

<논 문>

삼차원 와선의 비정상 거동에 의한 원거리 음압의 수치해석

유 기 완* · 이 덕 주**

(1996년 10월 10일 접수)

Numerical Calculation of the Far Field Acoustic Pressure from the Unsteady Motion of the Three-dimensional Vortex Filament

Ki-Wahn Ryu and Duck-Joo Lee

Key Words : Vortex Filament(와선), Vorticity(와도), Far Field(원거리), Aerodynamic Noise(공력소음), Quadrupole Source(사극음원), Vortex Sound(와류소음), Elliptic Vortex Ring(타원형 고리와), Axis Switching(축 스위칭), Mutual Threading(상호관통)

Abstract

Far field acoustic pressure from the evolution and interaction of three-dimensional vortex filament is calculated numerically. A vortex ring is a typical example of the three-dimensional vortex filament. An elliptic vortex ring emits a strong sound signal due to significant distortion and stretching of the vortex filament. The far field acoustic pressure is linearly dependent on the third time derivatives of the vortex positions. A numerical scheme of high resolution is employed to describe in detail the elliptic vortex ring motions which are highly nonlinear. Discretized vortex filaments are interpolated by using a parametric blending function to remove a possible numerical instability. The distorted vortex filament, owing to the self-induced and the induced velocity from the other vortex segments, is redistributed at each time step. The accuracy and efficiency of the scheme are validated by comparisons with the analytic solution of circular vortex ring interaction.

1. 서 론

헬리콥터 로터의 익단에서 발생된 익단와(tip vortex)는 강한 와류의 특징을 가지며, 이것이 로터 또는 동체에 부딪히거나 와선의 곡률이 심하게 비틀릴 때, 비정상 공기력의 변동에 의해 커다란 공력소음을 유발하게 된다. 와류 그 자체의 비정상 거동에 의해서 소음을 유발하는 예를 들면 제트에서

서 와류의 짝소음(pairing noise) 현상을 들 수 있는데, 이것은 제트의 출구에서 전단응력에 의해 형성된 고리와가 흐름을 따라서 흘러가고 그 다음에 또 다시 제트출구에서 형성된 고리와(vortex ring)와 서로 상호작용하며 발생하는 소음현상이다. Lighthill은 연속방정식과 운동량방정식으로부터 몇 가지 가정을 통하여 자유흐름공간에서의 음향 지배방정식을 얻어냈다.^(1,2) 이 방정식은 Lighthill의 음향텐서(acoustic tensor)가 원천항으로 작용하는 비제차 파동방정식 꼴이 된다. 한편 Powell은 증기기관차의 제트현상에서 발생하는 에디(eddy) 형

*회원, 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과

**회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

성과정을 보고 음향장이 Lamb 벡터에 관련되어 있을 것이라고 추정하였다. 그는 이러한 생각을 근간으로 해서 저아음속 유동장에 대한 '와류 음향학 이론'(theory of vortex sound)⁽³⁾을 발표하였으며, 자신의 이론에서 보여지는 음원항이 Lighthill의 음향텐서와 일치함을 해석적으로 증명하였다. Powell의 식이 갖는 의미는 Lighthill의 음향텐서가 전반적인 이론 유체역학적인 흐름의 정보를 내포하는 반면에, Powell의 식은 쉽게 개념적으로 접근이 가능한 와도(vorticity)와 그 흐름속도의 항만으로 이루어 졌다는데 있다. 즉, Lighthill의 식이 발표된 당시에 그 식이 음장해석에 직접 사용되지 않는 반면에 Powell에 이르러서 유동장에 분포하는 와도의 정보로부터 음장해석에 대한 시도가 가능하게 된 것이다. 더 나아가서 Howe는 점성소산을 무시한 비균일 와도장과 비균일 엔트로피장에 대해서 엔탈피 개념을 도입하여 음장에 대한 지배식을 수식화하였다.⁽⁴⁾ 그의 이론은 유체입자가 갖는 엔트로피의 변화는 없다는 것과 저아음속 흐름인 경우에 해당되며, 이상기체의 상태방정식을 이용했다는 특징이 있다. 그의 식이 갖는 의미는 Lamb 벡터의 다이버전스가 저아음속 음향장의 원천항으로 작용된다는 것이며, 이것은 Powell의 이론을 다시 한번 입증한 셈이 된다.

Möhring은 벡터 Green함수의 개념을 도입하여 더 발전된 새로운 이론을 제창하였다.⁽⁵⁾ 그의 이론은 와도장이 조밀(compact)하다는 것과 음원항이 와도에 대한 선형적인 형태로 표현된다는 것이다. 와도장을 포함하는 체적이 조밀하다는 가정은 원천항에 지연시간을 고려한 연산자를 적용할 필요가 없다는 것을 의미하며, 그의 식이 갖는 가장 중요한 특징은 원천항에 지역적인 이동속도가 없이 와도의 세기와 위치만의 함수로 표현된다는 것이다. Kambe와 Minota⁽⁶⁾는 Möhring의 표현을 벡터 Green 함수가 아닌 다른 관점, 즉 음향학적인 사극자(quadrupole)에 대하여 내부 와도흐름에서의 원거리속도 포텐셜함수를 점근적 전개(asymptotic expansion)함으로서 결국 Möhring의 표현과 동일하게 나타내었고, 두개의 동축 원형 고리wa(coaxial circular vortex ring)에 대한 흥미있는 음향장 해석을 시도하였다.

