

〈논 문〉

## 상이한 직교이방성 띠판에 대한 면외변형 하의 반무한 등속 평행균열에서의 응력확대계수

박재완\* · 권용수\* · 정재택\*\* · 최성렬\*\*\*

(1996년 7월 5일 접수)

### Stress Intensity Factor of Semi-infinite Parallel Crack Propagated with Constant Velocity in Dissimilar Orthotropic Strip under Out-of-Plane Deformation

Jae-Wan Park, Yong-Su Kwon, Jae-Tack Jeong and Sung-Ryul Choi

**Key Words :** Parallel Crack(평행균열), Strip(띠판), Out-of-Plane(면외), Stress Intensity Factor(응력확대계수)

#### Abstract

Stress intensity factor of semi-infinite parallel crack propagation with constant velocity in dissimilar orthotropic strip under out-of-plane clamped displacement is investigated. Using Fourier integral transforms the boundary value problem is derived by a pair of dual integral equation and finally reduced to a single Wiener-Hopf equation. By applying Wiener-Hopf technique the equation is solved. Applying this result the asymptotic stress fields near the crack tip are determined, from which the stress intensity factor is obtained in closed form. The more the ratio of anisotropy or the ratio of bi-material shear modulus increases in the main material including the crack, the more the stress intensity factor increases. Discontinuity in the stress intensity factor is found as the parallel crack approaches the interface. In special case, the results of isotropic materials agree well with those by the previous researchers.

#### 1. 서 론

외력에 의하여 구조물이 파손될 때 보편적으로 동적파괴거동을 일으키는 예가 많으며, 이와같은 동적파괴에 관한 연구는 Sih<sup>(1)</sup> 및 Freund<sup>(2)</sup>의 문헌에서 보는 바와 같이 많은 연구자에 의하여 수행되어 왔다. 반무한 크기의 균열이 등속으로 전파되는 띠판(strip)에 대한 문제는 크게 면내(in-plane)문

제와 면외(out-of-plane)문제로 나눌 수 있다. 등방성 균질재료에 대한 면내문제는 Nilsson<sup>(3)</sup> 및 Fan<sup>(4)</sup>에 의하여 수행되었다. Nilsson<sup>(3)</sup>은 등방성 재료 띠판의 중앙에서 반무한 평행균열이 등속으로 전파할 때 응력확대계수를 구하였으며, 이때 띠판의 상하면에 일정변위가 주어진 경계조건문제를 해석하였다. 또한 Fan<sup>(4)</sup>은 Nilsson<sup>(3)</sup>과 동일한 기하학적 모양에 다만 균열면에 등분포하중이 작용할 때 소성영역을 고려하여 균열전파속도에 따른 소성영역의 크기와 균열선단변위를 해석하였다. 직교이방성 균질재료에 대한 문제는 Kousiounelos<sup>(5)</sup>에 의하여 해석되었으며, 이로부터 탄소섬유가 보강된

\*영남대학교 대학원

\*\*회원, 전남대학교 기계공학과

\*\*\*회원, 영남대학교 기계공학부

복합재료에서 재료의 물성치와 균열전파속도에 따른 응력확대계수의 변화를 연구하였다.

반무한 등속균열에 대한 면외문제로서, 등방성 균열띠판에 대한 문제는 몇몇 연구자에 의하여 수행된 바 있다.<sup>(1,6,7)</sup> Sih<sup>(1)</sup>의 문헌에는 띠판의 중심에 반무한 평행균열이 등속으로 전파되고 이때 띠판 상하면에 일정변위가 주어진 문제가 해석되어 있으며, Huang<sup>(6)</sup>은 균열면의 유한영역에 임의로 분포하는 하중분제를 해석하였다. Ma 및 Ing<sup>(7)</sup>은 기준시점에서 갑작스런 등속균열전파에 따른 응력확대계수의 시간에 따른 변화를 해석하였다. 한편 이종재료에 관한 면외문제는 상이한 등방성 재료로 이루어진 띠판에 반무한 크기의 계면균열이 등속전파하는 문제가 해석된 바 있다.<sup>(1)</sup> 그러나 이방성 재료에 대한 해석은 이루어지지 않고 있다. 구조물에 사용되는 이종재료로서 등방성재료는 물론 복합재료를 포함한 이방성재료의 사용빈도가 증가하고 있다. 따라서 구조물의 안전성 평가를 위해서는 상이한 이방성재료에 대한 연구가 수행되어야 하며, 그 기초연구로서 상이한 직교이방성재료에 대한 동적균열문제의 해석이 요구된다.

본 연구에서는 상이한 두 재료가 접합된 띠판의 상하면에 일정변위로 구속되어 있고, 계면 혹은 계면과 일정거리를 유지하며 형성된 반무한 크기의 평행균열이 등속으로 전파하는 문제가 된다. 이와 같은 문제는 면외문제인 상이한 직교이방성 띠판에 균열이 등속전파할 때 균열전파속도와 재료들의 물성치가 응력확대계수에 미치는 정보를 제공할 수 있고 실제 구조물에 적용될 수 있는 문제라는 점에서 그 해석의 필요성이 있다. 본 문제는 그 해석대상은 다르지만 기존 연구자들이 수행한 해석방법<sup>(1,3,5)</sup>과 유사한 과정을 밟으면 용이하게 해석된다. 즉 Fourier 변환을 이용하여 문제를 수식화하고, 이로부터 미지함수에 관한 Wiener-Hopf방정식<sup>(8)</sup>을 구성한다. 이 방정식을 풀므로써 미지함수들을 결정하여 균열선단 주변의 응력의 점근거동을 구하고, 이로부터 균열이 계면을 따라 전파할 경우와 계면에서 일정거리를 유지하며 전파할 경우에 대하여 응력확대계수(stress intensity factor)를 계산한다.

