

(논 문)

## 다결정체의 탄소성 대변형해석

김 영 석\* · 김 정 석\*\*

(1993년 12월 6일 접수)

Analysis of Elastic-Plastic Large Deformation  
for Polycrystalline Solids

Young-suk Kim and Jung-suk Kim

**Key Words :** Crystal Plasticity(결정소성학), Grain Size(결정립크기), Polycrystalline Solid(다결정체), Deformation Characteristic(변형특성), Finite Element Simulation(유한요소해석)

## Abstract

Elastic-plastic finite element (FE) simulation was performed for polycrystalline solids subjected to plane strain tensile loading. Using Asaro's double slip crystal plasticity model, the polycrystalline solids were modeled by assigning different initial slip directions to each grain. From the FE calculations, the microscopic deformation characteristic of polycrystalline solids were analyzed. Moreover, the effect of grain size and grain boundaries on the deformation characteristic were clarified.

## 1. 서 론

금속재료는 그 자신의 변형한계를 넘어 과다한 소성변형을 받으면 소성 불안정현상이 발생하고, 결국에는 좁은 영역에 변형이 집중하여 파단에 이르게 된다. 따라서, 이와 같은 소성 불안정이 발생한 후의 파괴거동을 각종 부품의 가공전에 예측하고, 그 원인을 명확히 하여 대책을 세우기 위해서는 재료의 변형특성을 평가하는 것이 중요하다. 이를 위해서 인장실험, 평면 변형장출실험 등의 실험적인 방법 이외에 수치해석을 통해 재료의 변형거동을 시뮬레이션하고 성형성을 평가하는 방법이 사용되어 왔다. 그러나 지금까지의 해석적 방법에서는 재료를 하나의 거시적인 연속체로 간주해 왔으므로, 금속재료를 구성하고 있는 각 결정립의 영향

을 평가할 수 없었다. 따라서 재료의 소성변형거동을 보다 명확히 평가하고 소성 불안정에 대한 대책을 세우기 위해서는 소성변형현상을 거시적으로 뿐만 아니라 결정의 미시 슬립거동을 고려하여 미시적으로도 평가하는 것이 중요하다.

Taylor<sup>(1)</sup>가 결정립이 균일하게 변형한다는 가정하에 전위에 의한 소성변형을 처음으로 수학적으로 설명한 이후, Asaro<sup>(2)</sup>는 이상적인 평면 2-슬립계를 가지는 단결정체에 대한 해석으로 전단면 형성을 연구했고 Chang 등<sup>(3)</sup>은 실험에 의해서 변형국소화 및 전단면 형성에 대해 연구했다. Peirce 등<sup>(4)</sup>은 Asaro의 평면 2-슬립계 모델에 대한 평면변형 인장해석을 통해 수치적으로 변형국소화(deformation localization)현상을 기술하였다. 富田 등<sup>(5)</sup>은 다결정체의 변형국소화 거동을 해석하였으며 仲町,<sup>(6)</sup> Gelin<sup>(7)</sup> 등은 판재성형공정에서 성형성에 미치는 결정립의 슬립방위의 영향에 대해서 논하였다. 한편 국내에서는 이동녕,<sup>(8)</sup> 이용신<sup>(9)</sup> 등이 판재의 압

\*회원, 경북대학교 기계공학부

\*\*경북대학교 대학원 기계공학부

연공정 해석과 평면변형 압축해석을 통해 집합조직의 변화를 연구한바 있고, 김영석 등<sup>(10)</sup>은 Asaro의 2중 슬립모델을 이용해 평면 변형인장하에서 단결정체의 변형국소화 특성과 슬립방위의 변화를 수치해석하였다

본 연구에서는 결정체(crystalline solid)를 대상으로 Asaro의 2중 슬립 결정모델로부터 재료의 미시적인 탄소성 변형거동을 묘사할 수 있는 양형의 대변형 탄소성 유한요소해석 프로그램을 개발하여 평면 변형인장하에서 다결정체의 변형거동을 해석하였고, 결정립의 크기 및 결정립계의 영향을 검토하였다.

