌 (1)에 잘 나타나 있다. 또한 식 (2)를 시간에 대해 두번 미분한 가속도식과 식 (4)를 연립하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F \\ -2\Phi_{qt}\dot{q}-(\Phi_q\dot{q})_q-\Phi_{tt} \end{bmatrix} \tag{5}$$

본 연구에서는 다단계해법인 예측-수정자법(predictor-corrector method) 인 DE[12] 루틴을 이용하여 수치적분을 수행하였다. 이 알고리듬은 Adams-Bashforth 방법을 개형다단계법으로 사용하고 Adams-Moulton 방법은 폐형다단계법으로 사용한다.

2.2 LU 좌표분할법을 이용하는 경우의 운동방정식 해법[1, 4]

구속조건의 자코비안이 완전 행차수(full row rank)를 가지면, 자코비안을 LU 분리를 하여 다음과 같은 행렬형태로 만들 수 있다.

$$\Phi_q=\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & U & \\ & & R \\ L & & \end{bmatrix}$$

계 전체의 일반좌표중에서 독립좌표성분을 v, 종속좌표성분은 u라 두면, 위의 행렬분할중에서 행렬 L과 U는 종속좌표성분 u를 R은 독립좌표성분 v를 나타내며, 자코비안은 다음과 같은 형태로

최종 분할될 수 있다.

$$\Phi_q=[\ \Phi_u\ \ \Phi_v\ ] \tag{6}$$

여기서, $\Phi_u=LU$이며, $\Phi_v=LR$이다. 독립좌표 v를 알고 있으면, 종속좌표 u는 구속식의 비선형 방정식 해법인 Newton-Raphson법 등을 도입하여 독립좌표는 고정하고, 다음식을 이용해서 종속좌표 성분을 구한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_v \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\Phi \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u^{i+1}=u^i+\Delta u \tag{7}$$

여기서, i는 반복회수를 나타낸다.

속도벡터 $\dot{q}$ 또한 독립속도벡터 $\dot{v}$와 종속속도벡터 $\dot{u}$으로 분할할 수 있다. 식 (2)를 시간에 대해 한번 미분하면, 다음 속도방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_v \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\Phi_t \\ \dot{v} \end{bmatrix} \tag{8}$$

모든 일반좌표의 위치와 속도를 알고 있을 때 가속도와 라그랑지곱수는 식 (5)에 의해서 구할 수 있다. 구해진 가속도성분을 다단계해법인 예측-수정자법을 사용하여 수치적분을 수행한다. 즉, $\dot{v}$와 $\ddot{v}$성분을 적분하면 다음단계의 v와 $\dot{v}$성분을 구할 수 있고, 구해진 독립좌표성분에 식 (7), 식 (8)을 적용하여 u 및 $\dot{u}$를 최종 시간까지 반복적으로 계산한다. 이 방법은 모든 좌표를 적분하는 방식에 비해 독립좌표만으로 적분을 수행하므로 모든 좌표를 적분하는 것보다 효율성이 있다.

2.3 QR 좌표분할법을 이용하는 경우의 운동방정식 해법[5]

일반적으로 완전 행차수를 가지는 자코비안행렬에 대하여 수직행렬 Q와 상위 삼각행렬 R의 형태로 다음과 같이 분할할 수 있다.

$$\Phi_q^T=QR \tag{9}$$

또한 수직행렬은 다음과 같은 형태로 분할된다.

$$Q=[\ Q_1\ \ Q_2\ ] \tag{10}$$

속도관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{q}=[\hat{Q}_1\ \ \hat{Q}_2]\begin{bmatrix} b \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서, $b=-\Phi_t(q,\ t)$이며, $\dot{z}$는 구속조건의 접평면성분과 평행한 자유변수벡터이고, $\hat{Q}_1=Q_1(\Phi_qQ_1)^{-1}$, $\hat{Q}_2=Q_2-\hat{Q}_1\Phi_qQ_2$이다.

가속도관계식을 구하기 위해서 식 (11)을 시간에 대하여 미분하면 다음식을 얻는다.

$$\ddot{q}=[\hat{Q}_1\ \ \hat{Q}_2]\begin{bmatrix} a \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서, $a=-\dot{\Phi}_q\dot{q}-\dot{\Phi}_t$이다.

식 (7)의 계 전체 운동방정식을 상태공간형태로 표현하기 위해 $\hat{Q}^T$를 전방곱셈하고, 식을 재구성하면 다음과 같은 독립가속도벡터로 표현되는 새로운 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{z}=M_{11}^{-1}\hat{Q}_2^T(F-M\hat{Q}_1a) \tag{13}$$
$$\lambda=\hat{Q}_2'^T(M\ddot{q}-F) \tag{14}$$

여기서, $M_{11}=\hat{Q}_2^TM\hat{Q}_2$이다.

식 (13)을 이용하여 $\ddot{z}$을 구하면, 식 (12)으로부터 $\ddot{q}$를 구할 수 있고, 식 (14)으로부터 λ를 계산할 수 있다. 또한 $\ddot{z}$을 적분하면 독립속도벡터 $\dot{z}$을 얻을 수 있고, 식 (11)으로부터 $\dot{q}$를 구할 수 있다. 다시 $\dot{q}$를 적분하여 비선형방정식 해법을 도입하면 q를 구할 수 있다.