2. 문제의 수식화

본 연구는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 두개의 직교이방성 띠판이 접합되어 있고, 계면과 일정거리

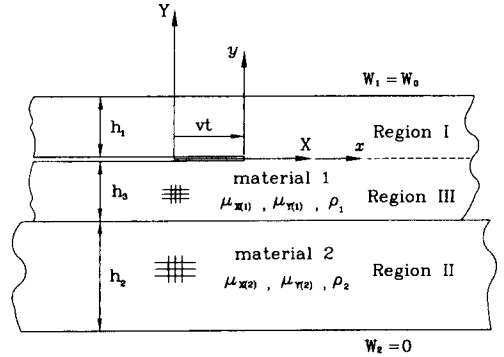


Fig. 1 Semi-infinite parallel crack with constant velocity in dissimilar orthotropic strip under out-of-plane clamped condition

를 유지하면서 등속도  $v$ 로 전파하는 반무한 평행균열에 관한 해석으로서, 상하 띠판의 면외방향 상대변위가  $W_0$ 로 일정하게 유지되는 문제이다. 직교이방성체의 탄성축축을 고정 직교좌표계  $(X, Y, Z)$ 와 나란하게 두고, 계면 윗부분과 아랫부분의 재료를 각각 “재료 1”과 “재료 2”로 표기하자. 또한 고정좌표계의 원점을 시간  $t=0$ 에서 등속운동하는 반무한 평행균열선단으로 둔다. 그러면 시간  $t$ 에서 평행균열은  $X < vt, Y=0$ 에 해당하고, 이때 균열 상하면은 무하중상태의 자유면이다. “재료 1”과 “재료 2”에 관한  $XZ$ 평면 및  $YZ$ 평면의 전단계수 및 밀도를 각각  $\mu_{X(k)}, \mu_{Y(k)}, \rho_k (k=1, 2)$ 로 표기하고, 띠판을 각각 두께가  $h_1, h_2, h_3$ 인 세 개의 영역으로 나누어 표기하자. 즉, “영역 1” 및 “영역 3”은 “재료 1”로 구성되어 있고, “영역 2”는 “재료 2”로 구성되어 있다. 문제해석의 편의를 위하여 균열선단을 원점으로 하는 이동 직교좌표계  $(x, y, z)$ 를 또한 도입한다.

$X, Y, Z$ 방향의 변위를 각각  $U, V, W$ 라 하면, 직교이방성재료인 본 문제는  $Z$ 축에 수직인  $XY$ 평면이 거울대칭이 되므로

$$U_j=0, V_j=0, W_j(X, Y, t) (j=1, 2, 3) \quad (1)$$

으로 표현되고,<sup>(1,9,13)</sup> 여기서 하첨자  $j$ 는 각 영역을 말한다. 그러면 각 영역에 대해 영이 아닌 응력 성분은 다음과 같다.

$$\sigma_{XZ(U)}(X, Y, t) = \mu_{X(U)} \frac{\partial W_j}{\partial X} \quad (2a)$$

$$\sigma_{YZ(U)}(X, Y, t) = \mu_{Y(U)} \frac{\partial W_j}{\partial Y} \quad (2b)$$

식 (2)의 도움으로 평형방정식은 다음과 같은 변위성분으로 주어진다.

$$\mu_{X(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial X^2} + \mu_{Y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial Y^2} = \rho_j \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2}, \quad j=1, 2, 3 \quad (3)$$

이때 균열면과 띠판 상하면의 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{YZ(1)}(X, Y=0, t) = 0, \quad -\infty < X < vt \quad (4a)$$

$$\sigma_{YZ(3)}(X, Y=0, t) = 0, \quad -\infty < X < vt \quad (4b)$$

$$W_1(X, Y=h_1, t) = W_2(X, Y=-h_2-h_3, t) = W_0, \quad -\infty < X < \infty \quad (4c)$$

본 문제는 식 (4)에서 보는 바와 같이 띠판 상하면의 변위경계가 주어져 있는 반면에 균열면의 면력이 영인 문제이다. 이와같은 문제는 중첩의 원리를 적용함으로써 띠판 상하면의 변위차가 영인 반면에 균열면에는 등가의 면력이 존재하는 대등한 문제로 바꿀 수 있다.<sup>(1)</sup> 즉, 식 (4)의 경계조건은 다음과 같은 조건으로 귀결된다.

$$\sigma_{YZ(1)}(X, Y=0, t) = -\tau_0, \quad -\infty < X < vt \quad (5a)$$

$$\sigma_{YZ(3)}(X, Y=0, t) = -\tau_0, \quad -\infty < X < vt \quad (5b)$$

$$W_1(X, Y=h_1, t) = W_2(X, Y=-h_2-h_3, t) = 0, \quad -\infty < X < \infty \quad (5c)$$

식 (5)내의  $\tau_0$ 는  $W_0$ 와 다음의 관계를 지닌다.

$$\tau_0 = \frac{\mu_{Y(1)}\mu_{Y(2)}W_0}{\mu_{Y(2)}(h_1+h_3) + \mu_{Y(1)}h_2} \quad (6)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 고정좌표계와 이동좌표계는 다음의 관계에 있다.

$$x = X - vt, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (7)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 균열선단이란 시간에 무관하게 항상 이동좌표계의 원점에 대응되는 바, 동적균열문제는 해석의 편의를 위하여 이동좌표계를 도입하고 있다.<sup>(1)</sup> Fig. 1과 같은 본 문제를 중첩의 원리를 사용하여 등가의 경계조건으로 변환하고 이동좌표계를 도입하여 표현하면, 보다 그 해석이 용이한 Fig. 2와 같은 문제가 된다. 이때 평형방정식과 경계조건은 이동좌표계로 표현되어야 한다. 무한 길이인 띠판에 반무한 크기의 균열이 등속운동하는 본 문제의 경우에 이동좌표계를 택하면, 시간에 무관하게 고체물의 기하학적 조건이나 경계조건이 동일함을 알 수 있으므로 균열선단은 시간  $t$ 에 무관한 정적상태(steady state)라고 가정할 수 있다. 따라서 각 방향의 변위를 이동좌표계로 나타