삼차원 와선(vortex filament)에 대한 거동해석은 Arms와 Hama⁽⁷⁾에 의한 국부유도속도근사(LIA, Local Induction Approximation)에 의해서

와선(vortex filament)의 내부 핵(core)이 대표 길이에 비해 매우 작다는 가정하에, 와선의 국부적인 거동속도가 지역적인 곡률의 크기에 비례한다고 보고 근사적으로 해석하였다. Dhanak과 de Bernardis⁽⁸⁾는 타원형 고리wa(elliptic vortex ring)에 대한 정상적인 수치해석을 시도하였고 실험과도 비교하였다. 원형 고리wa의 특징은 원형 고리wa가 전개해 나갈 때 와도가 존재하는 와관(vortex tube)의 중심이 한 평면상에 계속 존재한다는 것이다. 즉, 고리wa가 놓여있는 평면에 대해서 이차원적인 표현이 충분히 가능하다.

Kambe와 Minota가 시도한 음장해석은 두 원형 고리wa(circular vortex ring)를 해석하기 위해 와류소음에 대한 수치적 방법을 간단한 수식, 즉 Dyson⁽⁹⁾의 식을 이용하여 해석하였고 또한 실험을 통한 측정치와 비교함으로써 와류소음식을 이용한 음장해석이 가능함을 보여 준 것이다. Dyson의 식으로부터 원형 고리wa에 대한 문제는 해석적으로 처리할 수 있다 해도, 외부의 간섭에 의해서 발생하는 와선 상의 곡률변화에 의한 와선의 비틀림은 완전한 삼차원 흐름을 이루게 되고, 따라서 해석적인 표현이 불가능하게 된다. 이러한 완전한 삼차원 거동의 대표적인 예로써 타원형 고리wa를 들 수 있다.

고리wa들은 냉제트(cold jet), 즉 마하수가 0.15에서 0.35 범위의 주위와의 온도변화를 무시할 수 있는 저아음속 흐름을 갖는 제트류에서 제트출구에서 발생하는 전단흐름의 불안정성에 의해서 자주 관찰되며, 제트의 출구가 원형 또는 타원형을 이루는 경우, 그 출구형상에 따라서 전단류에 의한 고리wa의 형태가 원형 또는 타원형의 형태로 되고, 이에 의하여 원거리에서의 음향장 특성의 차이가 발생하게 된다. 아직까지도 제트소음에 있어서의 와류소음의 역할에 대한 이론적 또는 실험적인 규명이 완전히 이루어지지 않았고, 많은 연구자들이 이를 규명하고자 꾸준히 노력하고 있는 상황이다.

본 연구의 목적은 와도가 지배적인 삼차원 흐름장에서 와선의 비정상 거동에 의한 음파발생을 정확히 해석하기 위함이다. 삼차원 와선의 예를 들어 타원형 고리wa에 대해 음향해석을 다루고자 한다. 이를 위하여 와선의 거동을 정확히 계산할 필요가 있는데, 쌍곡선 혼합함수를 이용하여 와선식을 표현하고 그 정확도를 검증하며 복잡한 유동에 대해서 적용해 보기로 한다.

2. 본 문

2.1 음향장지배식

자유흐름상태에서 Lighthill의 음향방정식은 비제차 파동방정식 꼴이 되며

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = q \quad (1)$$

이다. 여기서 p 는 원거리에서의 압력교란이고, a_0 는 주위의 음속, q 는 유동에서 주어지는 음향 원천항(acoustic source term)으로서 Lighthill의 응력텐서가 된다. 저아음속 유동에 대하여 Powell⁽³⁾과 Howe⁽⁴⁾는 ρ_0 를 밀도라 할 때 음향 원천항 q 를 다음과 같이 표현하였다.

$$q = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{L} \quad (2)$$

\mathbf{L} 은 Lamb 벡터 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ 이고, 여기서 \mathbf{v} 는 속도벡터이다. 식 (1)은 Green함수 G 를 이용하여

$$p(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) q(\mathbf{y}, \tau) d^3 y d\tau \quad (3)$$

로 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서 지연시간 $\tau = t - r/a_0$ 이고, \mathbf{x} 는 청음위치벡터, \mathbf{y} 는 소음원의 위치벡터이고, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ 이다. 와도의 이동에 관한 Helmholtz 식은 $\boldsymbol{\omega}$ 를 와도라 할 때

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{L} = 0 \quad (4)$$

이고, 이 식은 비압축성 유동인 경우에 성립하며, 식 (2)와 (3)으로부터

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \int \nabla_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{L}(\mathbf{y}, \tau) d^3 y d\tau \quad (5)$$

가 된다. 만일 벡터 그린함수(vector Green's function) \mathbf{G} 를 일반적인 그린함수 G 와

$$\nabla_y G = \nabla_y \times \mathbf{G} \quad (6)$$

의 관계를 갖는다고 정의하고, 이 관계를 식 (5)에 대입하면

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, \tau) d^3 y d\tau \quad (7)$$

가 된다. 이제 식 (6)을 만족하는 벡터 그린함수를 얻을 수 있다면 음장을 지배하는 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 비정상 저속흐름상태를 갖는 자유공간상에서 벡터 그린함수는 아래와 같이 주어진다.