위와 같은 상태방정식 형태로 운동방정식의 수를 줄이게 되면, 가속도와 라그랑지곱수를 동시에 구하는 알고리듬에 비해 수치적 안정성이 높고, 최소한의 가속도만으로 방정식을 풀기때문에 효율성이 좋다. 또한 매시간 구속조건의 접평면을 따라 가속도를 적분하기 때문에 구속식의 위배가 최소로 되는 장점을 가진다.

3. 좌표분할법의 비교

본 연구에서는 특이구간을 가지는 시스템에 대하여 두 가지의 좌표분할기법을 사용해서 최대 허용적분간격의 변화 및 수치해의 허용오차에 따른 두 방법의 장단점을 비교하여 효율적이고 정확한 혼합좌표분할법을 제안하는 자료로 삼고자 한다. 또한 모드좌표의 선택 수에 따라서 두 방법의 장단점을 비교 분석하였다. 예제로 사용된 시스템은 4절기구로서 초기 각도가 10^0 기울어진 상태로 시뮬레이션을 수행한다. 그 이유는 각각의 기구가 수평상태에 도달하면 특이구간이 형성되고 특이구간에서 많은 시뮬레이션이 이루어지는 악조건이 고려되기 때문이다. 전체 기구의 개략도는 Fig. 1과 같다. 이 기

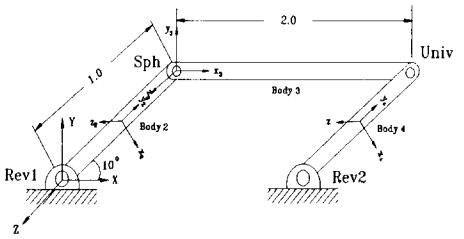

Fig. 1 Schematic diagram of 4-bar linkage

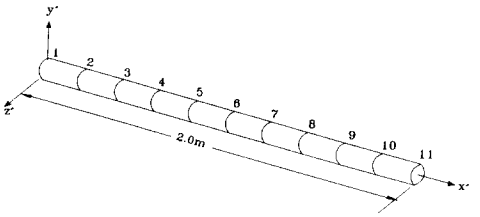

Fig. 2 Finite element model of the coupler

구는 초기상태로부터 자유낙하하여 0.18초가 경과되면 거의 수평이 되는 첫번째 특이구간에 도달하게 되고, 1.0초 정도 경과하면 두번째 특이구간에 도달한다.

Fig. 1에서 3번 물체인 커플리를 탄성체라 가정하고, 그 유한요소 모델은 모두 10개의 요소와 11개의 절점을 가지는 것으로 가정하였다. 그 개략도는 Fig. 2에 표시하였다.

사용된 재료의 물성치는 Table 1과 같다.

3.1 최대 허용 적분간격의 변화에 따른 좌표분할법의 비교

최대 허용 적분간격의 변화에 따른 특이구간을 가지는 시스템의 동적거동의 변화를 보기 위해 해의 허용오차를 1E-5으로 고정하고, 최대 적분간격을 case 1 : 1E-5, case 2 : 5E-5, case 3 : 1E-4, case 4 : 5E-4의 4가지 조건에 대하여 시뮬레이션을 수행하여 변화를 해석하였다.

먼저 LU 좌표분할법을 이용하는 경우에서는 case 1, case 2, case 3의 경우에는 0.18초에서 시뮬레이션이 중지되었다. Fig. 3은 각 경우에 대한 커플러의 수직방향의 가속도를 표시하였다. case 1,

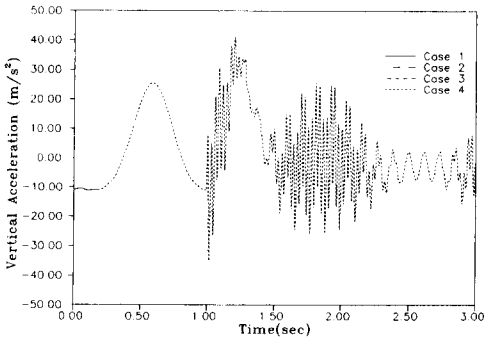

Fig. 3 Vertical acceleration of the couper (LU method)

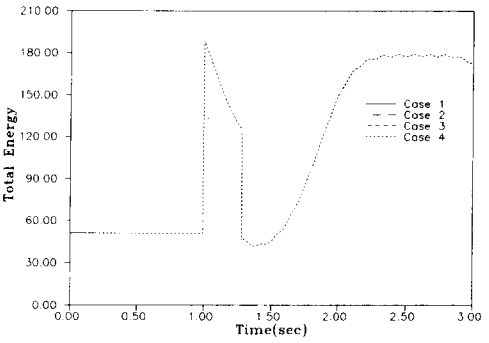

Fig. 4 Total energy of the system (LU method)

case 2, case 3의 경우 모두 첫번째 특이구간에서 모두 시뮬레이션이 중지되었고, case 4의 경우에는 시뮬레이션은 수행하였으나 두번째 특이구간에서 심한 불연속이 발생함을 알 수 있다. 약 1초 주위의 두번째 특이구간에서 가속도의 섭동이 발생하기 시작하여 이후의 시뮬레이션은 특이구간의 큰 가속도변화가 지속되면서 많은 탄성변형량과 함께 부정확한 결과를 보이고 있다.