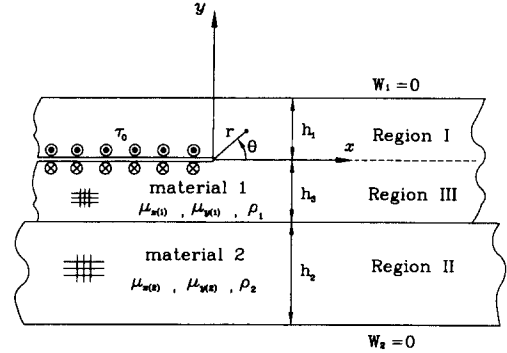


Fig. 2 Equivalent crack problem involving out-of-plane surface loadings

내면 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.<sup>(1~6, 9, 15)</sup>

$$U_j = 0, \quad V_j = 0, \quad W_j = W_j(x, y) \quad (j=1, 2, 3) \quad (8)$$

식 (7) 및 (8)의 도움으로, 식 (2)의 응력은

$$\sigma_{xz(j)}(x, y) = \mu_{x(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} \quad (9a)$$

$$\sigma_{yz(j)}(x, y) = \mu_{y(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \quad (9b)$$

으로 표현된다. 또한 고정 및 이동좌표계 관계식 (7)로부터

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial x}{\partial X} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = 1$$

임을 알고,<sup>(2)</sup> 이를 적용하면 식 (3)의 평형방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\{\mu_{X(j)} - \rho_j v^2\} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \mu_{Y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = 0, \quad j=1, 2, 3 \quad (10)$$

식 (5)의 경계조건은 또한 다음으로 표현된다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y=0) = -\tau_0, \quad -\infty < x < 0 \quad (11a)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, y=0) = -\tau_0, \quad -\infty < x < 0 \quad (11b)$$

$$W_1(x, y=h_1) = W_2(x, y=-h_2-h_3) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (11c)$$

여기서,  $\tau_0$ 는 식 (6)으로부터 다음이 된다.

$$\tau_0 = \frac{\mu_{Y(1)}\mu_{Y(2)}W_0}{\mu_{Y(2)}(h_1+h_3) + \mu_{Y(1)}h_2} \quad (12)$$

또한 각 영역의 경계면에 성립하는 면력과 변위의 연속조건은 다음이 된다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y=0) = \sigma_{yz(3)}(x, y=0), \quad 0 < x < \infty \quad (13a)$$

$$W_1(x, y=0) = W_3(x, y=0), \quad 0 < x < \infty \quad (13b)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, y = -h_3) = \sigma_{yz(2)}(x, y = -h_3), \\ -\infty < x < \infty \quad (13c)$$

$$W_3(x, y = -h_3) = W_2(x, y = -h_3), \\ -\infty < x < \infty \quad (13d)$$

그러면 식 (11), (13)의 도움으로 변위는 무한거리에서 어떤 유계(bounded) 값  $M$ 보다 작은 점근기동을 보임을 알 수 있다.

$$W_j \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \\ |W_j| < M, \quad x \rightarrow -\infty \quad (14)$$

계산의 편의를 위하여 각 재료에 대한 전단계수  $\mu_{x(j)}$ ,  $\mu_{y(j)}$  및 밀도  $\rho_j$ , 속도  $v$ 로 구성된 상수  $c_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $s_j$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$c_j = \sqrt{\frac{\mu_{x(j)}}{\rho_j}}, \quad (j=1, 2) \\ \beta_j = \sqrt{\frac{\mu_{x(j)}}{\mu_{y(j)}} \left(1 - \frac{v^2}{c_j^2}\right)}, \quad (j=1, 2) \\ \gamma_j = \beta_j \mu_{y(j)}, \quad (j=1, 2) \\ s_j = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c_j^2}\right)}, \quad (j=1, 2) \quad (15)$$

여기서,  $c_j$ 는 각 재료( $j=1, 2$ )에서 수평축으로 진행되는 전단파의 속도,  $\beta_j$  및  $\gamma_j$ ,  $s_j$ 는 균열속도가 고려된 재료의 이방성비 및 각 재료의 등가전단계수, 속도 관련량을 말한다.

식 (10)을 Fourier 변환<sup>(10)</sup>을 이용하여 변수  $s$ 에 관한 상미분방정식을 해를 구하고, 다시 Fourier 역변환을 적용하면 각 영역에 대한 변위는 다음과 같은 적분꼴로 주어진다.

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(s) e^{\beta_1 y s} \\ + B_1(s) e^{-\beta_1 y s}] e^{-ixs} ds \quad (16a)$$

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(s) e^{\beta_2 y s} \\ + B_2(s) e^{-\beta_2 y s}] e^{-ixs} ds \quad (16b)$$

$$W_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(s) e^{\beta_3 y s} \\ + B_3(s) e^{-\beta_3 y s}] e^{-ixs} ds \quad (16c)$$

식 (16a)~(16c)내의  $A_j$ ,  $B_j$ ( $j=1, 2, 3$ )은 경계조건과 연속조건에서 결정될 미지함수이다.

