

〈논 문〉

순환 다물체동역학에서의 비순환적인 동하중해석 공식

김성수* · 유진영**

(1996년 10월 25일 접수)

A Non-recursive Formulation of Dynamic Force Analysis in Recursive Multibody Dynamics

Sung-Soo Kim and Jin-Young You

Key Words : Recursive Multibody Dynamics(순환 다물체동역학), Dynamic Force Analysis(동하중해석), Multibody System(다물체 시스템), Joint Relative Coordinate(조인트 상대 좌표)

Abstract

An efficient non-recursive formulation of dynamic force analysis has been developed for serially connected multibody systems. Although derivation of equations of motion is based on a recursive dynamic formulation with joint relative coordinates, in the proposed formulation, dynamic forces such as joint reaction forces and driving force are computed non-recursive for specified joints. The efficiency of the proposed formulation has been proved by the operational count and the CPU time measure, comparing with that of the conventional recursive Newton-Euler formulation. A simulation of 7-DOF RRC robot arm has been carried out to validate solutions of reaction forces by comparing with those from a commercial dynamic analysis program DADS.

1. 서 론

컴퓨터 시뮬레이션을 이용한 자동차, 군용장비, 로봇 등 기계 시스템의 설계를 위하여 많은 종류의 다물체동역학 해석 프로그램들이 개발되어 왔다.⁽¹⁾ 이러한 시뮬레이션에 의한 설계방법은 시제품(prototype)의 제작 및 실험빈도를 줄임으로써 생산비용 절감에 기여하고 있다. 특히 동하중해석은 시스템 설계 및 그 시스템을 이루고 있는 부품의 응력해석이나 내구도 해석에 있어서 필수적이다. 이러한 동하중해석은 조인트반력 해석과 원하는 운동을 일으키게 하는 구동력 해석으로 나누어 생각

할 수 있는데, 전자는 시스템을 구성하고 있는 부품의 구조설계 및 마찰력을 고려한 시뮬레이션에 필요하고, 후자는 기계 시스템의 액츄에이터(actuator)의 용량결정 또는 역동역학적 힘 분석을 통한 제어를 위해 수행되는 해석이다.

다물체 시스템의 동하중해석은 다물체동역학 알고리즘과 밀접한 관계를 가지고 있다. 직교좌표계(Cartesian coordinates)를 이용한 다물체동역학 알고리즘은 70년대 초반부터 인공위성 해석을 위해서 개발되기 시작했으며,⁽²⁾ DADS⁽³⁾나 ADAMS⁽⁴⁾ 등 범용 프로그램들의 출현과 더불어 주로 자동차, 항공기, 건설장비, 군용장비 등 여러 분야에서 사용되어 왔다. 이러한 범용동역학 프로그램에서 사용되고 있는 알고리즘은 각 물체 사이의 연결관계를 기구학적인 구속조건으로 정의하여 라그랑지승

*회원, 충남대학교 메카트로닉스공학과

**충남대학교 대학원 메카트로닉스공학과

수에 의한 동하중(조인트반력)을 계산하고 있다.⁽⁵⁾ 하지만 이러한 방법은 매우 큰 시스템 방정식을 풀어야 한꺼번에 모든 동하중을 구하게 되어 비효율적이다.

80년대 후반부터 병렬 컴퓨터의 출현과 그에 상응하는 실시간(real time) 동력학 해석 알고리즘의 개발로 시뮬레이션에 의한 설계방법은 이제 가상 시제품(virtual prototype)을 이용한 설계를 시도하고 있다.⁽⁶⁾ 이러한, 시뮬레이션에 의한 설계방법의 변화는 기존의 범용동역학 해석 프로그램에서 사용하고 있는 직교좌표 알고리즘과는 달리, 조인트 상대좌표계를 이용한 효율적인 순환 동력학 공식(recursive dynamic formulation) 개발에 기인한다.⁽⁷⁻⁹⁾ 하지만 이러한 순환공식에서 동하중 계산은 로봇틱스분야에서 사용되고 있는 뉴턴-오일러방정식⁽¹⁰⁾에 근거하여 순환적으로 조인트의 동하중을 구하도록 되어 있다. 그러나 다물체 시스템에서 순환적으로 모든 조인트의 동하중을 구하는 것은 구동기가 장착된 일부 조인트의 구동력 계산과 특정한 조인트의 조인트반력 계산시 비효율적이다.

따라서 본 논문에서는 기계 시스템의 설계시 필수적인 동하중해석을 위하여 기존의 뉴턴-오일러 공식에 의한 순환적인 동하중 계산과는 달리 선택된 조인트의 구동력 및 반력을 계산할 수 있는 보다 효율적인 알고리즘을 제시하고자 한다. 이 공식에서 운동방정식의 도출은 효율적인 순환공식을 이용하지만 동하중 계산은 비순환적으로 선택된 조인트에 관하여 고려할 수 있도록 한다.

2. 순환공식을 이용한 운동방정식

2.1 순차적으로 연결된 다물체 시스템의 기구학
 순차적으로 연결되어 있는 다물체 시스템의 기구학적 관계를 정의하기 위하여, Fig.1은 서로 상대 병진운동과 회전운동을 하는 연결된 2개의 강체를 나타내고 있다. 물체 *i*의 위치벡터 r_i 는 대역 $x-y-z$ 좌표계의 원점으로부터 물체 *i*의 물체 기준 좌표계인 $x'_i-y'_i-z'_i$ 의 원점까지의 거리를 나타낸다. $x''_i-y''_i-z''_i$ 좌표계는 조인트를 정의하기 위한 조인트 기준좌표계로 조인트가 위치한 O''_i 에 고정되어 있다. 또한 물체 *i*의 조인트좌표계의 위치를 나타내는 s''_i 는 물체 *i*의 물체 기준좌표계 $x'_i-y'_i-z'_i$ 에서 표현된 위치벡터이다. 벡터 d_{ij} 는 조인트를 통한 물체 *i*와 물체 *j*의 상대병진운동을 나타내기 위한

벡터이다. 즉 물체 *i*의 $x''_i-y''_i-z''_i$ 조인트좌표계의 원점으로부터, 물체 *j*의 물체 기준좌표계 $x'_j-y'_j-z'_j$ 원점까지의 위치벡터다. 그리고 벡터 s_{jk} 는 물체 *j*상의 바깥쪽 물체 *k*와 연결된 조인트의 위치를 나타내는 위치벡터이다.