## 2. 기초이론

### 2.1 결정소성이론에 의한 구성식

결정의 변형에 대한 변형구배는 다음과 같이 표현된다.

$$F = F^* \cdot F^P \tag{1}$$

여기서,  $F^*$ 와  $F^P$ 는 각각 Fig. 1과 같이 결정격자의 신장과 회전에 의한 변형구배와 슬립계에 따른 소성 전단변형에 의한 변형구배이다.

현재의 변형상태에서의 속도구배  $L$ 은

$$\begin{aligned} L &= \dot{F} \cdot F^{-1} \\ &= \dot{F}^* \cdot (F^*)^{-1} + F^* \cdot \dot{F}^P \cdot (F^P)^{-1} \cdot (F^*)^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

이 되고, 이 속도구배는 변형속도텐서  $d$ 와 회전텐서  $\Omega$ 를 이용해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L = d + \Omega \tag{3}$$

$$d = d^* + d^P, \quad \Omega = \Omega^* + \Omega^P \tag{4}$$

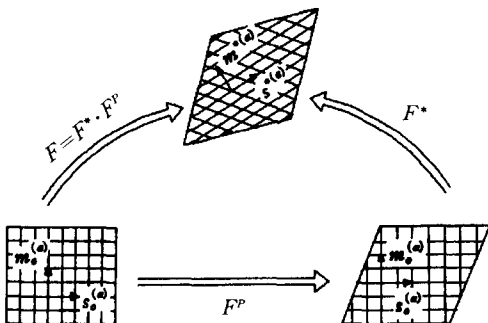


Fig. 1 Kinematics of elastic-plastic deformation in crystalline solids

식 (2)와 식 (4)로부터

$$d^P + \Omega^P = \dot{F}^* \cdot \dot{F}^P \cdot (F^P)^{-1} \cdot (F^*)^{-1} \tag{5}$$

이고,  $\dot{\gamma}^{(a)}$ 를 각 슬립계에서의 전단속도라 하면 위의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$d^P + \Omega^P = \sum_a \dot{\gamma}^{(a)} s^{*(a)} m^{*(a)} \tag{6}$$

결정의 탄성변형을 속도형으로 표현하고, 위식들을 이용해 유도한 구성식<sup>(4)</sup>은 다음과 같이 나타내진다.

$$\tau^\nabla = D^e : d - \sum_a \dot{\gamma}^{(a)} R^{(a)} \tag{7}$$

$$R^{(a)} = D^e : P^{(a)} + \beta^{(a)} \tag{8}$$

$$\beta^{(a)} = W^{(a)} \cdot \tau - \tau^* W^{(a)} \tag{9}$$

여기서,  $\tau^\nabla$ 는 Kirchhoff 응력의 Jaumann derivative이고,  $P^{(a)}$ 와  $W^{(a)}$ 는 현재 상태의 슬립계에서 슬립방향벡터  $s^{(a)}$ 와 슬립면 법선벡터  $m^{(a)}$ 로 정의된 Schmid 텐서의 대칭부분과 비대칭부분이다.

한편, 전단변형률속도  $\dot{\gamma}^{(a)}$ 에 대한 구성식으로서 Pan and Rice<sup>(11)</sup>과 Peirce<sup>(12)</sup> 등이 사용한 다음의 지수법칙을 이용한다.

$$\dot{\gamma}^{(a)} = \dot{a}^{(a)} \frac{\tau^{(a)}}{g^{(a)}} \left| \frac{\tau^{(a)}}{g^{(a)}} \right|^{1/m-1} \tag{10}$$

여기서,  $g^{(a)}$ 는 각 결정의 현재 변형경화상태를 나타내는 전 슬립량의 함수로서, 그에 관한 발전방정식은 다음과 같다.<sup>(4)</sup>

$$\dot{g}^{(a)} = \sum_\beta h_{a\beta} | \dot{\gamma}^{(\beta)} | \tag{11}$$

$$h_{a\beta} = qh(\gamma) + (1-q)h(\gamma)\delta_{a\beta} \tag{12}$$

$$h(\gamma) = h_o \sec h^2 \left( \frac{h_o \gamma}{\tau_s - \tau_o} \right) \tag{13}$$

$$\tau(\gamma) = \tau_o + (\tau_s - \tau_o) \tanh \left( \frac{h_o \gamma}{\tau_s - \tau_o} \right) \tag{14}$$