다.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{1}{4\pi x} \delta(t - \tau - x/a_0 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}/xa_0) \quad (8)$$

여기서, $x = |\mathbf{x}|$ 이다. Möhring으로부터 원거리에서의 압력교란에 대한 결과식은

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{12\pi a_0^2 x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) d^3 \mathbf{y} \quad (9)$$

이다.⁽⁵⁾ 이 식을 다른 형태로 표현하면

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{12\pi a_0^2} \sum_{i,k} \frac{\ddot{Q}_{i,k}(t - x/a_0) x_i x_k}{x^3} \quad (10)$$

$$Q_{ik} = \int y_i (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega})_k d^3 \mathbf{y} = \Gamma \int y_i (\mathbf{y} \times d\mathbf{y})_k \quad (11)$$

이다. 여기서, \ddot{Q}_{ik} 는 Q_{ik} 의 시간에 대한 3차 미분을 의미한다. 이 항은 첨자 i 와 k 가 같을 때에만 값이 존재하며, $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$ 이 됨을 식 (11)을 통해서 알 수 있다.

2.2 유동장해석

와도장을 지배하는 Biot-Savart 식에서 특이성을 제거하고 모형화한 대한 Moore-Rosenhead 식은,

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\xi_0, t)}{\partial t} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\partial \mathbf{y}(\xi, t)}{\partial \xi} \cdot \frac{\mathbf{y}(\xi_0, t) - \mathbf{y}(\xi, t)}{\{|\mathbf{y}(\xi_0, t) - \mathbf{y}(\xi, t)|^2 + \mu^2(t)\}^{3/2}} d\xi \quad (12)$$

이다.⁽⁶⁾ 여기서 Rosenhead의 절삭변수는 $\mu(t) = 2\delta_{RC}(t)$ 로서, $\xi = \xi_0$ 인 위치에서 Biot-Savart식의 특이성을 제거해 준다. ξ 는 와선을 따르는 지역 좌표 변수이고 $\mathbf{y}(\xi, t)$ 는 와선상의 좌표가 된다. 와선 필라멘트의 거동은 초기의 코어반경인 $c_{t=0} = c_0$ 와 와선의 형상에 의하여 크게 지배받으며 타원형 고리와의 관련성에 대한 Saffman의 제안식을 사용하면 다음과 같이 된다.⁽⁶⁾

$$c_0 = 8(ab)^{1/2} \exp\left[-\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} - 1 + A - (1 - e^2/2) \frac{K(e)}{E(e)}\right] \quad (13)$$

여기서, a 와 b 는 초기에 주어지는 타원형의 장축과 단축길이의 절반이 되는 값이고, $K(e)$ 와 $E(e)$ 는 완전 타원적분(complete elliptic integral)의 첫번째와 두번째 형태를 나타내고, $e = (a^2 - b^2)/a^2$ 는 편심도이다. 와도중심은 비정상 운동해석시 중

요한 기준으로 작용한다. 본 연구에서 사용된 변수 $\delta_k = 1/2 \exp(-A - 1/2)$ 로 하였으며, 여기서 $A = 1$ 로 하였다.⁽⁶⁾ 와선의 와도중심이 이동하는 속도를 관찰하기 위해 와도중심을 표현하면 아래와 같다.

$$\mathbf{y}_c(t_1) = \frac{\Gamma}{2} \int \frac{\mathbf{y} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{I}}{|\Gamma|^2} \mathbf{y} ds \quad (14)$$

여기서, $\mathbf{y}_c = (y_{1c}, y_{2c}, y_{3c})$ 이고, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 이고, 벡터 \mathbf{I} 는 와선의 임펄스이며, Γ 는 와선 단면이 갖는 순환의 세기이고, \mathbf{t} 는 와선의 접선단위벡터이다. 와도중심의 이동속도는 $\mathbf{U}_c = d\mathbf{y}_c/dt$ 로 쉽게 얻을 수 있다.

와선을 곡선식으로 표현하는 데는 여러 가지 방법이 있겠으나, 일반적으로 쉽게 생각할 수 있는 것이 삼차 스플라인곡선(cubic spline curve)이다. 그러나 본 연구에서처럼 지역적인 곡률이 와류의 거동에 중요한 영향을 미치는 경우에는 스플라인곡선은 문제가 있다고 본다. 일례를 든다면 일단 스플라인곡선으로 완전한 원을 이룰 수 없다는 것이 기본적인 문제이며, 무엇보다도 중요한 것은 곡선을 따르는 접선방향벡터가 비직관적인 값을 가질 성향이 있다는 것이다.^(10,11) 또한 와선을 정의하는 점들의 개수가 증가하는 경우에는 행렬의 크기가 커다란 삼각대각(tri-diagonal) 행렬을 풀어야 되며, 특히 폐곡선인 경우엔 곡선의 시작점과 끝점에 주기적인 경계조건을 주어야 되는데, 이는 시간과 정확성면에서 다소 문제를 야기 시킨다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 보완하기 위해서 삼차원 와선에 대한 곡선식을 쌍곡선 혼합함수(parabolic blending function)를 이용하여 표현하였고,⁽¹¹⁾ 이를 이용하여 와선의 거동을 예측, 검토하기로 한다.