$x'_i-y'_i-z'_i$ 는 물체의 무게중심에 위치한 좌표계이며, 이 축에 관하여 관성모멘트가 정의된다. 그리고 r''_i 는 물체의 무게중심까지의 위치벡터를 나타낸다. 보통, 물체의 운동을 나타내기 위해서 물체 기준좌표계는 물체의 무게중심(center of gravity point)에 설정하지만, 본 연구에서는 물체의 조인트좌표계와 일치시킴으로써 자세(orientation)를 나타내는 직교변환행렬(orthogonal transformation matrix)을 효율적으로 계산할 수 있도록 하였다.⁽⁹⁾

위의 물체 기준좌표계와 조인트 기준좌표계를 이용한 순환적인 물체의 자세를 위한 직교변환행렬의 계산은 다음과 같다.

$$A_j = A_i C_{ij} A''_j \quad (1)$$

여기서, A_j 는 물체 *j*의 자세행렬(orientation matrix), A_i 는 물체 *i*의 자세행렬, C_{ij} 는 물체 $x''_i-y''_i-z''_i$ 로부터 $x'_i-y'_i-z'_i$ 의 직교변환행렬, 그리고 A''_j 는 $x'_j-y'_j-z'_j$ 로부터 조인트좌표계 $x''_j-y''_j-z''_j$ 로의 직교변환행렬이다.

또한 Fig.1에서 물체 *j*의 위치벡터 r_j 는 식 (2)와 같이 물체 *i*의 위치벡터 r_i 와 물체 *i*의 조인트까지의 위치벡터 s_{ij} , 그리고 조인트에서 물체 *j*의 물체 기준좌표계의 원점까지의 벡터 d_{ij} 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$r_j = r_i + s_{ij} + d_{ij}$$

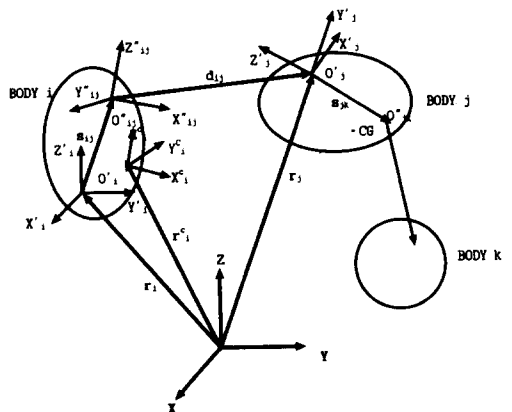


Fig. 1 A pair of connected bodies

$$= \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_{ij} + \mathbf{A}_i \mathbf{C}_{ij} \mathbf{d}''_{ij}(q_j) \quad (2)$$

여기서, q_j 는 물체 j 의 물체 기준좌표의 $x''_{ij}-y''_{ij}-z''_{ij}$ 에 대한 상대운동을 나타내는 조인트좌표이다.

물체 j 의 직교좌표의 각속도(Cartesian angular velocity)는 식 (3)과 같이 나타내어진다.

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{ij} = \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{H}_j \dot{q}_j \quad (3)$$

여기서, $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 는 물체 i 와 j 사이의 조인트 상대각속도(relative angular velocity)이고, q_j 와 \dot{q}_j (joint relative coordinate velocity)의 함수로 나타내어진다. \mathbf{H}_j 벡터는 조인트의 회전축방향을 나타내는 단위벡터이다.

물체 j 의 병진속도는 식 (2)를 미분하고, 식 (3)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{r}}_j \boldsymbol{\omega}_j = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{d}_{ij}}{\partial q_j} + \dot{\mathbf{r}}_j \mathbf{H}_j \right) \dot{q}_j \quad (4)$$

여기서, $\dot{\mathbf{r}}$ 는 아래와 같은 행렬을 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

또한 운동방정식을 단순한 형태로 유도하기 위해 식 (3)과 (4)를 이용하여 상태벡터(state vector notation)를 정의하면, 물체 i 와 j 의 순환적인 속도 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁷⁾

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \hat{\mathbf{Y}}_i + \mathbf{B}_j \dot{q}_j \quad (6)$$

여기서, $\hat{\mathbf{Y}}_j \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{r}}_j \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{Y}}_i \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}$ 는 물체 i 와 j 의 상태벡터이며, $\mathbf{B}_j \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}_{ij}}{\partial q_j} + \dot{\mathbf{r}}_j \mathbf{H}_j \\ \mathbf{H}_j \end{bmatrix}$ 는 조인트에 따른 속도변환행렬이다.

한편 물체 j 에 대한 직교속도는 아래와 같이 상태벡터로부터 얻어질 수 있다.

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{T}_j^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_j \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{T}_j^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\dot{\mathbf{r}}_j \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix}$ 이다.

물체 j 와 물체 i 의 가속도의 관계식은 식 (6)을 미분하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_j &= \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i + \mathbf{B}_j \ddot{q}_j + \dot{\mathbf{B}}_j \dot{q}_j \\ &= \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_i + \mathbf{B}_j \ddot{q}_j + \mathbf{D}_j \end{aligned} \quad (8)$$

위의 상태가속도와 직교좌표 가속도와의 관계는 식 (7)을 미분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}_j &= \mathbf{T}_j^{-1} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_j + \dot{\mathbf{T}}_j^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_j \\ &= \mathbf{T}_j^{-1} \dot{\hat{\mathbf{Y}}}_j - \mathbf{R}_j \end{aligned} \quad (9)$$

다물체 시스템의 순환적인 기구학을 설명하기 위하여 먼저 Fig.2와 같은 연쇄적으로 연결된 강체체인 시스템을 생각할 수 있다.