여기서,  $q$ 는 경화지수로서 자기경화(self hardening)에 대한 잠재경화(latent hardening)의 비율을 나타내며,  $h_o$ 는 초기경화률,  $\tau_s$ 는 포화응력,  $\tau_o$ 는  $g^{(a)}(0)$ 의 값을 각각 나타낸다.

### 2.2 유한요소 정식화

이상의 기초이론을 바탕으로 Fig. 2와 같은 Asaro의 2중 슬립모델을 이용해서 대변형 유한요소해석을 수행할 때 수치해석의 안정화 및 효율의 향상을 위해, 점선계수법<sup>(4, 13)</sup>을 도입한 후, 식

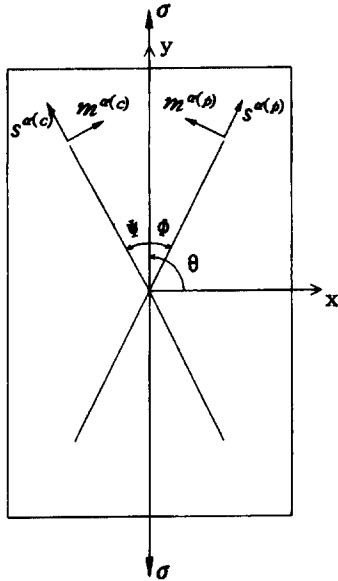


Fig. 2 Asaro's double slip model

(7), (10) 및 식 (13)을 이용해 정리하면, 다음 식이 얻어진다.

$$\tau^v = C : d - \sum_a R^{(a)} \dot{f}^{(a)} \quad (15)$$

$$C = D^e - \sum_a R^{(a)} F^{(a)} \quad (16)$$

여기서,  $R^{(a)}$ 의 구체적인 형태는 참고문헌<sup>(2,4,10)</sup>에 나타나 있다.

위에서 얻어진 방정식들을 탄소성 대변형 유한요소 방정식에 대입하고, Updated Lagrange법을 적용하면, 다음의 유한요소 방정식을 얻을 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$[K]\{v_N\} = \{f\} + \{g\} \quad (17)$$

$$[K] = \int_V \{ [B]^T \{ [C] - [F] \} [B] + [E]^T [Q] [E] \} dV \quad (18)$$

$$\{f\} = \int_{S_i} [\phi] \{ P \} dS \quad (19)$$

$$\{g\} = \int_V \sum_{k=1}^n \dot{f}^{(a)} [B]^T [R^{(a)}] dV \quad (20)$$

### 3. 해석모델

Araro의 2중 슬립결정모델에 의한 구성식과 대변형 유한요소 정식화를 바탕으로 FCC 다결정체를 [112] 방향과 평행한 방향으로  $\dot{u}/L=0.00036(1/s)$ 의 준정적 평면 변형인장을 가하는 경우에 대하여

Table 1 Material properties

E	Elastic modulus	$1000 \times \tau_y$
m	Strain rate sensitivity	0.005
$\nu$	Poisson's ratio	0.3
$\tau_y$	Constant	60.84 MPa
a	Reference rate	0.001
$\tau_0$	$= g^{(a)}(0)$	$\tau_0$
$\tau_s$	Saturation strength	$1.8 \tau_0$
$h_0$	Initial hardening rate	$8.9 \tau_0$

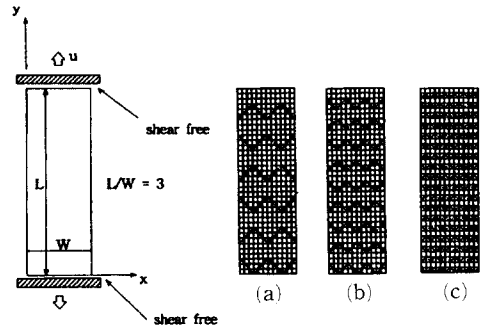


Fig. 3 Computational models for polycrystals

각 결정립들의 소성변형거동을 수치적으로 해석하여 결정립의 크기에 따른 재료의 미시적 변형거동과 소성 불안정의 성장과정을 규명하였다.