Fig. 4에서는 각 경우에 대한 위치에너지와 운동에너지 그리고 탄성변형에너지의 합인 계 전체 에너지를 비교하였다. 본 연구의 예제는 보존계이므로 전체 에너지는 각 구간에 대하여 일정한 값으로 유지되어야 한다. 그러나 LU법을 사용할 경우에는 case 4의 경우에 두번째 특이구간에서 운동에너지

Table 1 Material properties of the coupler

Material	Density (Kg/m³)	Young's modulus (Pa)	Poisson's ratio
Copper	8.91E+03	117.0E+9	0.35

의 급격한 증가로 인하여 시스템 전체의 에너지는 급속히 증가하는 부정확한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

이에 비해 QR 좌표분할법을 이용하는 경우에서는 case 2, case 3, case 4의 경우에 있어서 만족할만한 결과를 얻을 수 있었지만, case 1은 첫번째 특이구간에서 시뮬레이션이 중지되었는데, 이는 과도한 적분공차로 인하여 적분이 중지된 것으로 판단된다. 커플러의 관성좌표계의 수직방향의 가속도를 나타낸 Fig. 5를 보면 case 2, case 3, case 4 모두 가속도의 발산없이 안정된 결과를 보여주며, 계 전체 에너지를 비교한 Fig. 6에서도 최대 허용 적분간격에 관계없이 모두 계 전체의 에너지는 보존되었다. 이상의 결과를 종합해 보면 특이구간을 가지는 시스템의 해석을 수행할 때 LU 분리법으로는 최대 허용 적분간격에 매우 영향을 많이 받으며, 적분간격이 비교적 엄격해지면 시뮬레이션을 수행하지 못하였고 수행되더라도 매우 부정확한 결과를 가져온다는 것이다. 이에 비해 QR 분리법으로 적분을 수행하게 되면 비교적 적분간격에 대하여 강인한 안정성을 가지고 있음을 알 수 있다. 이는 QR법을 이용하여 구속조건의 접평면을 매순간마다 개선하는 알고리듬 자체의 잇점인 것으로 판단된다.

3.2 해의 허용오차의 변화에 따른 좌표분할법의 비교

탄성체의 해석에서는 강체계의 물리적인 좌표와 모드좌표를 혼합하여 수치해석을 수행하므로 물리좌표계에 비해 상대적으로 미소한 탄성변형을 구하기 위해서는 매우 작은 허용오차(solution tolerance)를 두는것이 일반적이다. 본 예제에서는 수치해의 허용오차의 변화에 따른 응답특성을 특이구간을 가지는 문제로 해석하고 두 좌표분할법을 비교하고자 한다. 최대 허용 적분간격은 5E-4로 고정하고, 허용오차를 case 1 : 1E-6, case 2 : 5E-6, case 3 : 1E-5, case 4 : 5E-5의 4가지 조건에 대하여 시뮬레이션을 수행하여 변화를 해석하였다.

Fig. 7에 커플러의 가속도를 표시하였다. Case 1에서는 첫번째 특이구간에서 시뮬레이션이 중지되

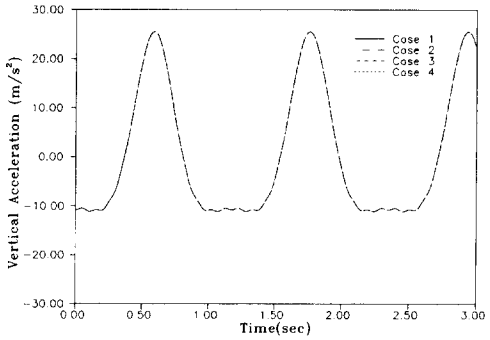

Fig. 5 Vertical acceleration of the coupler (QR method)

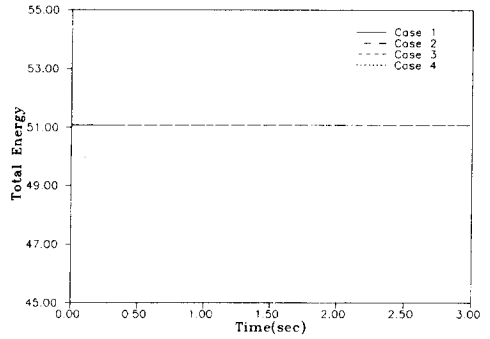

Fig. 6 Total energy of the system (QR method)

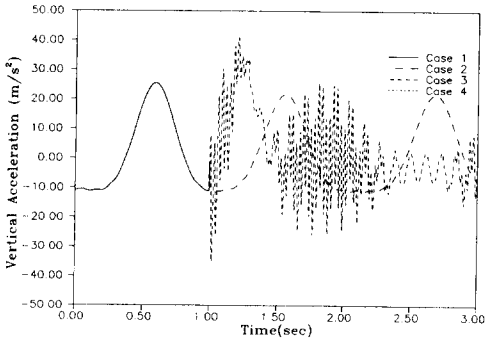

Fig. 7 Vertical acceleration of the coupler (LU method)

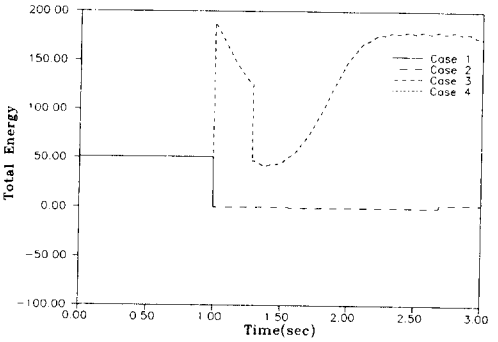

Fig. 8 Total energy of the system (LU method)

었고, case 2에서는 세번째 특이구간에서 발산하였으며, case 3에서는 두번째 특이구간에서 발산, case 4의 경우에는 두번째 특이구간에서 시뮬레이션이 중지되었다. 각 경우 모두 두번째 특이구간에서 매우 불안정한 가속도 섭동이 발생되고, 이로 인해 계 전체의 모든 요소들의 부정확성이 초래된다. Fig. 8에서는 각 경우에 대한 계 전체 에너지를 비교하였다. Case 1과 case 4의 경우에는 전체 에너지가 특이구간에서 0으로 떨어지며, case 2의 경우에는 첫번째 특이구간에서 급격한 에너지의 증가가 수반되며, 에너지가 4배정도 증가된 형태로 수렴하는 것을 볼 수 있다. case 3의 경우에는 첫번째 특이구간에서 에너지가 0으로 수렴했다 두번째 특이구간에서 다시 초기 에너지에 비해 매우 높은 위치에서 수렴하였다.