우선 각 조인트의 좌표의 위치, 속도, 가속도가 정해지면 각 물체의 관성좌표계에 관한 자세와 위치는 식 (1)과 (2)에 의하여, 또한 각 물체의 직교속도와 각속도, 직교가속도, 회전가속도는 식 (6), (7)과 식 (8), (9)에 의하여 물체 0에서부터 물체 n 까지 순차적으로 구해질 수 있다.

2.2 다물체 운동방정식을 위한 순환공식

Fig.2에 나타난 바와 같이 연쇄적으로 이어진 n 개의 조인트와 $n+1$ 개의 물체에 관한 시스템 운동방정식은 각각의 물체의 상태벡터를 이용한 가상일에 의한 운동방정식을 더함으로써 세울 수 있다. 이러한 가상일에 의한 운동방정식은 앞 절의 기구학적 순환관계식을 이용하여 조인트좌표에 관한 가상일의 운동방정식으로 역순환적으로 변환할 수 있다.

상태벡터를 이용한 가상일에 의한 운동방정식은 식 (10)과 같다.⁽⁷⁾

$$\sum_{i=0}^n \delta \hat{\mathbf{Z}}_i^T (\hat{\mathbf{M}}_i \hat{\mathbf{Y}}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i) = 0 \quad (10)$$

여기서, $\delta \hat{\mathbf{Z}}_i \equiv \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \delta \boldsymbol{\pi}_i \\ \delta \boldsymbol{\pi}_i \end{bmatrix}$ 는 상태벡터의 변분(variation)으로, 조인트의 연결구속조건을 만족하는 변분이다.

또한 $\delta \mathbf{r}_i$, $\delta \boldsymbol{\pi}_i$ 은 병진가상변위와 회전자상변위를 나타낸다. $\hat{\mathbf{M}}_i$ 은 상태관성행렬(state mass matrix)

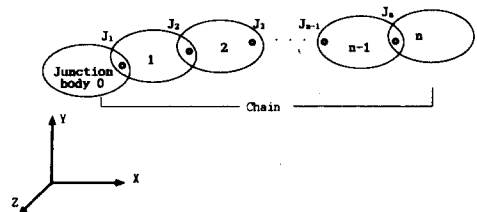


Fig. 2 A serially connected multibody system

이며, \hat{Q}_i 은 상태 힘 벡터 (state generalized force vector)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{M}_i = \begin{bmatrix} m_i I & -m_i \tilde{r}_i^c \\ m_i \tilde{r}_i^c & J_i - m_i \tilde{r}_i^c r_i^c \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\hat{Q}_i = \begin{bmatrix} f_i^c + m_i \tilde{r}_i^c \omega_i \\ n_i^c + \tilde{r}_i^c f_i^c + m_i \tilde{r}_i^c \tilde{r}_i^c \omega_i - \tilde{\omega}_i J_i \omega_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (11)에서 m_i 는 물체 i 의 질량 J_i 는 물체 무게 중심 좌표계 $x_i^c - y_i^c - z_i^c$ 에 관한 관성모멘트, r_i^c 는 무게 중심까지의 위치 벡터를 나타낸다. 식 (12)에서 f_i^c 는 물체 중심에 작용하는 외력이며, n_i^c 는 물체 i 에 작용하는 우력모멘트를 나타낸다.

역순환 (backward recurrence)을 사용하기 위해 식 (6)으로부터 물체 i 와 $i-1$ 사이에서의 상태 벡터 변분은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \hat{Z}_i = \delta \hat{Z}_{i-1} + B_i \delta q_i \quad (13)$$

여기서, δq_i 는 조인트 좌표의 가상변위이다.

또한 물체 i 에 대한 상태 가속도 벡터는 식 (8)을 순환적으로 적용시켜 물체 0 (base body)에 대한 상태 가속도 \hat{Y}_0 와 연쇄적인 체인 시스템의 조인트 상태 가속도로 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \hat{Y}_{i-1} + B_i \hat{q}_i + D_i \\ &= \hat{Y}_{i-2} + \sum_{k=i-1}^i (B_k \hat{q}_k + D_k) \\ &\quad \vdots \\ &= \hat{Y}_0 + \sum_{k=1}^i (B_k \hat{q}_k + D_k) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)를 식 (10)에 바깥쪽 물체 n 부터 대입하여 역순환적으로 조인트 좌표 변환식을 유도해 나가면, 다음과 같은 조인트 좌표 공간에서의 시스템 운동방정식을 얻을 수 있다.⁽⁷⁾

$$M \hat{q} = P \quad (15)$$

여기서,

$$M = \begin{bmatrix} B_n^T K_n B_n & B_n^T K_n B_{n-1} & \cdots & B_n^T K_n B_1 & B_n^T T_n \\ B_{n-1}^T K_{n-1} B_{n-1} & \cdots & B_{n-1}^T K_{n-1} B_1 & B_{n-1}^T K_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{symm} & & B_1^T K_1 B_1 & B_1^T K_1 \\ & & & K_0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{q} = [\hat{q}_n \ \hat{q}_{n-1} \ \cdots \ \hat{q}_2 \ \hat{q}_1 \ \hat{Y}_0]^T$$

$$P = \begin{bmatrix} B_n^T (L_n - K_n \sum_{i=1}^n D_i) \\ B_{n-1}^T (L_{n-1} - K_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} D_i) \\ \vdots \\ B_2^T (L_2 - K_2 \sum_{i=1}^2 D_i) \\ B_1^T (L_1 - K_1 D_1) \\ L_0 \end{bmatrix}$$

또한 시스템 관성행렬 M 과 시스템 힘 벡터 P 의 요소들인 K_i 와 L_i 에 관하여 다음과 같은 역순환 공식이 유도된다.

$$K_n = \hat{M}_n \quad (16)$$

$$K_i = K_{i+1} + \hat{M}_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$$

$$L_n = \hat{Q}_n$$

$$L_i = \hat{Q}_i + (L_{i+1} - K_{i+1} D_{i+1}) \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \quad (17)$$

3. 다물체 시스템의 동하중 해석 공식

3.1 조인트 반력 해석

Fig. 3은 연쇄적으로 연결된 물체의 자유물체선도 (free body diagram)를 나타낸다.