쌍곡선 혼합함수를 일반화된 매개혼합함수이론을 따라서 행렬형태로 정리하면 다음과 같다.

$$C(\xi) = [\xi^3 \ \xi^2 \ \xi \ 1][A][G] \quad (15)$$

여기서, ξ 는 곡선을 따르는 매개변수이고, $[A]$ 는 혼합함수 행렬, $[G]$ 는 주어진 점들로 이루어지는 위치 벡터이다. 이 곡선 식은 선적분을 수행할 때 이용한다. 와선의 길이는 매 시간마다 계산하여 와선 코어체적의 비압축성 가정을 이용하여 와선 코어의 반경을 계산해준다. 실제 와선은 수개의 수치점으로 형성이 되며, 와선의 요소길이(두 수치점 사이의 길이)가 처음의 두 배 이상이 되면 새로운

수치점을 삽입한다. 식 (15)는 식 (12)를 수행할 때에 적용되며, 시간적분을 위해서는 4차 정확도의 Runge-Kutta적분, 공간에 대해서는 7개 적분점을 갖는 Gaussian quadrature를 사용하였다.

본 연구에서처럼 비정상 거동을 하는 문제로 많은 수치계산 시간을 요구하는 경우에는 정확한 와선 거동의 예측이 정확한 음향장 계산을 위해 곡선형상을 정확히 묘사할 수 있는 곡선식이 필요하다.

3. 결과 및 토의

타원형 고리와의 음향장해석에 앞서 타원형 고리와의 거동을 Dhanak과 de Bernardinis⁽⁸⁾의 결과와 비교 검토하기로 한다. 초기 타원형 고리와의 장축의 방향을 x_1 , 단축의 방향을 x_2 로 하고, 타원의 중심을 원점으로 하며, 와도중심은 x_3 방향으로 자체유도속도에 의하여 움직이게 된다. 순환의 세기 Γ 는 4π 로 한다. 타원형 고리와의 거동은 장단비(타원의 장축을 a , 단축을 b 라 할 때 장단비는 b/a)가 0.8, 0.6, 0.4인 경우에 대하여 계산하였다. 모든 변수들에 대한 차원은 무차원화하였다. 즉, 속도는 $U_0 = \Gamma/4\pi R_0$ 로 무차원화하고, 길이는 $R_0 = \sqrt{A/\pi}$ 로 무차원화하며, 시간은 R_0/U_0 로 무차원화하였다. 여기서 무차원길이를 나타낼 때 쓰이는 A 는 초기 와선으로 싸여 있는 내부의 면적이다. 수치계산에 사용된 시간간격은 특별히 명시하지 않는 한 $\Delta t = 0.001$ 로 하였다.

Fig. 1은 장단비가 $b/a = 0.6$ 인 경우의 전개 형태이다. 그림에서 알 수 있듯이 타원형 고리와는 자체유도속도(self-induced velocity)로 움직이면서 와선의 곡률에 변화를 가져오게 되며, 주기적으로

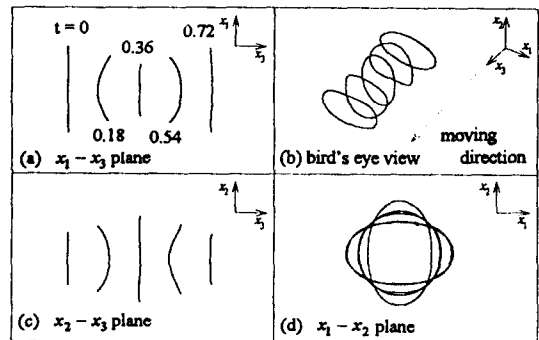


Fig. 1 Evolution of an elliptic vortex ring for $b/a = 0.6$

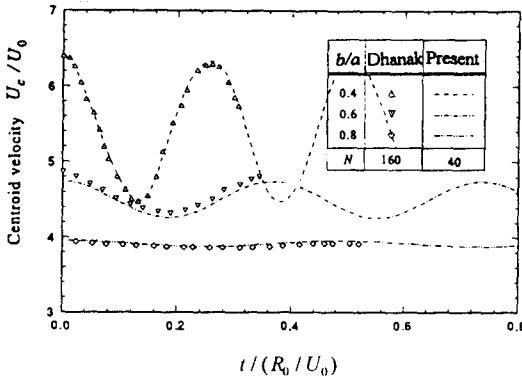


Fig. 2 Plot of nondimensional centroid velocity vs. nondimensional time for an elliptic vortex ring

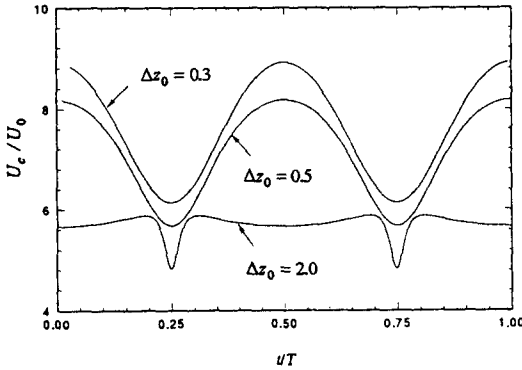


Fig. 3 Translating speed of the vorticity centroid during the mutual threading motion of two circular coaxial vortex ring, $U_0 = \Gamma / 4\pi R_0$

장축과 단축의 방향이 교번하는 축 스위칭현상 (axis switching phenomenon)이 존재함을 알 수 있다. Fig. 2는 와도중심의 이동속도를 나타낸 것으로 장단비가 $b/a=0.8$ 과 0.6 에 대해서는 주기성이 존재한다고 볼 수 있으나, $b/a=0.4$ 인 경우엔 주기성이 파괴되는 경향이 관찰된다.