해의 허용오차를 조정함에 따른 QR법의 각 경우에 대한 해석의 결과는 모두 영향을 받지않는 것으로 확인되었다. Case 1, case 2, case 3, case 4의 모든 경우에 있어서 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다. 허용오차를 조정하게 되면 시뮬레이션 시간의 차이는 있지만 그 해의 정확도의 측면으로 볼 때, 본 예제에서는 탄성변형의 영향이 크지 않으므로 별 차이는 없었다.

이상의 결과를 종합해 보면 특이구간을 가지는 시스템의 해석을 수행할 때 LU 분리법으로는 해의 정확성이 엄격해짐에 따라서 시뮬레이션의 수행정도가 떨어지는 현상을 볼 수 있다. 탄성변형량의 영향을 유지하기 위해서는 해의 정확성을 엄격하게 유지해야 하는 탄성체 시스템의 해석에서는 다시 한번 LU법의 단점이 나타나는 것이다. 이에 비해 QR 분리법으로 적분을 수행하게 되면 비교적 해의 정확성이 유지되므로 허용오차에 큰 영향을 받지 않는다.

4. 혼합좌표분할법의 제안

위의 세 종류의 예제에서 특이구간을 가지는 기계시스템의 해석시 LU법을 이용하여 해석하는 것이 효율성 측면에서 좋으나 정확도의 측면에서는 QR법을 이용한 적분방법이 보다 정확한 결과를 준다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 QR법은 자코비안 역행렬의 연산, 운동방정식을 상태공간형태로 식을 소거하는 과정 등에서 많은 계산이 수반되므로 효율성 측면에서 LU법에 비해 매우 불리한 방법이다. 따라서 본 연구에서는 LU법과 QR법의 장점을 동시에 취하는 혼합좌표분할법(hybrid coordinate partitioning method)을 제안하고자 한다.

기존의 LU 좌표분할법을 이용하는 경우에 본 연구에서 예로 사용한 특이구간이 존재하는 메카니즘의 경우, 행렬의 조건수(condition number)가 상대적으로 갑자기 커지는 지점에 도달하면, 즉 특이구간에 도달하면 적분시간간격이 매우 줄어들 뿐만 아니라 새로운 독립좌표를 찾기 위해서 좌표분할을 계속 실시하게 된다. 이의 결과로 효율성 저하와 수치적인 오차가 점점 증가하여 결국 발산하는 결과를 초래하게 된다. 이에 반하여 QR법은 구속식의 영공간을 매시간 추적하면서 적분을 수행하므로 특이구간에서도 해의 수렴성이 LU법에 비하여 좋은 결과를 보인다.

본 연구에서는 이와 같은 LU법의 장점인 효율성과 QR법의 정확성을 동시에 취하기 위하여 전체구간 적분은 LU법으로 수행하면서 특이구간에서는 QR법을 사용하여 해의 안전한 수렴성을 보장해주고, 특이구간을 벗어나면 다시 LU법으로 적분을 수행하는 것으로 이루어진다. LU 분할법으로 적분을 수행할 때는 가속도 해석시에 많은 수의 선형연립방정식을 풀어야하므로 전체 행렬을 모두 사용하는 경우에는 적분시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 본 연구에서는 구속식의 자코비안행렬의 희박성(sparsity)이 크므로 희박행렬(sparse matrix)에 적합한 방법을 사용하여 선형방정식을 해석하는 것으로 하였다. 전체 적분과정은 아래와 같이 진행된다.

단계 1 : 먼저 주어진 초기조건들이 구속식들을 만족하는지 체크한다.

단계 2 : 자코비안행렬을 구하고, LU 분할법을 이용하여 독립좌표 및 독립속도 벡터를 계산한다.

단계 3 : 식 (7)을 이용하여 독립좌표는 고정하고 종속좌표성분을 Newton-Raphson법을 이용하여 반복적으로 계산한다. 수정자 단계일 경우 독립좌표의 선정여부를 체크한다. 그 기준은 적분간격이 이전 단계보다 줄어들거나 혹은 동일간격으로 5번 이상 지속될 때이다. 만약 독립좌표의 선정이 바뀌면 단계 2로 되돌아가서 다시 계산을 수행한다. 또한 이 과정에서 좌표분할법의 선택여부를 체크하게 된다. 그 기준은 짧은 시간간격동안 독립좌표의 선택이 지속적으로 자주 바뀌거나, 계 전체의 에너지의 요동이 현저해질 때 또는 적분간격이 이전 스텝

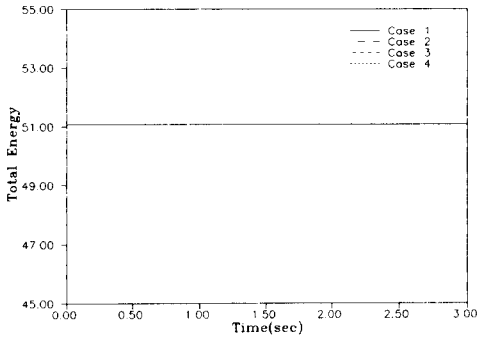

Fig. 9 Vertical acceleration of the coupler (QR method)