식 (16)을 식 (9b)에 대입하여 정리하면 응력  $\sigma_{yz(j)}$ ( $j=1, 2, 3$ )은 다음과 같은 적분꼴로 주어진다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1 s [A_1(s) e^{\beta_1 y s} \\ - B_1(s) e^{-\beta_1 y s}] e^{-ixs} ds \quad (17a)$$

$$\sigma_{yz(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2 s [A_2(s) e^{\beta_2 y s} \\ - B_2(s) e^{-\beta_2 y s}] e^{-ixs} ds \quad (17b)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_3 s [A_3(s) e^{\beta_3 y s} \\ - B_3(s) e^{-\beta_3 y s}] e^{-ixs} ds \quad (17c)$$

식 (16)과 (17)을 경계조건 식 (11a)~(11c) 및 연속조건 식 (13a)~(13d)에 대입하면 미지함수로 구성된 다음의 관계를 얻는다.

$$A_3(s) - B_3(s) = A_1(s) - B_1(s) \quad (18a)$$

$$A_1(s) = -B_1(s) e^{-2\beta_1 h_1 s} \quad (18b)$$

$$B_2(s) = -A_2(s) e^{-2\beta_2(h_2+h_3)s} \quad (18c)$$

$$\gamma_1 A_3(s) e^{-\beta_1 h_3 s} - \gamma_1 B_3(s) e^{\beta_1 h_3 s} \\ = \gamma_2 A_2(s) e^{-\beta_2 h_3 s} - \gamma_2 B_2(s) e^{\beta_2 h_3 s} \quad (18d)$$

$$A_3(s) e^{-\beta_1 h_3 s} + B_3(s) e^{\beta_1 h_3 s} \\ = A_2(s) e^{-\beta_2 h_3 s} + B_2(s) e^{\beta_2 h_3 s} \quad (18e)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s \{A_1(s) - B_1(s)\} e^{-ixs} ds \\ = -2\pi \frac{\tau_0}{\gamma_1}, \quad x < 0 \quad (18f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{A_3(s) + B_3(s) - A_1(s) - B_1(s)\} e^{-ixs} ds \\ = 0, \quad x > 0 \quad (18g)$$

미지함수의 결정을 위해 새로운 미지함수  $A(s)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$A(s) = \frac{1}{2} [A_3(s) + B_3(s) - A_1(s) - B_1(s)] \quad (19)$$

식 (19)와 식 (18a)~(18e)를 연립하여 풀면  $A_j$ ,  $B_j$ ( $j=1, 2, 3$ )는 다음과 같은  $A(s)$ 에 관한 식으로 주어진다.

$$A_1(s) = \frac{A(s)}{F(s)} [C(s) - D(s) e^{-2\beta_1 h_3 s}] e^{-2\beta_1 h_1 s} \quad (20a)$$

$$B_1(s) = -\frac{A(s)}{F(s)} [C(s) - D(s) e^{-2\beta_1 h_3 s}] \quad (20b)$$

$$A_2(s) = \frac{A(s)}{F(s)} 2\gamma_1 [1 + e^{-2\beta_1 h_1 s}] e^{(\beta_2 - \beta_1) h_3 s} \quad (20c)$$

$$B_2(s) = -\frac{A(s)}{F(s)} 2\gamma_1 [1 + e^{-2\beta_1 h_1 s}] e^{-2\beta_2 h_2 s - (\beta_1 + \beta_2) h_3 s} \quad (20d)$$

$$A_3(s) = \frac{A(s)}{F(s)} C(s) [1 + e^{-2\beta_1 h_1 s}] \quad (20e)$$

$$B_3(s) = \frac{A(s)}{F(s)} D(s) [1 + e^{-2\beta_1 h_1 s}] e^{-2\beta_1 h_3 s} \quad (20g)$$

여기서, 함수  $C(s)$ ,  $D(s)$ ,  $F(s)$ 는 다음을 말한다.

$$\begin{aligned} C(s) &= \{(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_1 - \gamma_2) e^{-2\beta_2 h_2 s}\} \\ D(s) &= \{(\gamma_1 - \gamma_2) - (\gamma_1 + \gamma_2) e^{-2\beta_2 h_2 s}\} \\ F(s) &= C(s) + D(s) e^{-2\beta_1(h_1 + h_3)s} \end{aligned} \quad (20h)$$

식 (20)을 나머지 식 (18f, g)에 대입하여 정리하면  $A(s)$ 에 관한 다음과 같은 연립적분방정식 (dual integral equation)을 얻는다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(s) e^{-ixs} ds = 0, \quad x > 0 \quad (21a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s) A(s) e^{-ixs} ds = -2\pi \frac{\tau_0}{\gamma_1}, \quad x < 0 \quad (21b)$$

여기서, 커널함수  $G(s)$ 는

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s\{C(s) - D(s) e^{-2\beta_1 h_3 s}\} \{1 + e^{-2\beta_1 h_1 s}\}}{C(s) + D(s) e^{-2\beta_1(h_1 + h_3)s}} \\ &= 2s\{(\gamma_1 + \gamma_2) \cosh(\beta_2 h_2 + \beta_1 h_3) s \\ &\quad - (\gamma_1 - \gamma_2) \cosh(-\beta_2 h_2 + \beta_1 h_3) s\} \\ &\quad \cosh(\beta_1 h_1 s) / \{(\gamma_1 + \gamma_2) \sinh \\ &\quad (\beta_2 h_2 + \beta_1 h_2 + \beta_1 h_3) s - (\gamma_1 - \gamma_2) \\ &\quad \sinh(-\beta_2 h_2 + \beta_1 h_1 + \beta_1 h_3) s\} \end{aligned} \quad (21c)$$

를 말한다. 일단 식 (21)의 해가 주어지면 식 (20)의 관계로부터 모든 미지함수들이 결정되고, 이로부터 식 (17)을 평가함으로써 균열선단에 대한 응력의 점근거동을 계산할 수 있다.  $x \approx 0$ ,  $y \approx 0$ 인 균열선단에 대한 응력의 점근거동이란 식 (17)의  $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 적분평가에 대응되는 바, 결국  $|s| \rightarrow \infty$ 인 미지함수들의 거동을 구하는 문제에 귀결된다.

### 3. Wiener-Hopf 식

식 (21)의 적분방정식은 각각  $x > 0$  및  $x < 0$  영역에서 주어져 있으므로, Wiener-Hopf 식으로 유도되고 Noble<sup>(8)</sup> 및 Nilsson,<sup>(3)</sup> Sih<sup>(1)</sup> 등의 문헌에 수록된 풀이과정을 따르면 미지함수  $A(s)$ 는 용이하게 결정된다.