본 연구에서처럼 와선을 수학적인 곡선식으로 표현했을 때엔 여러 가지 장점을 가지며, 특히 곡률의 커다란 변화가 있을 때, 또는 곡선의 길이가 늘어났을 때 곡선의 해상도를 증가시키기 위한 점의 삽입이 매우 용이할 뿐만 아니라, 음향장해석이나 공력해석시 식 (11), 식 (12) 그리고 식(14)의 체적 적분을 선적분으로 바꿀 때 그 계산이 용이하다는 것이다.⁽¹¹⁾

Kambe와 Minota⁽⁶⁾는 동축 선상에 두개의 원형

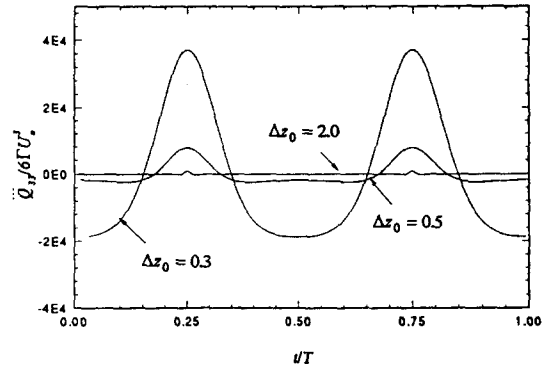


Fig. 4 Acoustic signals during the mutual threading motion of two circular coaxial vortex ring, $U_0 = \Gamma / 4\pi R_0$

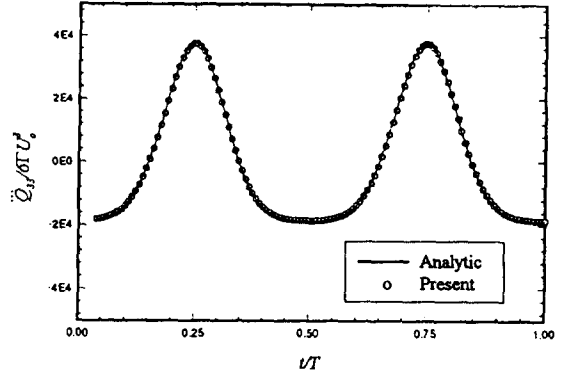


Fig. 5 Comparison of the calculated acoustic signal with an analytic one for circular coaxial vortex ring

고리와의 중심이 존재하는 완전한 축대칭 흐름에 대하여 Dyson⁽⁹⁾의 식을 이용하여 고리와의 상호관통 (mutual threading) 문제와 고리와의 정면충돌 (head-on collision) 문제에 대하여 해석하였다. 여기서, 상호관통현상이란 서로 유도되는 속도에 의하여 두 고리와 중에서 뒤따르는 고리와가 앞서가는 고리와의 안쪽으로 빨리 들어가 앞질러가며 다시 이런 현상이 계속 반복되는 것을 말한다. 본 연구에서는 Gibson⁽¹²⁾이 제안한 식을 가지고 Kambe와 Minota의 결과와 동일한 결과를 얻을 수 있었고, 이 결과를 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다. 코어반경은 $c_0/R_0=0.05$ 이고, 초기 간격 $\Delta z_0/R_0$ 가 $0.3, 0.5, 2.0$ 일 때 주기 $T/(R_0/U_0)$ 는 각각 $0.13, 0.326, 3.76$ 으로 나타남을 알 수 있다. 여기서 Δz_0 는 초기 두 타원형 고리와가 x_1-x_2 평면상

에 평행하게 놓여 있으면서 x_3 축 방향으로 서로 떨어져 있는 거리를 나타낸다.

고리와의 형성은 제트흐름과 같은 실제 흐름에서 유동의 불완전성에 의해서 고리와가 형성된다. 이러한 제트흐름은 와의 쌍운동(vortex pairing motion)을 동반하며, 쌍소음(pairing noise)을 유발한다고 알려져 있다. 한편 Bridges와 Hussain⁽¹³⁾은 더 중요한 소음의 원인으로 와류의 터짐효과(vortex bursting effect)라고 주장한다. 두 고리와의 상호관통문제는 실험실에서 실험을 통해 증명된 현상이고, Kambe와 Minota⁽⁶⁾의 계산을 통해 볼 때 소음에 커다란 영향을 주고 있음을 알 수 있다.