Fig. 2는 Asaro의 2중 슬립결정모델을 정의하는 모델로, 그림에서 각  $\phi$ 와  $\psi$ 는 평면 변형인장하에서 2중 슬립이 일어나는 FCC 결정립을 모델링하기 위해  $30^\circ$ 로 하였다. 한편 다결정체를 모델링하기 위해 몇 개의 유한요소로 1개의 결정립을 구성하여 각 결정립을 이루는 요소에는 동일한 슬립방향을 부여하고, 등방재료를 가정하여 결정립마다 다른 슬립방향을 부여했다. 이 때 임의성을 위해 난수를 발생시켜 초기 슬립방향을 부여하였다. 요소는 평면 변형해석에 적합한 4각형의 대각선을 4개의 삼각형으로 분할한 대각삼각(crossed triangle)요소를 사용했으며, 결정립을 묘사하기 위해서 규칙적인 6각형을 사용하였다. Table 1에 수치해석에 사용된 재료상수들을 나타내었다.

Fig. 3은 결정립의 크기를 달리한 3가지 경우에 대한 해석모델을 나타낸다. 여기서, 그림 (a), (b), (c)의 결정립의 크기는 각각 평균적으로  $75 \mu m$ ,

50 μm, 25 μm이다.

해석에 사용된 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x=0 &: \dot{P}_x = \dot{P}_y = 0 \\
 y=0 &: \dot{u}_y = 0, \dot{P}_x = 0 \\
 x=W &: \dot{P}_x = \dot{P}_y = 0 \\
 y=L &: \dot{u}_y = \dot{u}, \dot{P}_x = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

본 연구에서는 결정소성이론으로부터 유도된 구성식을 바탕으로 유한요소법을 적용해서 다결정체의 미시적 소성변형거동을 해석하고, 결정립의 크기 및 결정립계가 변형거동에 미치는 영향을 고찰하였다. 다결정체는 각 결정립마다 다른 슬립방향을 가지므로, 현 상태에서 가장 큰 Schmid 인자 (=cos λ · cos ϕ, λ는 인장방향과 슬립면의 수직방향이 이루는 각, ϕ는 인장방향과 슬립방향이 이루는 각)를 갖는 결정립에서 슬립이 먼저 발생하고, 뒤이어 각 결정립마다 각기 다른 분해 전단응력에서 슬립이 발생하게 된다. 따라서, 일반적으로 자유표면의 여러 부분에서 변형국소화현상이 나타날 수 있으며, 또한 결정립계가 존재하므로 결정립 내의 연속적인 슬립변형이 방해받게 된다.

#### 4. 해석결과

Fig. 4는 다결정체의 전체적인 인장변형거동을 파악하기 위해 사각형요소를 하나의 결정립으로 간주한 경우의 무차원한 단면 평균응력 ( $\tilde{\sigma}/\tau_y$ ) - 변위 곡선 ( $u/L_0$ )을 나타낸다. 각 변형단계에서 변형된

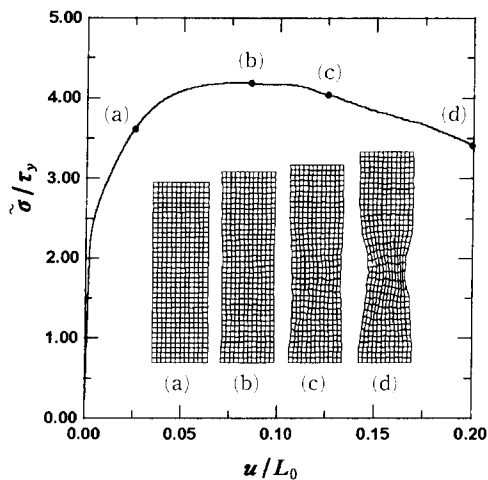


Fig. 4 General behavior of polycrystal under plane strain ( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