Fig. 3에서 $f_{i,i-1}^c$, $n_{i,i-1}^c$ 은 물체 i 에 작용하는 물체 기준 좌표계에서 표시된, 물체 $i-1$ 과 연결된 조인트에 의한 조인트 반력과 모멘트이며, 마찬가지로 $f_{i,i+1}^c$, $n_{i,i+1}^c$ 는 물체 i 에 작용하는 조인트 좌표계 $x'' - y'' - z''$ 에서 표현된 조인트 반력과 모멘트 벡터를 나타낸다. 또한 $f_{i+1,i}^c$, $n_{i+1,i}^c$ 는 물체 $i+1$ 에 작용하는 물체 기준 좌표계에서 표시된, 물체 i 에 연결된 조인트에 의한 조인트 반력과 모멘트이다.

물체 i 와 $i+1$ 사이에 작용하는 조인트 반력 벡터는 아래와 같이 관성 좌표계에서 표시될 수 있다.

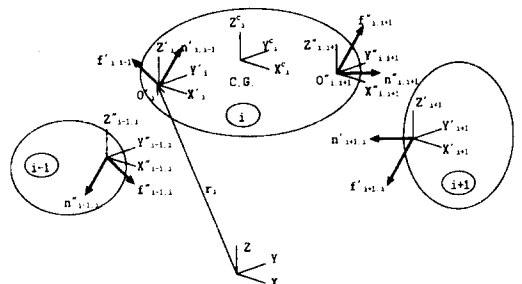


Fig. 3 A free body diagram of a body

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,i+1} &= \mathbf{A}_i \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{f}''_{i,i+1} \\ \mathbf{n}_{i,i+1} &= \mathbf{A}_i \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{n}''_{i,i+1} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i+1,i} &= \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{f}'_{i+1,i} \\ \mathbf{n}_{i+1,i} &= \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{n}'_{i+1,i} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,i-1} &= \mathbf{A}_i \mathbf{f}'_{i,i-1} \\ \mathbf{n}_{i,i-1} &= \mathbf{A}_i \mathbf{n}'_{i,i-1} \end{aligned} \quad (20)$$

뉴턴의 작용·반작용법칙에 의하여, 물체 i 와 $i+1$ 사이의 조인트반력은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{f}_{i,i+1} = -\mathbf{f}_{i+1,i}, \quad \mathbf{n}_{i,i+1} = -\mathbf{n}_{i+1,i} \quad (21)$$

조인트반력을 상태벡터로 표시된 운동방정식인 식 (10)에 포함시키기 위하여, 조인트반력에 의한 가상일을 구하면 식 (22)와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \delta W &= -(\delta \mathbf{r}_i - \tilde{\mathbf{s}}_i, \delta \boldsymbol{\pi}_i)^T \mathbf{f}_{i,i+1} - \delta \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{n}_{i,i+1} \\ &\quad - \delta \mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{f}_{i+1,i} - \delta \boldsymbol{\pi}_{i+1}^T \mathbf{n}_{i+1,i} \\ &= -\delta \mathbf{Z}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{s}}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i,i+1} \\ \mathbf{n}_{i,i+1} \end{bmatrix} - \delta \mathbf{Z}_{i+1}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i+1,i} \\ \mathbf{n}_{i+1,i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

또한, 직교좌표 변분과 상태벡터의 변분과는 식 (7)과 마찬가지로 관계를 갖는다. 즉, $\delta \mathbf{Z}_i = \mathbf{T}_i^{-1} \delta \tilde{\mathbf{Z}}_i$ 이며, 이것을 식 (22)에 적용하면 상태벡터의 가상변위에 의한 가상일을 식 (23)과 같이 구할 수 있다.

$$\delta W = -\delta \tilde{\mathbf{Z}}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} - \delta \tilde{\mathbf{Z}}_{i+1}^T \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i} \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i,i+1} \\ (\tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\mathbf{s}}_i) \mathbf{f}_{i,i+1} + \mathbf{n}_{i,i+1} \end{bmatrix} \text{이다.} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i+1,i} \\ (\tilde{\mathbf{r}}_{i+1} \mathbf{f}_{i+1,i} + \mathbf{n}_{i+1,i}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

한편, 식 (21)을 이용하면 상태벡터로 표시된 반작용력 $\tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}$ 과 $\tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i}$ 는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1} = -\tilde{\mathbf{R}}_{i+1,i} \quad (24)$$

그러므로 연쇄적으로 이어진 다물체 시스템의 각 조인트에 대하여, 식 (23)에 나타난 조인트반력에 의한 가상일을 구하여 식 (10)에 포함시키면 다음과 같은 운동방정식이 구해진다.

$$\begin{aligned} &\delta \tilde{\mathbf{Z}}_0^T (\tilde{\mathbf{M}}_0 \dot{\mathbf{Y}}_0 - \tilde{\mathbf{Q}}_0 - \tilde{\mathbf{R}}_{0,1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \delta \tilde{\mathbf{Z}}_i^T (\tilde{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{Y}}_i - \tilde{\mathbf{Q}}_i - \tilde{\mathbf{R}}_{i,i-1} - \tilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}) \\ &+ \delta \tilde{\mathbf{Z}}_n^T (\tilde{\mathbf{M}}_n \dot{\mathbf{Y}}_n - \tilde{\mathbf{Q}}_n - \tilde{\mathbf{R}}_{n,n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)의 운동방정식은 조인트반력을 포함하므로, 이제 상태벡터의 변분은 임의의 변분이 되어 각 상태변분의 계수, 즉 식 (25)의 괄호의 식들은 모두 0 벡터가 된다. 그러므로 $n+1$ 개의 상태벡터로 나타내어진 뉴턴-오일러운동방정식이 구해진다. ⁽¹¹⁾

일반적으로 뉴턴-오일러운동방정식에 의한 조인트반력의 계산은 물체 n 으로부터 작용·반작용원리를 적용하며, 물체 0까지 역순환적으로 구할 수 있다. 하지만 동역학 해석시 모든 조인트의 반력을 구할 필요없이 특별히 관심있는 물체의 동하중 이력(dynamic load history)을 구하기 위해서는 그 물체와 연결된 조인트의 반력만을 필요로 한다. 따라서 본 연구에서는 조인트반력 계산시 역순환적인 계산을 배제하고 선택된 조인트만의 반력을 구할 수 있는 방법을 제시한다.