무차원화된 음향신호 $Q_{33} = \sum \Gamma R^2 x_3$ 라 할 때, 이것의 시간에 따른 변화를 해석적으로 계산하고, 이 결과를 쌍곡선 혼합함수를 이용한 수치적인 선적분 결과와 비교하여 Fig. 5에서 보는 바와 같이 매우

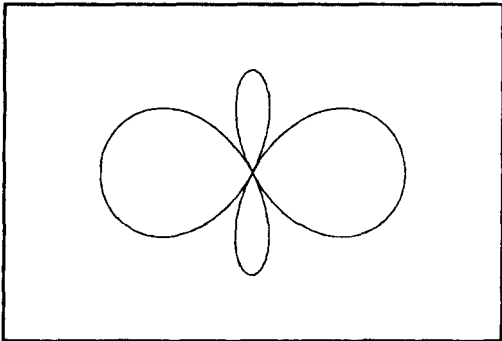


Fig. 6 Directivity pattern during the mutual threading motion of the circular coaxial vortex ring (x_1-x_3 plane)

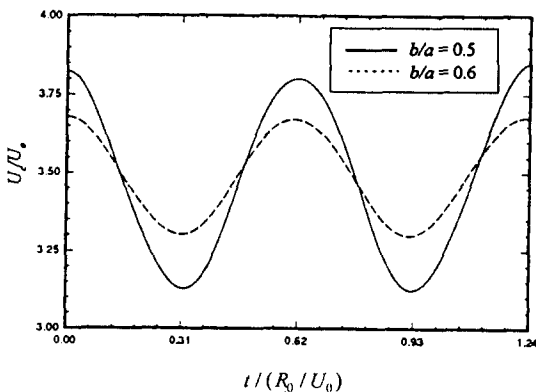


Fig. 7 Translating speeds of the vorticity centroids during the evolution of two vortex rings for $b/a=0.5$ and 0.6

정확히 일치함을 알 수 있었다. 이 때 초기 무차원화된 고리와의 간격은 $\Delta z_0/R_0=0.3$ 이고, 해석적으로 계산할 때 무차원화된 코어반경은 $c_0/R_0=0.05$ 로 하였다. 식 (12)에서 코어반경을 0.0796으로 했을 때, 링의 이동속도는 Gibson 식의 결과와 일치한다. Fig. 6은 상호관통하는 경우의 방향성(directionality) 형태로서, 전형적인 사극 음원(quadrapole)의 형태를 보여 준다. 타원형 고리와에 대한 음향학적인 계산결과는 방향성에서 놓고 볼 때 원형 고리와처럼 전형적인 사극자의 음원 형식을 파악할 수 있다. Fig. 7과 Fig. 8에서는 타원형 고리와 하나가 전개될 때 장단비 b/a 가 0.5와 0.6인 경우에 대하여 와도중심속도와 방향성을 각각 도시하였다. Fig. 8에서 장축방향으로의 음압이 단축방향으로의 음압보다 더 큼을 유의할 필요가 있다. 이는 장축방향지점의 와선의 곡률이 단축방향보다 더 커서, 즉 자체유도속도가 더 커짐으로 해서 생기는 결과이다. 타원형 고리와의 음향학적인 특성

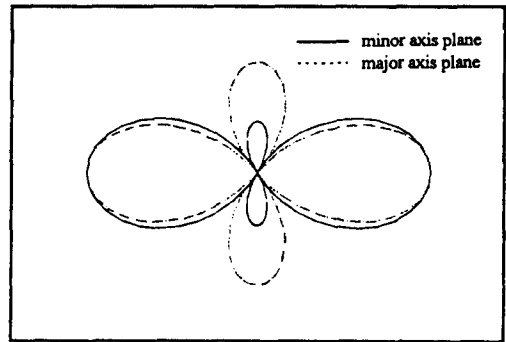


Fig. 8 Absolute value of the instantaneous intensity of an elliptic vortex ring for $b/a=0.6$

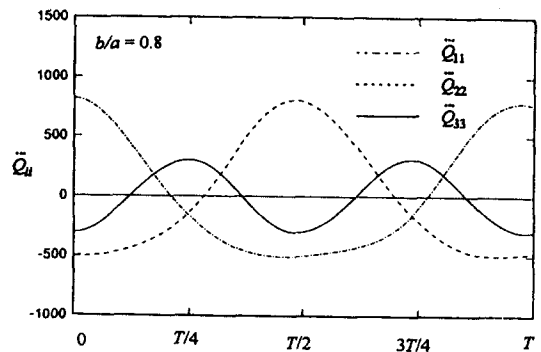


Fig. 9 Far field acoustic pressure fluctuations during the evolution of an elliptic vortex ring for $b/a=0.8$

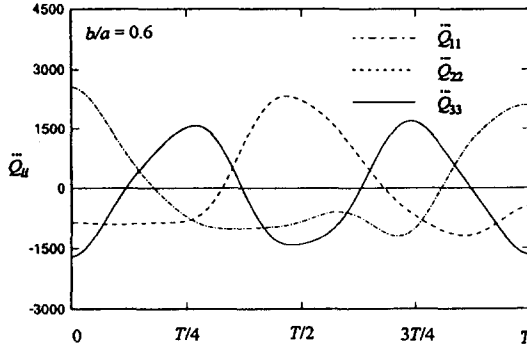


Fig. 10 Far field acoustic pressure fluctuations during the evolution of an elliptic vortex ring for $b/a=0.6$