요소형상을 그림중에 삽입하였다. 변형이 진행됨에 따라 각 결정립에 랜덤하게 부여한 결정방위에 의해 자유표면이 거칠어지며, 단면 평균응력이 최대 값을 지나서는 시편의 일부(중앙)에 소성 불안정현상인 균일 넥이 발생하여 진행하고 있음을 알 수 있다. 그러나 다결정체인 경우는 전형적인 이방성 재료인 단결정체에서와 같은 변형국소화<sup>(10)</sup>는 발생하지 않는 것으로 보인다.

Fig. 5에 각 변형단계에서 주슬립방향을 나타내었다. 여기서는 변형단계에서 각 요소의 슈미드 인자가 큰 방향을 주슬립방향으로 나타내었다. 변형 초기에 랜덤하게 존재하고 있던 슬립방향이 변형이 진행됨에 따라 변형이 집중되고 있는 중앙넥 부위

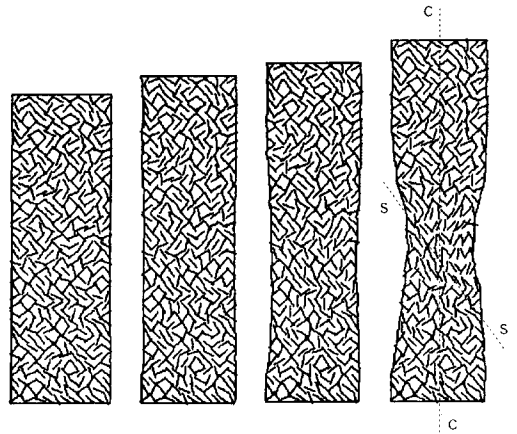


Fig. 5 Primary slip directions

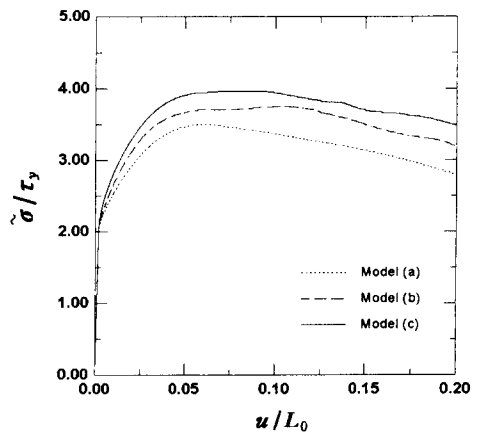


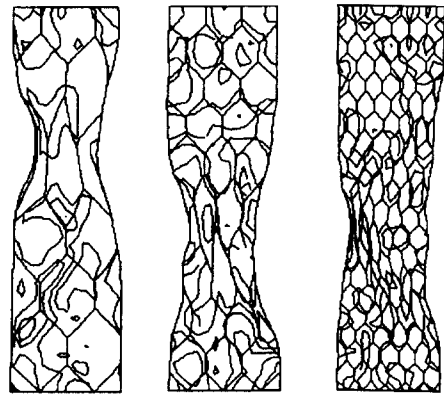
Fig. 6 Normalized mean tensile stress-elongation curves of for various grain size ( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

에서 인장방향(cc방향)과 넥 발생부위에서 일부방향(ss방향)으로 회전한다. 이 슬립방향의 회전방향은 슈미드인자가 큰 쪽으로 회전하려는 경향이 있음을 알 수 있다. 이는 넥 발생부위에서는 과다한 소성변형으로 인해 결정립이 주 변형방향으로 회전하여 선택방위(preferred orientation)을 갖게 된다는 것을 의미한다.

Fig. 6는 결정립의 크기가 변형거동에 미치는 영향을 검토하기 위해서 결정립 크기를 달리한 세가지 모델에 대해 해석한 단면 평균응력-변위곡선을 나타낸다. 그림으로부터, 결정립의 크기가 작아질수록 단면 평균응력의 최대값이 커지는 것을 알 수 있는데, 이는 결정립이 작아질수록 결정입계가 많아져 각 결정립내의 슬립변형에 대한 저항이 많아지기 때문으로 생각할 수 있다. 이 경향은 Hall-Petch의 식 (14)에서와 같이 냉간압연된 금속판재의 인장실험에서 결정립이 작을수록 항복응력이 증가하는 결과와 잘 일치한다.