조인트반력의 계산을 위해서 먼저 식 (25)에서 n 번째 물체의 운동방정식을 도출하면 식 (26)과 같다.

$$\tilde{\mathbf{M}}_n \dot{\mathbf{Y}}_n - \tilde{\mathbf{Q}}_n - \tilde{\mathbf{R}}_{n,n-1} = 0 \quad (26)$$

윗식을 조인트반력에 관하여 정리하고, 식 (16)과 식 (17)을 대입하면 아래와 같다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{n,n-1} = -\mathbf{L}_n + \mathbf{K}_n \dot{\mathbf{Y}}_n \quad (27)$$

식 (27)에서 보는 바와 같이 n 번째 조인트의 반력은 물체 n 의 상태가속도벡터가 결정되면 구해질 수 있다. 이제 $n-1$ 번째 조인트의 반력을 구하기 위하여 식 (25)로부터 물체 $n-1$ 의 운동방정식을 구하여 식 (24)와 함께 정리하면, 다음과 같이 일반적인 뉴턴-오일러 식에 의한 조인트 $n-1$ 의 반력이 구해진다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{n-1,n-2} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{M}}_{n-1} \dot{\mathbf{Y}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{R}}_{n,n-1} \quad (28)$$

식 (28)에서 보는 바와 같이 뉴턴-오일러 식에 의하여 조인트 $n-1$ 의 반력을 구하기 위해서는 식 (27)부터 수행한 후 식 (28)을 수행하여야 한다. 이러한 역순환적인 조인트반력 계산을 배제하기 위하여 n 번째 조인트반력인 식 (27)을 식 (28)에 대입한 후, 식 (8), (16), (17)을 대입하여 정리하면 $n-1$ 번째 조인트반력은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{n-1,n-2} = -\mathbf{L}_{n-1} + \mathbf{K}_{n-1} \dot{\mathbf{Y}}_{n-1} + \mathbf{K}_n \mathbf{B}_n \dot{\mathbf{q}}_n \quad (29)$$

마찬가지 방법을 역순환적으로 적용해 나가면 물체 i 의 물체 $i-1$ 과 연결된 조인트의 반력은 다음

과 같이 구해진다.

$$\hat{R}_{i,i-1} = -L_i + K_i \hat{Y}_i + \sum_{l=i+1}^n K_l B_l \hat{q}_l \quad (30)$$

식 (30)의 오른쪽 항들인 L_i , K_i , $K_l B_l$ 등은 앞 절의 시스템 운동방정식을 형성할 때 모두 계산된 값들이며, 상태가속도와 조인트좌표가속도는 시스템 운동방정식을 풀어 구해진다. 그러므로 i 번째 조인트반력은 역순환적으로 n 번째부터 $i+1$ 번째 조인트들의 반력을 구함이 없이 시스템 운동방정식을 풀어 가속도를 구한 후 직접 구할 수 있다.

식 (30)의 상태벡터로 나타낸 조인트반력을 직교좌표의 반력과 모멘트로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} f_{i,i-1} \\ n_{i,i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{r}_i & I \end{bmatrix} \hat{R}_{i,i-1} \quad (31)$$

조인트반력을 구하는 단계적인 알고리즘은 다음과 같다.

Step 1

주어진 조인트좌표의 위치를 가지고, Fig. 2의 연쇄적인 다물체 시스템의 물체 0부터 식 (1)과 (2)를 이용하여 순순환적(forward recursive)으로 물체 n 까지의 자세와 직교좌표위치를 구한다.

Step 2

주어진 조인트좌표의 속도를 가지고, Fig. 2의 연쇄적인 다물체 시스템의 물체 0부터 식 (6)과 (7)를 이용하여 순순환적으로 물체 n 까지의 상태속도와 직교속도를 구한다.

Step 3

구해진 직교위치와 속도를 가지고, 식 (11)과 (12)에 의해 각 물체의 관성행렬과 일반화된 힘을 구한다.

Step 4

역순환적으로 식 (16)과 (17)을 계산한 후 저장하고 식 (15)의 시스템 관성행렬과 시스템 힘벡터를 구하여 시스템 운동방정식을 형성한다.

Step 5

선형방정식인 식 (15)를 수치해석적인 방법으로 풀어 조인트가속도 \hat{q} 를 구한다.

Step 6

식 (8)과 (9)에 의해 상태가속도와 직교가속도를 구한다.

Step 7

식 (30)과 (31)에 의해 선택된 조인트의 반력을 구한다.

위 알고리즘은 주어진 시간 프레임에서 조인트반력을 구하는 순서만을 설명하고 있다. 그러나, 전체 시간영역에 관한 동력학 해석을 위해서는 Step 5에서 구한 조인트가속도를 수치적분하여 다음 시간 프레임의 속도와 위치를 구한 후 다시 Step 1으로 돌아가는 과정을 시뮬레이션 종료시간까지 반복하면 된다.

제안한 조인트반력을 구하는 알고리즘의 효율성을 고찰하기 위하여 일반적인 뉴턴-오일러운동방정식을 이용한 역순환적인 공식⁽¹⁰⁾과 본 논문에서 제안한 공식을 오퍼레이션 카운트(operational count)를 이용하여 비교하였다. 또한 범용 동력학 해석 프로그램 DADS나 ADAMS에서 사용되는 라그랑지승수를 이용한 직교좌표 공식은 매우 큰 행렬식을 풀어 모든 조인트의 반력을 구하므로 비효율적이다. 그러므로 비교대상에서 제외하였다.

비교에는 n 개의 회전조인트(revolute joint)가 $n+1$ 개의 물체를 연결하고 있는 다물체 시스템을 택하였고, 단지 i 번째 조인트반력을 구할 때 사용된 곱셈과 덧셈의 오퍼레이션 숫자를 비교하였다. Table 1은 제안한 공식의 효율성을 나타내고 있다.