은 거동 자체가 완전한 삼차원 거동을 하기 때문에 축대칭한 현상이 사라지고, 축대칭하지 않은 음향학적인 방향성을 갖게 됨을 알 수 있다. Fig. 9와 Fig. 10은 각각 $b/a=0.8$ 과 0.6 인 하나의 등가 단면적을 갖는 타원형 고리와의 거동할 때 무차원화된 음압신호 Q_{ii} 를 나타낸 것이다. 이 때 무차원화된 시간증분 $\Delta t/(R_0/U_0)=0.001$ 로 하였다. 등가 단면적이란 기준된 원의 면적과 동일한 타원형 면적을 의미한다. 이 때 각각의 무차원화 된 주기는 1.22 와 1.23 을 갖는다. 한 주기 동안에 Q_{33} 신호는 동일한 주기 $T(R_0/U_0)$ 를 갖으며, Q_{11} 과 Q_{22} 는 반주기를 갖음을 알 수 있다. Fig. 9에서 $b/a=0.8$ 인 경우 Q_{11} 과 Q_{22} 는 거의 같음을 알 수 있다. $b/a=0.6$ 인 경우, 음압신호는 약간 불안정한 정현파 특성을 갖으며, 이는 장단비가 작아질수록 더 심해진다.

상호관통하는 두 타원형 동축 고리와의(coaxial vortex ring)에 대해서 전개형상과 음압변화를 Fig. 11과 Fig. 12에 각각 나타내었다. 이 때 두 타원형 고리와의 초기 간격 $\Delta z_0/R_0=0.5$ 이고, 시간간격 $\Delta t/(R_0/U_0)=0.0005$ 로 하였다. 초기 타원형의 장축의 방향이 서로 동일한 상태에서 놓여지며, 와선으로 싸여진 면적은 등가 단면적을 갖는다. 그림에서처럼 $t/(R_0/U_0)=0.08, 0.24, 0.44, 0.62$ 근방에서 상호관통현상이 생기게 된다. 음압신호는 바로 이 순간에 제일 크게 나타난다. Fig. 12에서 상호관통 주기 $T/(R_0/U_0)$ 는 대략 0.36 임을 알 수 있다. 두 타원형 고리와의 상호작용할 때 대표적인 거동현상으로 축 스위칭 거동과 상호관통 현상이 발생하고 있음을 알 수 있다. 일반적으로

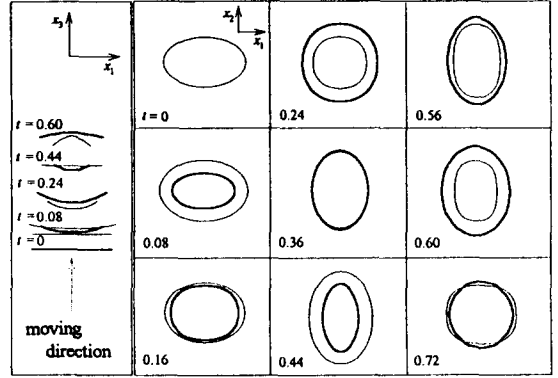


Fig. 11 Evolution view of two coaxial elliptic vortex rings for $b/a=0.6, \Delta z_0/R_0=0.5$

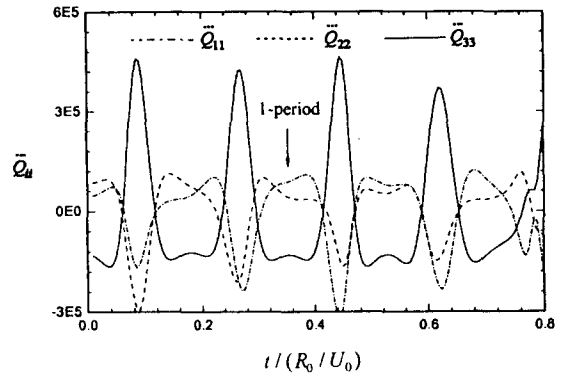


Fig. 12 Far field acoustic pressure fluctuations during the evolution of two coaxial elliptic vortex rings for $b/a=0.6, \Delta z_0/R_0=0.5$

상호관통현상은 실험으로 관찰할 때 2회정도 발생하며,⁽¹⁴⁾ 그 다음부터는 와도의 확산과 불안정성에 의해 관찰되지 않음을 알 수 있는데, 본 계산결과에서 2회까지의 상호관통 결과를 놓고 본다면 원거리 음압강도는 초기 타원형 고리와의 단축방향으로의 음압이 장축방향의 음압보다 더 지배적임을 Fig. 12를 통해서 대략적으로 알 수 있다. 이는 실험에서도 관찰되는 결과이다.⁽¹³⁾

기존의 연구를 보면 Möhring⁽¹⁵⁾이 타원형 고리 와에 대해서 LIA방법을 이용하여 음장계산을 시도하였으나, LIA방법은 와선의 코어가 충분히 작다는 가정하에 유도속도를 곡률의 함수로 가정하여 계산한 것이다. 따라서 Arms와 Hama⁽⁷⁾의 결과에서 보듯이 이 방법은 와선을 표현하는 수치점들이 부드러운 곡선의 형상을 나타내지 않고 있음을 그들의 결과에서 관찰할 수 있다. 이러한 수치적 오