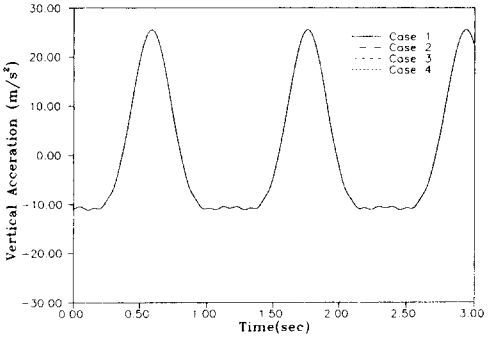

Fig. 10 Total energy of the system (QR method)

에서보다 현저히 줄어들 때 좌표분할법을 바꾸고 단계 8으로 간다.

단계 4 : 식 (8)을 이용하여 독립속도벡터에 대해서 종속속도벡터를 구한다.

단계 5 : 식 (5)를 이용하여 가속도와 라그랑지곱수를 구한다.

단계 6 : 가속도성분중 독립좌표성분인 $\ddot{v}$와 독립속도벡터 $\dot{v}$를 explicit/implicit Adams PECE 알고리듬을 사용하여 적분한다.

단계 7 : 최종 시간이 될 때까지 단계 3로 되돌아간다.

단계 8 : 좌표분할법을 LU법에서 QR법으로 바꾸어서 QR 좌표분리를 실시하여 수직행렬 Q_2, $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$를 계산하고 자코비안의 차수를 계산한다.

단계 9 : 독립좌표인 z는 고정하고, 다음식으로 위치를 Newton-Raphson 법으로 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_q \\ Q_2^T \end{bmatrix} \Delta q = \begin{bmatrix} -\Phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q^{i+1} = q^i + \Delta q, \quad i = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

단계 10 : 식 (11)을 이용하여 일반좌표의 속도를 계산한다.

단계 11 : 식 (13)을 이용하여 독립가속도인 $\ddot{z}$를 계산한다. 계산된 $\ddot{z}$를 이용하여 식 (12)를 풀면 $\ddot{q}$를 구할 수 있고, 식 (14)을 이용하여 라그랑지곱수인 λ를 계산한다.

단계 12 : QR 좌표분할에 대한 기준으로 $\alpha = \frac{z^T \dot{z}}{q^T \dot{q}}$ 관계식으로부터 자코비안을 다시 분할해야 할지를 결정한다. 만약 다시 분할하게 되면, 현재의 정보를 초기조건으로 하여 적분 을 다시 실시한다.

단계 13 : 수정자단계이고, 최대 허용 적분간격으로 5회 이상 적분이 연속적으로 수행되면, LU좌표분할을 실시한다. 이때 동일한 연속적으로 일정한 독립좌표가 채택되면, 다시 단계 2로 되돌아간다.

단계 14 : 구해진 $\dot{q}$와 $\ddot{z}$를 explicit/implicit Adams PECE 알고리듬을 사용하여 적분한 뒤 최종 시간까지 단계 9로 되돌아가 반복적으로 적분을 수행한다.

효과적인 좌표분할법의 선택기준은 먼저, 독립좌표를 정하는 과정에서 짧은 시간간격동안 독립좌표의 선택이 지속적으로 자주 바뀌거나, 계 전체의 에너지의 요동이 현저해질 때 또는 적분간격이 이전 스텝에서보다 현저히 줄어들 때 수치적인 안정성이 좋은 QR 분할법으로 바꾼다. 다시 QR법에서는 최대 허용 적분간격의 크기로 연속해서 적분을 수회 실시한 뒤, 다시 LU법을 사용하여 독립좌표의 선택을 실시하여 독립좌표의 선택이 연속적으로 보장되는 경우에 QR법을 벗어난 뒤 LU법으로 되돌아와 다음 시간이후로 적분을 계속 수행한다. 일반적으로 LU법으로 운동방정식을 풀때 시스템이 특이구간에 들어오면 자코비안행렬의 성질이 매우 좋지 않게 된다. 이 자코비안행렬과 질량행렬을 합쳐 미분-대수방정식을 풀게 되는데 작은 량의 일반력벡터의 변화에 대하여 가속도의 결과는 매우 불안한 시스템으로 변한다. 이에 비해 QR법은 계의 자유도 수만큼 방정식을 줄여서 사용하기 때문에 앞의 LU법과 같은 애로점은 피할 수 있다. 하지만 QR법의 가장 큰 약점은 효율성 측면에서 LU법에 뒤진다는 점이다. 따라서, 절대좌표계로 유도된 운동방정식의 해석의 경우 자코비안행렬의 크기가 커지면 QR법은 상대적으로 더욱 효율성 측면에서 뒤진다. 그러나 QR법은 구속식의 접평면을 따라서

지속적으로 구속력을 발생시키므로 해의 발산이 적고, 적분이 안정적으로 진행된다. 이 두 적분법의 적절한 조합을 할 수 있다면 LU법의 효율성과 QR법의 안정성을 동시에 얻을 수 있다.