Table 1에서 보는 바와 같이 n 번째 조인트반력을 구할 때는 계산량이 같고, 그 이외의 조인트반력을 구할 때는 제안된 방법이 효율적이다. 주된 효율성은 역순환을 시키지 않고 기존의 이미 계산된 항들을 이용하여 조인트반력을 구함으로써 얻어 짐을 알 수 있다.

3.2 조인트구동력 계산

로봇 등 다물체 기계 시스템이 유용한 운동을 하기 위해서는 조인트운동을 정의하여 기구학적으로

Table 1 Efficiency comparison between proposed method and the Newton-Euler method

Operational counter	Proposed method	Newton-Euler recursive method
No. of multiplication	$6(n-i) + 36$	$36(n-i) + 36$
No. of addition	$6(n-i) + 36$	$42(n-i) + 36$

구동(kinematically driven)이 되도록 하여야 한다. 조인트구동력의 계산은 주어진 운동을 구속조건으로 생각하여 구속조건을 만족시키도록 조인트를 움직이는 구속력을 구하는 문제로 귀결된다. 이러한 원하는 운동을 일으키도록 하는 구동력의 계산은 설계에 있어서 액추에이터의 용량 선정에 필수적이며, 로봇 등 다물체 기계 시스템 제어에도 이용될 수 있다.

Fig. 2에서 i 번째 조인트의 기구적인 구속에 의한 구속력을 τ_i 라 하면 구속력에 의한 가상일은 다음 식과 같다.

$$\delta W = -\delta q^T \tau_i \quad (32)$$

구속력에 의한 가상일을 운동방정식 식 (10)에 포함시키면 다음과 같다.

$$-\delta q^T \tau_i + \sum_{i=0}^n \delta \tilde{Z}_i^T (\tilde{M}_i \dot{\tilde{Y}}_i - \tilde{Q}_i) = 0 \quad (33)$$

식 (13)과 식 (14)를 식 (33)에 알맞은 첨자와 함께 물체 n 부터 대입하여 물체 $i+1$ 까지 역순환적으로 상태벡터 공간에서 조인트좌표 공간으로 변환식을 유도하면, 식 (15)의 운동방정식중 첫행부터 $n-i$ 행까지의 운동방정식이 얻어지며, 식 (33)중 아직 변환되지 않은 가상일의 운동방정식은 다음과 같게 된다.

$$\sum_{k=0}^{i-1} \delta \tilde{Z}_k^T (\tilde{M}_k \dot{\tilde{Y}}_k - \tilde{Q}_k) - \delta q^T \tau_i + \delta \tilde{Z}_i^T (K_i \dot{\tilde{Y}}_i - L_i + \sum_{l=i+1}^n K_l B_l \ddot{q}_l) = 0 \quad (34)$$

이제 식 (13)을 식 (34)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{i-1} \delta \tilde{Z}_k^T (\tilde{M}_k \dot{\tilde{Y}}_k - \tilde{Q}_k) + \delta \tilde{Z}_i^T (K_i \dot{\tilde{Y}}_i - L_i + \sum_{l=i+1}^n K_l B_l \ddot{q}_l) + \delta q^T [B_i^T (K_i \dot{\tilde{Y}}_i - L_i + \sum_{l=i+1}^n K_l B_l \ddot{q}_l) - \tau_i] = 0 \quad (35)$$

식 (35)에서 조인트 가상변위 δq_i 는 임의의 변분이므로 대괄호 속의 식은 0이 되어야 한다.⁽¹¹⁾ 그러므로 구하고자 하는 조인트구속에 의한 구속력, 즉 구동력은 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_i = B_i^T (K_i \dot{\tilde{Y}}_i - L_i + \sum_{l=i+1}^n K_l B_l \ddot{q}_l) \quad (36)$$

식 (36)은 식 (30)에 조인트 i 의 속도변환행렬 B_i 를 곱한 식이 된다. 그러므로 식 (30)과 마찬가지로

지로 2장의 시스템 운동방정식을 형성할 때 이미 계산된 $L_i, K_i, K_i B_i$ 항들을 이용하여 조인트 i 의 구동력을 구할 수 있다. 조인트의 구동력을 구하는 알고리즘은 조인트반력을 구하는 알고리즘과 같고 단지 앞절의 알고리즘 Step 7에서 식 (36)을 수행하면 된다. 따라서, 식 (36)에 의해 다물체 시스템에 구동기가 부착되어 있는 조인트에 관하여 선택적으로 구동력을 계산할 수 있다.

4. 7축 로봇아암 시스템의 조인트반력 계산 예

앞절에서 제안한 조인트반력 및 구동력 계산 알고리즘의 정확성과 효율성 검증을 위해, 조인트 좌표계에 의한 순환공식을 이용한 Unix용 RRC (Robotics Research Corporation) 로봇아암⁽¹²⁾ 해석프로그램을 개발하였다. 프로그램 언어로 포트란 77(Fortran77)을 사용하였으며, 운동방정식은 Adams Bashforth 3차 공식에 의해 수치적분하였다. 계산된 해를 검증하기 위하여 범용 동역학 프로그램인 DADS와 비교하였다.

Fig. 4는 RRC 로봇아암의 초기상태를 나타내고 있다. 7개의 자유도를 가진 RRC 로봇아암은 전체 7개의 링크와 1, 3, 5, 7번 4개의 롤(roll) 조인트, 2, 4, 6번 3개의 피치(pitch)조인트로 구성되어 있다. 각 링크의 물체 기준좌표계는 연결 조인

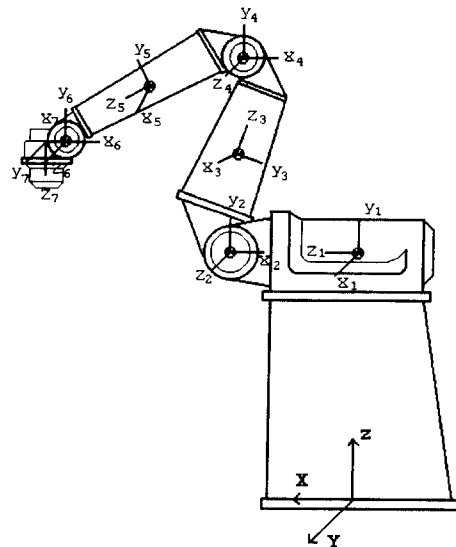


Fig. 4 RRC robot arm system

트와 일치하도록 설정하였다. 시스템의 질량 및 관성은 Table 2에 주어져 있다.