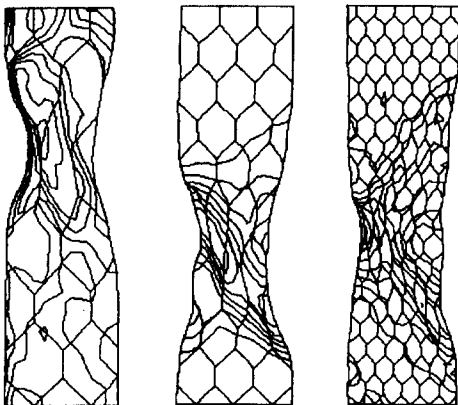
Fig. 7과 Fig. 8은 변형된 형상과 각각의 경우에 대한 상당 소성변형률( $\epsilon^p$ )과 무차원화한 상당응력( $\bar{\sigma}/\tau_0$ )의 등고선분포를 나타낸다. 모델 (a)의 경우 큰 결정립을 갖고 있으므로 전체 시편의 요소분할에 비하여 각각의 결정립의 방위특성이 전체 성질에 나타나기 쉽게 되어 초기 슬립방위의 부여방법에 따라 전체 성질이 크게 영향을 받는다. 즉, 가장 큰 Schmid 인자를 갖는 결정립에서의 변형거동이 전체 시편의 변형거동에 지배적인 영향을 미

치게 된다. 반대로 모델 (c)는 결정립의 수가 많기 때문에 각각의 결정립의 성질이 평균화되어 나타난다. 따라서 초기 결정립 방위의 영향을 받지 않는 비교적 등방성의 재료에 대한 변형거동을 논의하는 경우는 결정립의 수를 충분히 하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다. 특히 Fig. 8에 있어서 각 모델에 대하여 결정립계를 따라서 응력 등고선이 분포하는 것을 알 수 있는데, 이것은 슬립방위의 차이로 형성되는 재료특성의 급변하는 영역이 결정립계에 존재하기 때문으로 생각된다. 즉, 슬립방향의 차이에 의해 생성된 결정립계에 의해 결정립내의 슬립변형거동이 방해받게 되고, 결정립계를 따라서



(a) max=5.08 (b) max=5.60 (c) max=7.37

Fig. 8 Contours of  $\bar{\sigma}/\tau_0$  ( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )



(a) max=0.13 (b) max=0.91 (c) max=0.98

Fig. 7 Contours of effective strain ( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

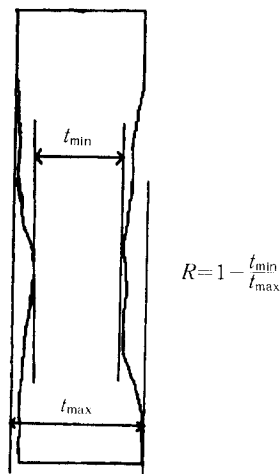


Fig. 9 Definition of surface roughness

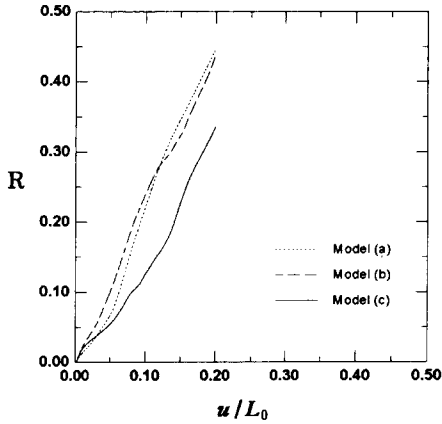


Fig. 10 Relation between surface roughness and elongation( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