4.1 강체예제

채택한 시스템은 앞의 4가지 경우의 예제에 사용된 4절 기구를 그대로 사용하기로 한다. 해석에서 사용된 최대 허용 적분간격은 0.01초, 해의 만족도는 0.0001로 하였다. Fig. 11은 커플러의 수직방향 가속도를 나타내는 그림이다. Case 1은 LU법으로만 해석한 그림이고, case 2는 QR법으로만 적분한 것이다. 또한 case 3은 LU-QR 혼합법을 이용하여 해석을 수행한 것이다. 그림에서 보면 두번째 특이구간에서 LU법은 가속도의 큰 불연속이 생겨 이후 거동은 정해와 크게 벗어난 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 그러나, QR법과 혼합법은 정확히 서로 일치함을 알 수 있다. Fig. 12는 커플러의 수직방향의 변위를 표시한 것인데, 두번째 특이구간에서 위치에너지가 증가하는 쪽으로 오히려 상승되는 결과를 보이고 있지만 혼합법의 경우는 해의 발산이 없이 적분이 원활히 수행되고 있음을 볼 수 있다. 각 경우의 적분간격을 나타낸 Fig. 13에서 보면 LU법을 사용하는 경우에는 특이구간에서 간격이 급격히 줄어들고 있음을 확인할 수 있다. 이는 원활한 독립좌표의 선정이 이루어지지 않는 상황이 계속되면서 오차가 급격히 누적되다 특이구간을 벗어나게 된다. 이후 그 상태로 적분이 수행되다 다시 특이구간을 만나면서부터 적분간격이 줄어드는 현상을 볼 수 있다. 이에 비해서 QR법은 비특이구간에서 적분간격이 줄어드는 현상이 나타나는데 이 상태에서 QR 좌표분할을 다시 실시하여 적분을 계속 수행한다. 혼합법에서는 두 방법의 평균치 정도의 간격변화가 발생하였다. 적분간격의 변화는 효율성과 직결되는 문제이므로 적분간격의 변화추이를 개선하는 것이 효율적인 알고리듬이 추구하는 방향이다. 따라서 본 예제에서는 혼합법의 효율성을 가름할 수 있다. Fig. 14에서는 계 전체의 에너지를 비교하였다. LU법은 특이구간에서 큰 에너지 증가가 수반되면서 이후의 거동은 믿을 수 없는 현

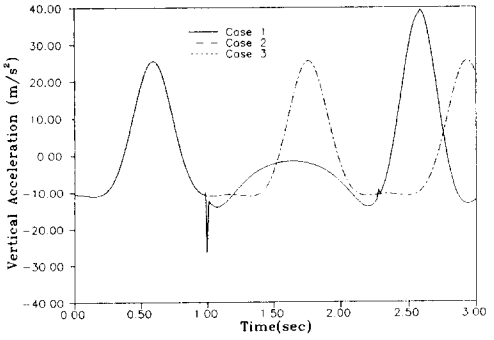

Fig. 11 Vertical acceleration of the coupler (LU method)

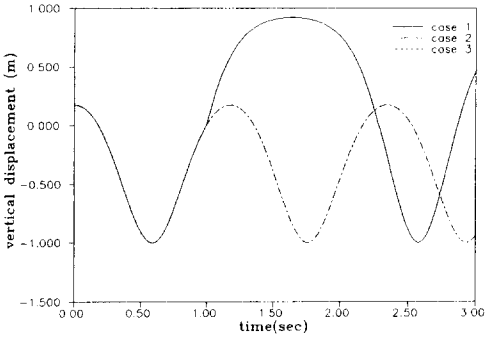

Fig. 12 Total energy of the system (LU method)

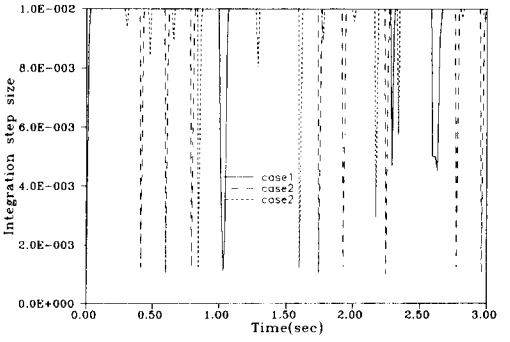

Fig. 13 Vertical acceleration of the coupler (QR method)

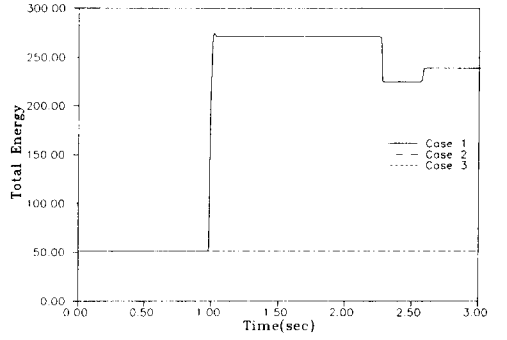

Fig. 14 Total energy of the system (QR method)