RRC 아암의 4개의 롤조인트는 고정시키고, 2번째 조인트를 식 (37)과 같이 기구학적으로 구동하는 시뮬레이션이 5초간 수행되었다. 이 때 다른 조인트들의 초기각도와 각속도는 0으로 하였다.

$$q_2(t) = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad (37)$$

Fig. 5는 RRC 아암의 2번째 회전조인트를 조인트좌표계에서 식 (37)과 같이 움직이도록 하는데 필요한 구동력을 나타내며, Fig. 6은 2번째 회전조인트의 관성좌표계에서의 x축 반력을 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 앞에서 제안한 비순환적으로 구한 방법과, 뉴턴-오일러방법에 의해 순환적으로 구한 조인트구동력, 조인트반력 모두 DADS에 의한 해와 일치하는 것을 알 수 있다.

두 번째 시뮬레이션으로는 지면에 고정된 물체를

로봇이 잡아당겼다가 다시 놓는 작업으로 이러한 경우 로봇의 그리퍼가 지면에 있는 물체에 닿아있는 케루프(closed loop)를 형성한다. 이러한 경우는 지면에 고정된 물체와 로봇의 그리퍼 사이의 기구학적인 구속조건식을 부여하고 가상조인트 절단 기법⁽¹³⁾과 라그랑지승수법칙⁽¹¹⁾에 의하여 구속력을 구하는 시뮬레이션을 할 수 있지만 앞절에서 설명한 순환공식 운동방정식과 다른 미분대수방정식을 풀어야 하므로, 여기서는 구속조건에 의한 구속력을 근사화하기 위한 또 다른 방법으로 RRC 아암의 끝단과 지면사이에 감성계수가 $1.7513 \times 10^7 \text{ lb/in}$ 인 1인치 길이의 스프링을 장착하였다. 4개의 롤조인트와 2번째 조인트를 고정시키고, 4번째 조인트를 식 (38)과 같이 기구학적으로 구동하는 시뮬레이션이 1초간 수행되었다. 이 때도 역시 다른 조인트의 초기각도와 각속도는 0으로 하였다.

$$q_4(t) = \frac{\pi}{30} \sin(\pi t - \pi) \quad (38)$$

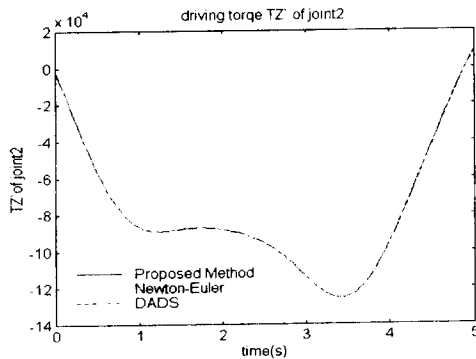


Fig. 5 Driving torque of joint 2

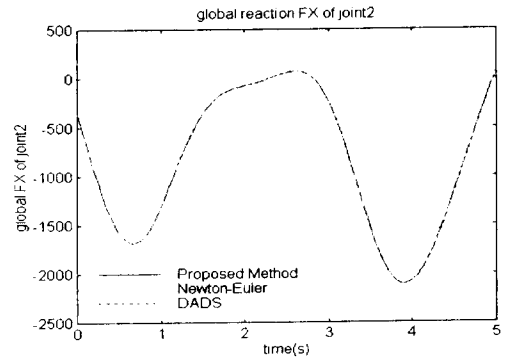


Fig. 6 Joint reaction force of joint 2 in X-direction

Table 2 Mass and moment of inertia of RRC robot arm system

	Mass (slug)	Moment of inertia (lb-in-sec ²)					
		I _{xx}	I _{yy}	I _{zz}	I _{xy}	I _{yz}	I _{zx}
Link 1	229.5	6.907	10.0	10.0	0.0	0.0	0.0
Link 2	122	3.056	7.0	7.0	0.0	0.0	0.0
Link 3	63.5	1.773	4.868	4.868	0.0	0.0	0.0
Link 4	45	1.559	1.7823	1.7823	0.0	0.0	0.0
Link 5	24.5	0.374	1.197	1.197	0.0	0.0	0.0
Link 6	12.5	0.299	0.37	0.37	0.0	0.0	0.0
Link 7	8.0	0.2	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0

Fig. 7은 RRC 아암의 4번째 회전조인트를 조인트좌표계에서 식 (38)과 같이 움직이도록 하는데 필요한 구동력을 나타내며, Fig. 8은 4번째 회전조인트의 관성좌표계에서의 x축 반력을 나타내고 있다. 역시 본 논문에서 제안한 비순환적으로 구한 방법과, 뉴턴-오일러방법에 의해 순환적으로 구한 조인트구동력, 조인트반력 모두 DADS에 의한 해

와 일치하는 것을 알 수 있다. 범용 프로그램 DADS는 앞서 언급한 바와 같이 직교좌표공간에서 운동방정식을 세우고, 조인트 구속조건식에 관한 라그랑지승수법칙에 의하여 조인트반력을 구하고 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 공식의 정확성을 검증할 수 있었다.

또한 앞에서 설명한 바와 같이, 비순환적으로 조인트반력을 구하는 것이 더 효율적이라는 것을 증명하기 위해 제시한 방법과 뉴턴-오일러방법에 대해서 매 스텝마다 조인트반력을 계산하는 CPU 시간을 측정하여 평균값을 Table 3에서 비교하였다. 앞에서 제시한 방법으로 조인트반력을 구하는 것이 뉴턴-오일러방법으로 구하는 것보다 최고 2.1배까지 빠름을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 공식의 효율성을 실제적으로 검증할 수 있었다.