먼저 식 (21)을 Wiener-Hopf 문제로 변환하기 위하여,  $s$ 에 관한 복소평면중  $\text{Im}[s] \geq 0$ 인 상반평면에서 해석적인 미지함수  $H_+(s)$ 와  $\text{Im}[s] < 0$ 인 하반평면에서 해석적인 미지함수  $N_-(s)$ 를 새로이 도입

하자. 이때  $|s| \rightarrow \infty$ 에서  $H_+(s)$ 와  $N_-(s)$ 의 거동을 각각 다음과 같다고 두자.

$$H_+(s)/s \rightarrow 0, \quad N_-(s) \rightarrow 0, \quad |s| \rightarrow \infty \quad (22)$$

Fig. 3에 보인 실수축 경로와 윗쪽 무한 반원의 경로를 잇는 폐경로 적분을 택하고, 식 (22)를 고려하여 유수정리와 Jordann 정리<sup>(10)</sup>를 이용하면 식 (21b)은 다음과 같은 식으로 주어짐을 알 수 있다.

$$G(s)A(s) = \frac{-\tau_0}{\gamma_1 i} \frac{H_+(s)}{H_+(0)} \frac{1}{s} \quad (23)$$

같은 방법으로 계산하면 식 (21a)에서는 다음을 얻는다.

$$A(s) = N_-(s) \quad (24)$$

식 (23), (24)로부터  $A(s)$ 를 소거하면, Wiener-Hopf식<sup>(3)</sup>을 얻게 된다.

$$\frac{N_-(s)}{H_+(s)} = \frac{-\tau_0}{i\gamma_1 H_+(0)} \frac{1}{sG(s)} \quad (25)$$

식 (25)에서  $H_+(s)$ 와  $N_-(s)$ 가 결정된다면, 식 (24)로부터  $A(s)$ 가 주어지게 된다.

식 (21c)에서 보는 바와 같이 커널함수  $G(s)$ 는  $s$ 의 실수축에서 영(zero)점이 없음을 알 수 있고, 적어도  $-d < \text{Im}(s) < d$  ( $d > 0$ )에서 해석적인 영역이 존재함을 알 수 있다. 따라서  $G(s)$ 를  $\text{Im}(s) > -d$ 에서 해석적인 함수  $G_+(s)$ 와  $\text{Im}(s) < d$ 에서 해석적인 함수  $G_-(s)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$G(s) = G_-(s) G_+(s) \quad (26)$$

식 (26)을 식 (25)에 대입하여 정리하면

$$\frac{N_-(s)}{H_+(s)} = \left\{ \frac{1}{G_+(s)} \right\} \left\{ \frac{-\tau_0}{i\gamma_1 H_+(0) s G_-(s)} \right\} \quad (27)$$

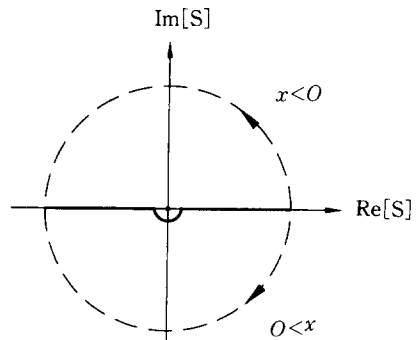


Fig. 3 Contour integration in the s-plane

이 되고, 이로부터  $N_-(s)$  및  $H_+(s)$ 는 각각

$$N_-(s) = \frac{-\tau_0}{i\gamma_1 H_+(0) s G_-(s)} \quad (28a)$$

$$H_+(s) = G_+(s) \quad (28b)$$

이 된다. 식 (28a, b)와 식 (24)로부터  $A(s)$ 는 다음으로 주어진다.

$$A(s) = \frac{-\tau_0}{i\gamma_1 G_+(0) s G_-(s)} \quad (29)$$

식 (29)내의  $G_-(s)$  및  $G_+(0)$ 에 대한 결정에 대해서는 4절에서 서술한다.

### 4. 미지함수의 점근거동

2절에서 언급한 바와 같이 균열선단 부근에 대한 응력의 점근거동은 식 (17)의  $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 적분평가에 대응된다. 따라서 본 절에서는  $|s| \rightarrow \infty$ 에 대한 식 (29)인  $A(s)$ 의 점근거동을  $h_3 \neq 0$  및  $h_3 = 0$ 인 경우, 즉 균열이 계면에서 일정거리를 유지하는 경우와 계면에 놓인 경우에 대하여 각각 구하고자 한다.

#### 4.1 $h_3 \neq 0$ 일때

$h_3 \neq 0$ 일때 식 (21c)로부터  $s \rightarrow 0$  및  $s \rightarrow \pm\infty$ 에 대한  $G(s)$ 의 점근거동을 보면 다음과 같다.

$$G(0) = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\beta_2 h_2 + \gamma_2\beta_1(h_1 + h_3)} \quad (30a)$$

$$G(s) = |s|, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \text{ for } h_3 \neq 0 \quad (30b)$$

식 (21c)를 보면  $G(s)$ 는 우함수이고,  $s$ 의 실수축에 대해서 영점이나 특이점(pole)이 없고 따라서 적어도  $-d < \text{Im}(s) < d$  ( $d > 0$ )에서 해석적인 영역이 존재함을 알 수 있다. 따라서 식 (26)에서 언급한 바와 같이  $G(s)$ 를  $\text{Im}(s) > -d$ 에서 해석적인 함수  $G_+(s)$ 와  $\text{Im}(s) < d$ 에서 해석적인 함수  $G_-(s)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

Nilsson<sup>(3)</sup>의 문헌에서 해석한 방법과 같이 식 (30b)인  $s \rightarrow \pm\infty$ 의 점근거동을 고려하여 새로운 우함수  $L(s)$ 를 다음과 같이 두자.

$$L(s) = \frac{G(s)}{\sqrt{s^2 + d^2}} \quad (31)$$

그러면  $L(s)$ 는

$$L(s) = 1, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \quad (32)$$

인 거동을 보인다. 또한  $L(s)$ 는  $-d < \text{Im}(s) < d$  ( $d > 0$ )에서 해석적이므로,  $\text{Im}(s) > -d$ 에서 해석적인 함수  $L_+(s)$ 와  $\text{Im}(s) < d$ 에서 해석적인 함수  $L_-(s)$ 의 곱으로 분리될 수 있다.