Table 2 Comparison of CPU times

	LU method	QR method	Hybrid method
CPU time(secs)	2.307147	9.366149	6.803332

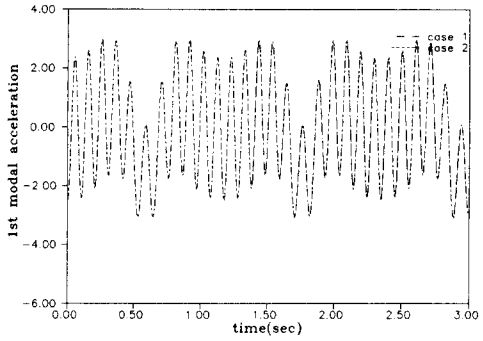

Fig. 15 Acceleration of the first modal coordinate

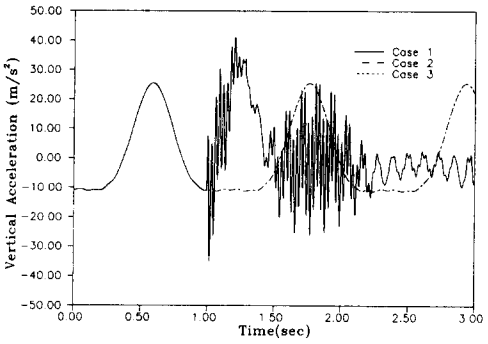

Fig. 18 Vertical acceleration of the coupler

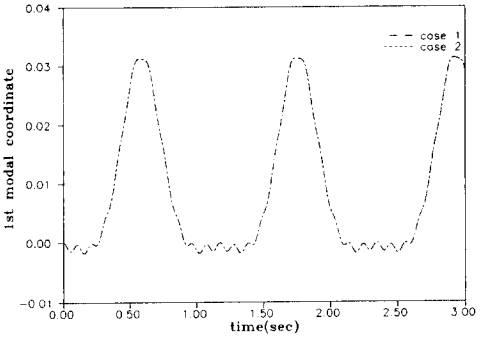

Fig. 16 Displacement of the first modal coordinate

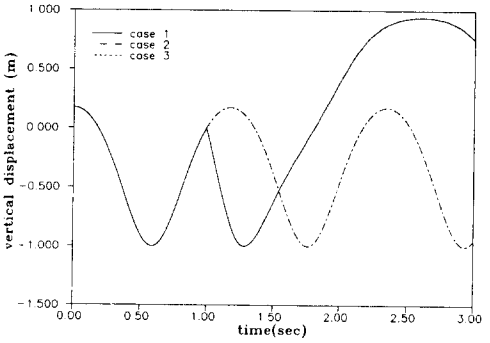

Fig. 19 Vertical displacement of the coupler

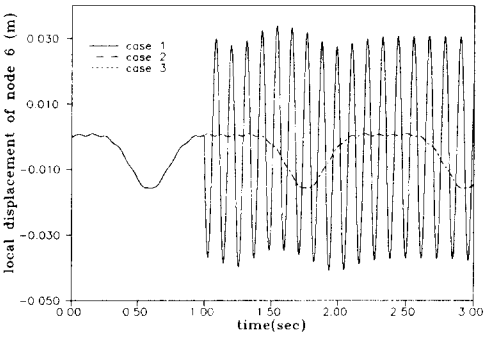

Fig. 17 Local displacement of node 6

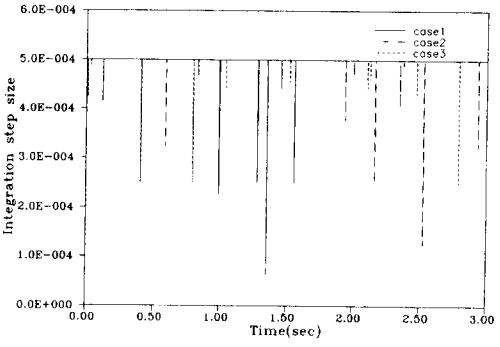

Fig. 20 Comparison of the integration step size

Table 3 Comparison of CPU times

	LU method	QR method	Hybrid method
CPU time(secs)	50.3666	194.6513	114.0455

상을 보이고 있다.

본 예제를 R10000 CPU를 장착한 INDIGO 2 워크스테이션에서 시뮬레이션을 수행하였을 때 각 방법의 CPU 사용시간을 Table 2에 표시하였다.

Table 2에서 알 수 있는 바와 같이 LU법으로 해석하면 해의 정확성만 보장된다면 가장 바람직한 결과를 줄 수 있을 것으로 사료되나, 본 예제와 같은 특이구간이 존재하는 시스템에서는 보다 정확성이 보장되는 QR법을 동시에 사용하게되면 효율성은 두 방법의 평균값 정도의 위치에서 이루어지지만 해의 정확성은 보장되기 때문에 혼합법의 사용이 큰 장점이 있다고 사료된다.

4.2 탄성체의 예제

앞서 사용한 탄성체 예제를 그대로 사용하여 앞의 강체 경우와 마찬가지로 시뮬레이션을 수행하였다. 예제에서 사용된 모드좌표의 수는 진동모드 2개, 최대 허용 적분간격은 5E-4이고, 해의 정확도