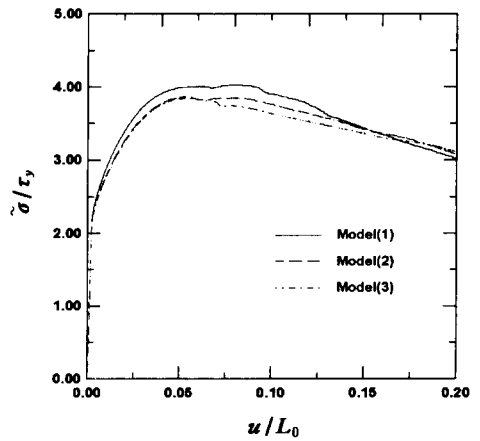


Fig. 11 Normalized mean tensile stress-elongation curves for various initial slip directions( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

응력이 집중하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 결정립계의 영향을 보다 명확하고 관찰하기 위해서는 결정립계에 대한 입계저항 및 입계슬립 등을 표현할 수 있는 적절한 결정립 모델이 요구된다.

Fig. 9는 각 모델의 경우에 대해서 관재의 프레스가공시 성형성과 관련이 깊은 표면거칠기 성장특성을 검토하기 위한 파라미터의 정의를 나타낸다. 여러 자동차 프레스부품 중에는 기하학적인 형상이 프레스성형시 평면변형에 가까운 거동을 나타내는 경우가 많다. 이 경우에 재료의 파단한계를 나타내는 성형성은 관재의 국부백 형성과 관련이 깊다. 평면 변형에서 이 국부백 발생은 재료변형에 따른 표면거칠기의 성장거동을 통해 예측가능하다.<sup>(15)</sup>

Fig. 10은 시편의 인장에 따른 표면거칠기의 성장특성을 나타낸다. 비교적 초기 슬립방위의 영향이 적은  $25\ \mu\text{m}$  크기의 결정립을 갖는 모델 (c)가 인장변형에 따른 표면거칠기의 성장이 완만하게 진행되고 있으며, 이 보다 결정립의 크기가 큰 모델 (a)와 (b)의 경우는 변형집중현상이 현저히 발생하여 표면거칠기의 성장이 급속하게 진행되고 있음을 나타낸다. 이처럼 결정립으로 구성된 다결정체의 변형거동은 결정립들의 상호작용 및 결정립의 크기 등에 많이 의존하는 것을 알 수 있다.

한편 Fig. 11과 Fig. 12는 결정립의 크기가 충분히 작아 등방성재료로 간주될 수 있는 모델(Fig. 3(c))에 대하여 초기에 부여하는 슬립방향의 임의성을 검증하기 위해 4가지의 다른 난수를 발생시켜 동일한 해석을 수행한 결과를 나타낸다. Fig. 11에서는 모든 시편의 경우가 다른 난수발생에도 불구

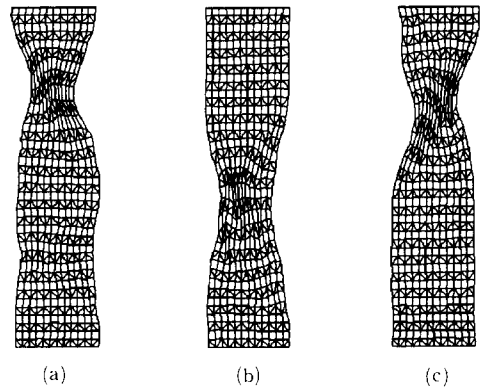


Fig. 12 Deformed shapes for various initial slip directions( $u/L_0=0.2$ ,  $m=0.005$ ,  $q=1.2$ )

하고 단면 평균응력-변위곡선이 거의 유사한 형태를 나타내고 있음을 알 수 있고, Fig. 12의 변형된 유한요소 메쉬를 살펴보면 자유표면에서 국소화가 발생한 부분의 위치는 다르지만 변형집중되는 경향이 비슷함을 알 수 있다. 그러나 앞에서 논한 바와 같이 개개 결정립의 크기가 시편 전체 형상과 비교하여 상대적으로 크게 되면 동일한 크기의 결정립이라도 난수발생방법에 따라 변형거동이 크게 차이가 날 수 있음에 주의해야 한다. 이는 결정립의 크기가 크게 되면 시편 전체가 작은 수의 결정립으로 구성되고, 따라서 난수발생방법에 따라 특정 슬립 방향이 한 방향에 존재할 가능성이 높아지기 때문이다.