$$L(s) = L_-(s)L_+(s) \quad (33)$$

식 (26) 및 (33)을 식 (31)에 대입하여 정리하면,  $G_+(s)$  및  $G_-(s)$ 는 다음으로 주어진다.

$$G_+(s) = \sqrt{s + id} L_+(s) \quad (34a)$$

$$G_-(s) = \sqrt{s - id} L_-(s) \quad (34b)$$

이때  $L_+(s)$ 와  $L_-(s)$ 는 Cauchy 공식에 의하여 다음과 같이 분리될 수 있다

$$\begin{aligned} \ln L(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - id}^{\infty - id} \frac{\ln L(\zeta)}{\zeta - s} ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty + id}^{-\infty + id} \frac{\ln L(\zeta)}{\zeta - s} ds \\ &= \ln L_+(s) + \ln L_-(s) \end{aligned} \quad (35)$$

$L(s)$ 가 우함수임을 상가하면

$$L_-(0) = L_+(0) \quad (36)$$

을 얻고, 식 (30a), (33), (34), (36)을 식 (31)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다

$$\begin{aligned} G_-(0) &= e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\beta_2 h_2 + \gamma_2\beta_1(h_1 + h_3)}} \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}} G_-(0) \end{aligned} \quad (37)$$

한편 식 (32), (35)로부터

$$L_+(s) = L_-(s) = 1, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \quad (38)$$

의 점근거동을 얻는다. 식 (38)을 식 (34a, b)에 적용하면 다음의 점근거동을 얻게 된다

$$G_+(s) = G_-(s) = \sqrt{s}, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \quad (39)$$

최종적으로 식 (37), (39)를 식 (29)에 대입하면 미지함수  $A(s)$ 의 점근거동은 다음으로 결정된다.

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{-\tau_0 e^{-\frac{3\pi i}{4}} s^{-\frac{3}{2}}}{\gamma_1 \left\{ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\beta_2 h_2 + \gamma_2\beta_1(h_1 + h_3)} \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &\text{as } s \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (40)$$

#### 4.2 $h_3 = 0$ 일때

$h_3 = 0$ 일때 식 (21c)로부터  $s \rightarrow 0$  및  $s \rightarrow \pm\infty$ 에 대한  $G(s)$ 의 점근거동을 보면 다음과 같다.

$$G(0) = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\beta_2 h_2 + \gamma_2\beta_1 h_1} \quad (41a)$$

$$G(s) = \frac{2\gamma_2 |s|}{(\gamma_1 + \gamma_2)}, \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \text{ for } h_3=0 \quad (41b)$$

$h_3 \neq 0$ 의 해석과 동일한 절차를 밟아 계산하면 미지함수  $A(s)$ 의 점근거동은 다음과 같이 결정된다.

$$A(s) = \frac{-\tau_0 e^{-\frac{3\pi i}{4} s^{-\frac{3}{2}}}}{\gamma_1 \left\{ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \beta_2 h_2 + \gamma_2 \beta_1 h_1} \right\}^{\frac{1}{2}}} \text{ as } s \rightarrow \pm\infty \quad (42)$$

### 5. 결과 및 토의

#### 5.1 응력의 점근거동 및 응력확대계수

본 연구의 목적은 Fig. 2에서 보는 바와 같이  $x \approx 0, y \approx 0$ 인 균열선단의 응력의 점근거동과 응력확대계수를 구하는 것이 되고, 기존 연구자들의 해석<sup>(1)</sup>과 유사한 과정을 따르면 용이하게 계산된다.  $h_3 \neq 0$ 일 때를 보자.  $x \approx 0, y = 0^+$  및  $x \approx 0, y = 0^-$ 인 균열선단의 응력  $\sigma_{yz}$ 는 각각 식 (17a), (17c)에서 계산된다. 이들 적분식을 평가함에 있어서  $s$ 가 유한크기구간의 적분값은 상수값이 되므로, 균열선단의 응력 점근거동은  $|s| \rightarrow \infty$ 의 평가에 귀결된다.<sup>(1)</sup> 식 (17a, c)내의 함수의 점근거동을 식 (20)에서 평가하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1(s) &= B_3(s) = 0 \\ B_1(s) &= -A_3(s) = -A(s), \text{ as } s \rightarrow \infty \\ A_1(s) &= -B_3(s) = -A(s) \\ B_1(s) &= A_3(s) = 0, \text{ as } s \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (43)$$

Fig. 2에서 보는 바와 같이 직교좌표계  $(x, y)$ 는 극좌표계  $(r, \theta)$ 와

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (44)$$

의 관계에 있음을 유의하면,  $x \approx 0, y = 0$ 인 균열선단의 응력  $\sigma_{yz}(x, y)$ 는  $r \rightarrow 0, -\pi < \theta < \pi$ 인  $\sigma_{yz}(r, \theta)$ 에 대응함을 알 수 있다.

식 (43), (44)와 식 (40)을 각각 식 (17a) 및 (17c)에 대입하고, 적분관계식<sup>(11)</sup>

$$\int_0^\infty s^{\nu-1} e^{-\mu s} ds = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu}, \quad [Re \mu > 0, Re \nu > 0]$$

를 이용하여 계산하면 다음과 같은 응력의 점근거동을 얻는다.