차는 와선의 운동학적인 면에서는 사소한 것 같지만, 음향학적 관점에서는 원거리 음압이 와선 위치의 시간에 대한 삼차 미분형태로 나타나기 때문에 치명적인 오차를 유발하게 된다. Möhring은 LIA 방법을 이용하였고, 선적분을 수행할 때 와선을 나타내는 4개의 수치점들로 사다리꼴 적분을 통해서 수치 개산을 수행하였으며, 결과를 보면 운동학적 관점에서는 고리와가 부드럽게 움직이는 것처럼 보이지만 그의 음압 해석결과는 심하게 교란된 파동현상(Fig. 3⁽¹⁵⁾)이 나타나고 있음을 관찰할 수 있다. 본 연구를 통해서 쌍곡선 혼합함수는 와선의 공간에 대한 1계 미분이 모든 위치에 따라서 연속적으로 유지되며, 와선의 비정상 거동뿐만 아니라 음장계산에 정확하게 계산을 수행할 수 있음 Fig. 3과 Fig. 4에서 나타냈듯이 엄밀해와 비교함으로써 알 수 있다. 식 (10)을 이용한 음장해석은 간단한 원형 또는 타원형 고리와에 국한되지 않고 자유로운 형상을 갖는 삼차원 와선의 비정상 거동, 예를 들면 헬리콥터 로터의 익단 와(tip vortex)가 물체에 부딪치는 경우에 대한 해석도 가능하다 하겠다.

4. 결 론

본 연구에서는 완전한 삼차원 거동을 하는 와선의 비정상 거동에 의한 원거리 음장해석을 위해 수치계산의 정확도와 응용범위를 넓히기 위한 수치적 방법으로 와선을 나타내는 곡선식을 쌍곡선 혼합함수를 사용하였다. 삼차원 와선의 대표적 예로 타원형 고리와에 대해서 와선의 운동해석을 통해 원거리에서의 음향장 계산을 정확히 이룰 수 있었다. 하나의 원형 고리와가 전개시에는 원거리에서 음압의 변동이 없으나 타원형 고리와의 경우엔 와선의 국부 이동속도가 위치마다 다르게 되는 비정상 거동을 하게 되며, 이에 의하여 원거리 음압의 변화를 야기시킴을 알 수 있었고, 초기 등가 단면적을 갖는 경우에 대해 하나의 타원형 고리와에 대한 음향학적 세기 비교를 통해 볼 때 동축방향엔 별 차이가 없으나 장축과 단축방향에서는 주기적인 신호의 진동현상을 알 수 있었고, 초기 움직이는 순간에 발생하는 음압은 장축방향이 단축방향보다 크게 나타났다. 두 타원형 고리와를 자유유동장에 놓았을 때는 축 스위칭 거동과 상호관통현상을 동시에 일으키며, 이러한 거동이 원거리 음압변동에 커다란 영향을 주고 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Lighthill, M. J., 1952, "On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory," *Proceedings of the Royal Society of London*, 211A, 1107, pp. 564~587.
- (2) Lighthill, M. J., 1954, "On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound," *Proceedings of the Royal Society of London*, 222A, 1148, pp. 1~32.
- (3) Powell, A., 1964, "Theory of Vortex Sound," *J. Acoustical Society of America*, Vol. 36, No. 1, pp. 177~195.
- (4) Howe, M. S., 1975, "Contribution to the Theory of Aerodynamic Sound, with Application to Excess Jet Noise and the Theory of the Flute," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 71, pp. 625~673.
- (5) Möhring, W., 1978, "On Vortex Sound at Low Mach Number," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 85, pp. 685~691.
- (6) Kambe, T. and Minota, T., 1981, "Sound Radiation from Vortex Systems," *J. Sound and Vibration*, Vol. 74, No. 1, pp. 61~72.
- (7) Arms, R. J. and Hama, F. R., 1965, "Localized Induction Concept on a Curved Vortex and Motion of an Elliptic Vortex Ring," *Physics of Fluids* Vol. 8, pp. 553~559.
- (8) Dhanak, M. R. and de Bernardinis, B., 1981, "The Evolution of an Elliptic Vortex Ring," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 109, pp. 189~216.
- (9) Dyson, D. G., 1893, "The Potential of an Anchor Ring-Part II," *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A184, pp. 1041~1101.
- (10) Ryu, K. W. and Lee, D. J., 1994, "Numerical Simulation of Evolutions of a Vortex Ring and its Interactions with a Rigid Sphere," The 1st International Conference on Flow Interaction, Sep., Hong Kong.
- (11) Ryu, K. W. and Lee, D. J., 1996, "Sound Generation from Evolution of Elliptic Vortex Ring and a Vortex Ring Interaction with a Rigid Sphere," *AIAA Paper* 96-0876, Jan.
- (12) Gibson, I. S., 1972, "Application of the Vortex

- Singularities to Ducted Propellers," Ph. D. Thesis, University of the Newcastle upon Tyne.
- (13) Bridges, J. E. and Hussain, A. K. M. F., 1987, "Roles of Initial Condition and Vortex Pairing in Jet Noise," *J. Sound and Vibration*, Vol. 117 No. 2, pp. 289~311.
- (14) Yamada, H. and Matsui, T., 1978, "Preliminary Study of Mutual Slip-through of a Pair of Vortices," *Physics of Fluids*, Vol. 21 pp. 292~294.
- (15) Möhring, W., 1990, "Sound Radiation by Two Elliptic Vortex Rings," *J. Sound and Vibration*, Vol. 140, pp. 155~162.