## 5. 결 론

결정소성이론을 바탕으로 미시적인 관점으로부터 금속의 소성변형을 해석할 수 있는 유한요소 알고리즘을 확립했고, 이를 통한 다결정체의 평면 변형인장 해석을 통해 재료의 미시적, 거시적 소성변형 거동을 파악하였다. 초기 슬립방위를 다르게 부여해 결정립을 모델링하여 결정립의 크기 및 결정립계가 다결정체의 변형거동에 미치는 영향을 검토하였다. 다결정체의 변형거동을 보다 명확히 해석하기 위해서는 결정립계의 특성을 보다 잘 설명할 수 있는 다결정체 모델이 요구된다.

## 후 기

본 연구의 일부는 교육부의 1995년도 학술연구조성비(기계공학분야 ME95-C-02)와 포항제철(주)의 '96 연구지원에 의하여 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Taylor, G. I., 1938, "Plastic Strain in Metals," *J. Inst. Metals*, Vol. 62, pp. 307~324
- (2) Asaro, R. J., 1979, "Geometrical Effects in the Inhomogeneous Deformation of Ductile Single Crystals," *Acta Metall.*, Vol. 27, pp. 445~453.
- (3) Chang, Y. W. and Asaro, R. J., 1981, "An Experimental Study of Shear Localization in Aluminum-copper Single Crystals," *Acta Metall.*, Vol. 29, pp. 241~257.
- (4) Peirce, D., Asaro, R. J. and Needleman, A., 1983, "Material Rate Dependence and Localized Deformation in Crystalline Solids," *Acta Metall.*, Vol. 31, pp. 1951~1976.
- (5) 大木秀之, 富田佳宏, 1996, "多結晶體の變形の局所化舉動," 日本塑性加工學會 春季學術大會 論文集, pp. 30~31.
- (6) 森本秀夫, 仲町英治, 1996, "結晶方位分布の變形特性への影響に關する實驗解析," 日本塑性加工學會 春季學術大會 論文集, pp. 36~37.
- (7) Boudeau, N. and Gelin, J. C., 1996, "Prediction of Necking in Sheet Metal Forming from Finite Element Simulations and Computations Based on Crystalline Plasticity," *Proceeding of 19th IDDRG Biennial Congress*, pp. 305~314.
- (8) 최창희, 홍승현, 권재욱, 오규환, 이동녕, 1995, "다층압연된 알루미늄의 불균질압연집합조직," 한국소성가공학회지, Vol. 4, No. 4, pp. 353~364.
- (9) 김응주, 이용신, 1996, "FCC 다결정체의 집합조직 발전에 따른 이방성의 변화," 대한기계학회 논문집(A), 제20권, 제5호, pp. 1516~1523.
- (10) 김정석, 정기조, 김영석, 1996, "결정의 슬립을 고려한 금속의 미시적 소성변형거동 해석(I)," 한국소성가공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 55~61.
- (11) Pan, J. and Rice, J. R., 1983, "Rate Sensitivity of Plastic Flow and Imperfection for Yield Surface Vertices," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 19, pp. 973~987.
- (12) Peirce, D., Asaro, R. J. and Needleman, A., 1982, "An Analysis of Nonuniform and Localized Deformation in Ductile Single Crystals," *Acta Metall.*, Vol. 30, pp. 1087~1119.
- (13) Peirce, D., Needleman, A., Asaro, R. J. and Lemods, J., 1985, "Finite Element Analysis of Crystalline Solids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, pp. 689~708.
- (14) Courtney, T. H., 1990, *Mechanical Behavior of Materials*, International Edition.
- (15) 山口克彦, 西村信吾, 高倉章雄, 福田五成, 1980, "變形の進行に伴う板厚の不均一さの進展," 塑性と加工, Vol. 21, No. 231, pp. 315~324.