Table 1과 Table 3은 이론적인 효율성과 실제 CPU 계산시간을 각각 나타내고 있다. 여기서 이론적으로 7축 RRC 로봇의 경우 뉴턴-오일러방법과 비교하여 최고 3.5배의 효율성을 가져야 하지만 여기서는 프로그램 상의 함수 부름 등에 걸린 시간이 포함되어 실제적으로 2.1배가 됨을 알 수 있다.

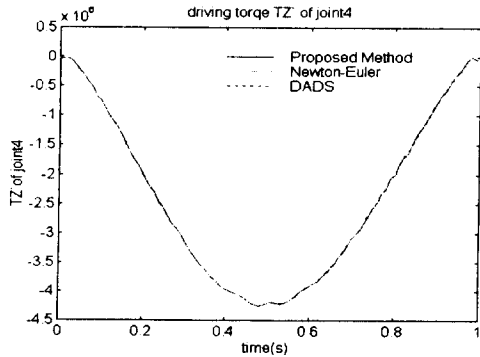


Fig. 7 Driving torque of joint 4

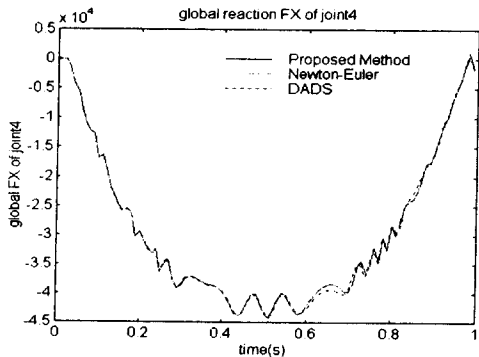


Fig. 8 Joint reaction force of joint 4 in X-direction

5. 결론

본 논문에서는 효율적인 비순환적 동하중(조인트 반력 및 구동력) 계산을 위한 알고리즘이 제시되었고 그 효율성은 회전조인트로 연쇄적으로 연결된 링크 시스템에 대한 연산 오퍼레이션 카운트와 실제 CPU 시간 측정에 의하여 일반적인 뉴턴-오일러식에 의한 순환적인 조인트반력 계산공식과 비교 증명되었다. 또한 계산의 정확성은 전혀 다른 공식

Table 3 Computational time comparison between proposed method and the Newton-Euler method

	Proposed method(sec)	Newton-Euler(sec)	Ratio(Newton/Proposed)
Joint 1	0.364863e-04	0.768031e-04	2.105
Joint 2	0.352150e-04	0.732973e-04	2.081
Joint 3	0.339175e-04	0.676080e-04	1.993
Joint 4	0.345843e-04	0.624957e-04	1.807
Joint 5	0.342007e-04	0.539778e-04	1.578
Joint 6	0.336119e-04	0.417999e-04	1.244
Joint 7	0.496852e-04	0.563670e-04	1.134

을 사용하고 있는 범용 동력학 해석프로그램 DADS와 비교하여 증명되었다.

7축 로봇아암의 시뮬레이션을 통하여 실제로 베이스 물체에 가까운 조인트의 반력계산이 연쇄적으로 연결된 링크의 바깥쪽 조인트보다 효율적임을 알 수 있었으며, 강성스프링을 이용한 로봇아암의 페루프 시스템 형성시에도 제안한 공식이 잘 적용됨을 알 수 있었다.

알고리즘의 효율성은 특정한 조인트의 반력 또는 구동력만을 선택적으로 구하며, 순환공식에 의한 운동방정식 형성시 이미 평가된 항들을 사용하는 것에 기인하고 있다.

최근 자동차 또는 로봇 등 하드웨어나 조작자가 시뮬레이션에 포함되어 있는 Hardware-in-the-Loop⁽¹⁴⁾ 또는 Man-in-the-Loop⁽¹⁵⁾ 시뮬레이션 등 실시간 시뮬레이션에도 알고리즘의 응용을 생각할 수 있으며, 특히 비순환적이므로 병렬컴퓨터를 이용한 실시간 시뮬레이션에도 잘 적용되리라 생각한다.

참고문헌

- (1) Schiehlen, W., 1990, *Multibody Systems Handbook*, Spriger-Verlag.
- (2) Bodley, C., Devers, A., Park, A. and Frisch, H., 1978, "A Digital Computer Program for Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structures(DISCOS)," *NASA Technical Paper 1219*.
- (3) *DADS User's Manual*, Revision 7.6, 1993, Computer Aided Design Software, Inc, Oakdale, Iowa.
- (4) *ADAMS User's Manual*, MDI, 1992.
- (5) Haug, E. J., 1989, *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical System*, Allyn and Bacon.
- (6) Freeman, J. S., Haug, E. J., Kuhl, J. G. and Tsai, F. F., 1994, "Dynamics Simulation for Vehicle Virtual Prototyping," *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, Kluwer Academic Publishers, pp. 533~554.
- (7) Hwang, R. S., 1988, *A Recursive Multibody Dynamics Formulation for Parallel Computation*, Ph. D. Dissertation, University of Iowa, Iowa City.
- (8) Kim, S. S. and Haug, E. J., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part I: Open Loop Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 293~314.
- (9) Tsai, F. F. and Haug, E. J., 1991, "Real-time Multibody System Dynamic Simulation, Part II - A Parallel Algorithm and Numerical Results," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 19, No. 1, pp. 99~127.
- (10) Wang, L. T. and Ravani, B., 1985, "Recursive Computations of Kinematic and Dynamic Equations for Mechanical Manipulators," *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-1, No. 3, pp. 124~131.
- (11) Haug, E. J., 1992, *Intermediate Dynamics*, Prentice-Hall.
- (12) Chuang, L. P. and Kim, S. S., 1990, "Real-time Dynamics Simulation of a Robot System with Rotor Dynamics," *Proceedings of the ASME Design Technical Conferences, Advanced in Design Automation*, DE-Vol. 23-2, pp. 159~168.
- (13) Wittenburg, J., 1977, *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, B. G. Teubner Stuttgart.
- (14) Houselmann, H., 1993, "Hardware-in-the-Loop Simulation as a Standard Approach for Development, Customization, and Production Test," SAE International Congress.
- (15) Freeman, J., et al., 1995, "The Iowa Driving Simulator : An Implementation and Application Overview," *SAE Paper No. 950174*.