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} Re \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\beta_1 \sin \theta}} \right] + O(1) \quad (r \rightarrow 0, -\pi < \theta < \pi, h_3 \neq 0) \quad (45)$$

여기서,  $K_3$ 는 응력확대계수로서 다음과 같이 계산된다.

$$K_3 [\equiv K_3(h_3)] = \mu_{y(1)} W_0 \left\{ \frac{\beta_1 \mu_{y(2)}}{\mu_{y(1)} h_2 + \mu_{y(2)} (h_1 + h_3)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

다음으로  $h_3 = 0$ 일때, 즉 균열이 계면에 존재하는 경우를 보자. 이때의  $x \approx 0, y \approx 0$ 인 균열선단의 응력은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 식 (17a), (17b)에서 계산된다. 식 (20)을 식 (17a), (17b)에 각각 대입하고, 식 (42)의 점근식을 사용하여  $h_3 \neq 0$ 일 때의 해석과 동일한 절차를 따라 평가하면,  $h_3 = 0$ 일 때 균열선단에 대한 응력  $\sigma_{yz}(r, \theta)$ 의 점근거동은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} Re \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\beta_1 \sin \theta}} \right] + O(1) \quad (r \rightarrow 0, 0 < \theta < \pi, h_3 = 0) \quad (47a)$$

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} Re \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + i\beta_2 \sin \theta}} \right] + O(1) \quad (r \rightarrow 0, -\pi < \theta < 0, h_3 = 0) \quad (47b)$$

여기서, 응력확대계수  $K_3$ 는

$$\begin{aligned} K_3 [\equiv K_3(h_3=0)] \\ = \mu_{y(1)} W_0 \left\{ \frac{\beta_1 \mu_{y(2)}}{\mu_{y(1)} h_2 + \mu_{y(2)} h_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (46)$$

으로 주어진다.

#### 5.2 결과식의 검토 및 논외

먼저 5.1절에서 해석된 결과의 타당성을 알아보기 위하여 기존 연구자의 연구결과와 비교하고자 한다.  $h_3 \neq 0$ 일때 균열선단 부근의 응력  $\sigma_{yz}$ 는 식 (45)로 주어져 있다. 특별한 경우로서  $v=0$ 인 정적상태일 때 응력은 식 (45)에  $v=0$ 을 대입한 경우가 되는 바, 그 결과는 기존 연구자<sup>(9, 12)</sup>의 해석결과와 일치함을 보인다.  $h_3 = 0$ 일 때, 즉 균열이 계면에 존재할 때 응력  $\sigma_{yz}$ 는 식 (47)과 같고, 특별한 경우로서  $v=0$ 을 대입한 결과는 정적인 상태로 계면에 존재하는 균열선단의 응력 표현식과 일치함을 보인다.<sup>(9, 13, 14)</sup>

응력확대계수  $K_3$ 에 관한 식은  $h_3 \neq 0$  및  $h_3 = 0$ 에 대하여 각각 식 (46), (48)로 주어져 있다. 먼저  $h_3 \neq 0$ 를 보자. 두 재료가 동일한 등방성재료의 경우, 즉  $\mu_{y(1)} = \mu_{x(1)} = \mu_{y(2)} = \mu_{x(2)}$ 이고, 균열이  $v$ 로 등속전파할 때 응력확대계수는 식 (46)으로부터

$$K_3 = \mu_{y(1)} W_0 \left\{ \frac{s_1}{h_1 + h_2 + h_3} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

을 얻을 수 있고, 이는 기존 연구자의 결과와 일치  
를 보인다.<sup>(1, 6)</sup> 다음은  $h_3=0$ 인 경우로서 특별히 두  
재료가 서로 다른 등방성재료, 즉  $\mu_{y(1)} = \mu_{x(1)}$ ,  $\mu_{y(2)}$   
 $= \mu_{x(2)}$ 이고  $h_1 = h_2$ 인 동일한 두께의 띠판을 생각하  
자. 이때 등속전파균열에 대한 응력확대계수는 기  
존 연구자에 의하여 해석되었으며,<sup>(1)</sup> 그 결과는 식  
(48)에서도 동일한 결과를 얻을 수 있는 바, 이를  
식으로 나타내면 다음과 같다.

$$K_3 = \mu_{y(1)} \mu_{y(2)} W_0 \left\{ \frac{2s_1 s_2}{h_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{ [\mu_{y(1)} s_1 + \mu_{y(2)} s_2] [\mu_{y(1)} + \mu_{y(2)}] \}^{-\frac{1}{2}} \quad (50)$$

지금까지 본 연구의 결과식을 기존연구자의 결과  
와 비교함으로써, 그 결과의 타당성을 알 수 있었  
다.

$h_3 \neq 0$  및  $h_3=0$ 에 관한 응력확대계수  $K_3$ 를 식  
(46) 및 (48)에서 각각 보면,  $K_3$ 는 재료의 이방성  
비와 균열진전속도 및 띠판의 두께 등 복잡한 함수  
관계로 주어짐을 알 수 있다. 특히 균열이 무한히  
계면에 접근할 때와 계면에 놓인 균열의 응력확대  
계수를 식 (46)과 (48)에서 구하면

$$K_3(h_3=0^+) = \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\gamma_2} \right\}^{\frac{1}{2}} K_3(h_3=0) \quad (51)$$

인 관계를 얻을 수 있다.  $v=0$ 일 때 식 (51)의 결  
과는 정적균열문제의 해석결과와 일치를 보인다.<sup>(12)</sup>

특별히 두 재료가 동일한 등방성재료이고, 정지  
된 균열에 대한 응력확대계수를  $K_3^0$ 라고 표기하면,  
이는 식 (49)에  $v=0$ 를 대입함과 같은 바  $K_3^0$ 는

$$K_3^0 = \frac{\mu_{y(1)} W_0}{\sqrt{h_1 + h_2 + h_3}} \quad (52)$$

가 된다.