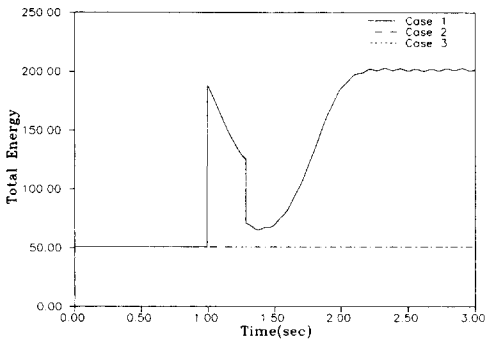

Fig. 21 Total energy of the system

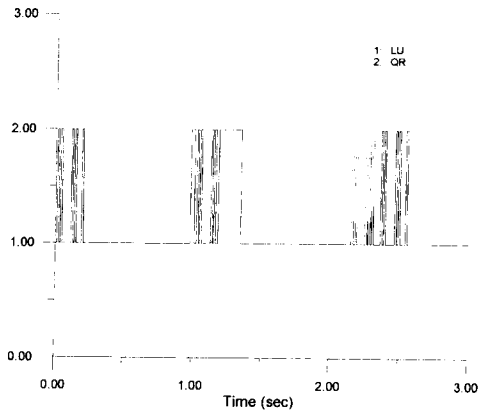

Fig. 22 Nomination of the partitioning method

간격은 1E-5을 사용하였다. Fig. 15와 Fig. 16에 첫 번째 모드좌표의 가속도성분과 변위성분을 나타내었다. 혼합법의 정확성을 나타내기 위해서 매우 오차가 큰 LU법의 경우를 배제하였다. LU법에 대한 자료는 앞선 예제에서 언급되었다. 그림에서 보는 바와 같이 두 경우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 17에는 탄성체인 커플러의 중간절점인 6번 절점의 국부변형량을 나타내는 그림이다. LU법의 경우 특이구간에서 갑자기 큰 국부탄성변형이 발생하는 이유는 이 구간에서 에너지보존이 성립되지 않고 큰 에너지 증가가 수반되므로 국부변형량도 급격히 발생된 것으로 판단된다. 그러나 혼합법과 QR법은 정확히 서로 일치하는 것을 확인할 수 있다. 커플러의 수직방향 가속도를 나타내는 Fig. 18에서는 LU법의 부정확성과 QR과 혼합법의 일치된 결과를 역시 보여주고 있다. 적분간격을 나타내는 Fig. 20에서는 앞선 강체예제의 경우와 같이 LU법과 QR법의 평균값 정도의 크기에서 적분간격이 형성되어 있음을 볼 수 있다. 계 전체의 에너지 비교에서도 강체해석의 경우와 같은 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 전체 시뮬레이션 수행과정중에 좌표분할방법의 선택여부를 Fig. 22에 나타내었다.

Table 3에서는 각 경우의 CPU 사용시간을 나타내고 있다.

Table 3에서 알 수 있는 것은 탄성체 시스템을 해석할 때는 작은 적분간격으로 수많은 계산이 반복적으로 수행되므로 QR법의 적용은 효율성 측면에서 많은 어려움을 내포하고 있다. 그러나 혼합법을 도입함으로써 보다 효율성을 높일 수 있고, 특히 해의 정확성이 보장되는 큰 장점을 가지게 된다.

5. 결 론

특이구간을 가지는 탄성체인 4절 기구의 거동을 절대좌표계를 사용하여 해석할 때 LU 좌표분할법과 QR 좌표분할법을 이용하여 각 경우에 있어서 최대허용 적분간격의 변화, 수치해의 허용오차의 변화 및 사용되는 모드좌표의 수에 따른 영향을 분석한 뒤, 두방법의 장점을 취하는 혼합좌표법을 제안하고 강체예제와 탄성체의 두 가지 경우에 대하여 적용하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 최대 허용 적분간격의 영향으로 LU법은 많은 오차가 수반되어 나타났고, 각각의 경우에 따라

수치해의 결과가 차이가 있었으나 QR법은 최대 허용 적분간격의 영향이 거의 나타나지 않았다.

(2) 수치해의 허용오차에 따라서는 LU법이 역시 많은 영향을 받았으며, 허용오차가 엄격해지면 오차의 누적으로 인하여 시뮬레이션 자체가 이루어지지 않았다. 이에 반하여 QR법은 허용오차가 엄격해지더라도 큰 영향을 받지 않고 비교적 강인한 알고리듬으로 확인되었다.

(3) LU 법이 가지는 효율성과 QR법이 가지는 정확성의 장점을 동시에 포함하는 혼합좌표분할법을 제안하였으며, 전체적으로 정확성과 효율성을 가지는 수치 알고리듬을 개발하여 프로그램화 하였다.

(4) 제안된 혼합법을 시뮬레이션에서 적용하여 특이구간을 가지는 시스템을 빠르고 정확하게 계산할 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 '96 핵심전문연구과제 (과제번호 961-1001-001-2)로서 수행되었으며, 이에 관계자께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Yoo, W. S. and Haug, E. J., 1986, "Dynamics of Articulated Structures: Part I, Theory," *J. Structural Mechanics*, Vol. 14, No. 1, pp. 105~126.

(2) Yoo, W. S. and Haug, E. J., 1986, "Dynamics of Articulated Structures: Part II Computer Implementation and Application," *J. Structural Mechanics*, Vol. 14, No. 2, pp. 177~189.

(3) Kim, S. S., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Mechanisms," Ph. D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, The University of Iowa.

(4) Wahage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," *ASME J. Mech., Des.*, Vol. 104, pp. 247~255.

(5) Kim, . S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "QR Decomposition for State Space Representation of constrained Mechanical Dynamic Systems," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 108, pp. 183~188.

(6) Mani, N. K., Haug, E. J., and K. E. Atkinson, "Application of Singular Value Decomposition for Mechanical System Dynamics," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 107, pp. 82~87.

(7) Liang, C. G. and Lance, G. M., 1987, "A Differentiable Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 109, pp. 405~411.

(8) Baumgrate, J., 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 1~16.

(9) Chang, C. O. and Nikravesh, P. E., 1985, "An Adaptive Constraint Violation Stabilization Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems," *ASME J. Mech. Trans. Auto. Des.*, Vol. 107, pp. 488~492.

(10) Shabana, A. A., 1994, "*Computational Dynamics*," John Wiley & Son Inc.

(11) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *J. Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~128.

(12) Shampine, L. F. and Gordon, M. K., 1975, "Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem," W. J. Freeman, San Francisco, California.