Fig. 4는 식 (46)에 보인  $h_3 \neq 0$ 일 때 응력확대계  
수  $K_3$ 를 식 (52)에 보인  $K_3^0$ 로 나눈 무차원화된 응  
력확대계수  $K_3/K_3^0$ 를 몇몇 재료물성치에 대하여 균  
열진전속도  $v$ 의 함수로 나타낸 것이다. Fig. 4(a)  
는  $h_1 + h_3 = h_2 (=H)$ ,  $\mu_{y(2)}/\mu_{y(1)} = 4$ 이고  $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)}$   
 $= 0.2, 1, 5$ 에 대한 결과를 보인 것이고, 한편  
Fig.4(b)는  $h_1 + h_3 = h_2 (=H)$ ,  $\mu_{y(2)}/\mu_{y(1)} = 0.25$ 이고  
 $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)} = 0.2, 1, 5$ 에 대한 무차원화된 응력확대  
계수를 그린 것이다. Fig. 4(a, b) 어느 경우에서나  
균열진전속도  $v$ 가 증가할수록 응력확대계수는 감

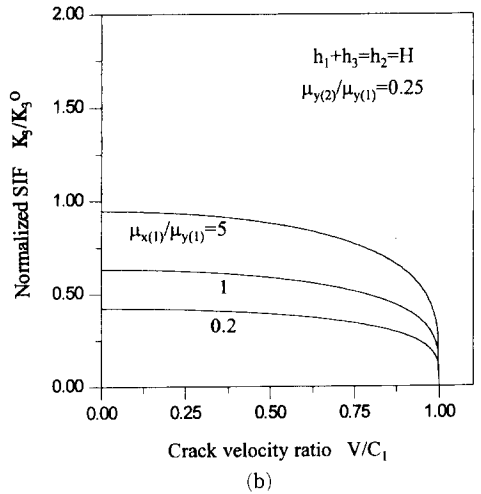
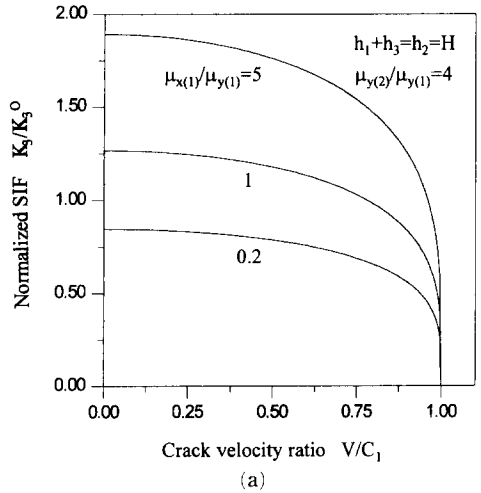


Fig. 4 Normalized stress intensity factor  $K_3/K_3^0$  as a function of crack velocity with the given material properties

소를 보이며,  $v=c_1$ , 즉 수평축으로 전파되는 “재  
료 1”의 전단파속도에 도달하면 응력확대계수는 영  
으로 됨을 보이는 바, 이 결과는 등방성재료에 대  
한 결과와 정성적인 일치를 보인다.<sup>(1)</sup> 또한 균열이  
내재된 “재료 1”의 이방성비  $\mu_{x(1)}/\mu_{y(1)}$ 가 증가할수  
록 또한  $y$ 축에 수직인 면의 전단계수비  $\mu_{y(2)}/\mu_{y(1)}$   
가 증가할수록 응력확대계수는 증가함을 그림에서  
알 수 있고, 이는 식 (46)에서도 확인된다. 한편  
계면균열의 경우에는, 식 (48)로부터 균열전파속도  
 $v=c_1, c_2$ , 즉 두 재료중 어느 재료에 대한 전단파  
의 속도에 도달하면, 응력확대계수는 영이 됨을 알  
수 있고 이 결과는 등방성재료의 계면균열해석과



정성적으로 일치한다.<sup>(1)</sup>

정지된 균열문제에도 적용될 수 있다.

## 6. 결 론

## 참고문헌

본 연구는 두 개의 직교이방성체로 구성된 띠판에 계면과 일정거리를 유지하면서 등속도로 전파하는 반무한 평행균열문제를 해석하였다. 이때 띠판 상하면은 일정크기의 면외변위가 주어지고, 균열면은 자유면이다. Fourier 변환을 사용하여 문제를 수식화하고, 최종적으로 Wiener-Hopf 식을 구성하였다. 이 방정식을 풀므로써 등속전파 균열선단에 대한 응력의 점근거동과 폐형의 응력확대계수를 얻었다. 기존 연구자들이 해석한 등방성재료의 결과는 직교이방성재료의 특별한 경우가 되므로, 이들과 일치하는 결과를 본 연구의 응력확대계수 결과에서 확인할 수 있었다. 응력의 특이성은 등방성균열재료와 동일하게 직교이방성재료에서도  $1/\sqrt{r}$ 의 특이성이 유지됨을 보였다.

응력확대계수는 균열이 내재된 재료의 이방성비와 전단파 속도, 계면에 인접한 두재료의 전단계수비 및 균열전파속도와 띠판의 기하학적 형상의 함수관계임을 알 수 있었다. 이들 변수들에 대한 경향을 보면, 균열이 내재되어 있는 모재의 두 직교방향에 대한 이방성비가 증가할수록 또한 계면에 인접한 두 재료중에서 모재의 전단계수가 감소할수록 응력확대계수는 증가를 보였다. 반면에 균열전파속도가 증가할수록 단조감소를 보였으며, 특히 균열이 내재된 재료의 전단파의 속도에 도달하면 영으로 접근함을 알 수 있었다. 평행균열이 계면에 무한히 접근할 때 응력확대계수는 계면균열에 관한 응력확대계수와 불연속을 보였으며, 또한 이들간의 관계식을 얻을 수 있었다. 이 관계식은 계면에 무한히 접근하는 균열의 응력확대계수는 계면균열의 응력확대계수만으로도 바로 결정할 수 있는 식이 된다. 또한, 계면균열의 경우 응력확대계수의 결과를 보면 계면에 인접한 두 재료의 전단파의 속도에 모두 영향을 받음을 알 수 있었고, 이 때 균열전진속도가 두 재료 중 어느 재료에 대한 전단파의 속도에 도달하면 영이 됨을 보였다.

폐형으로 주어진 응력확대계수를 사용하면, 본 문제와 동일한 기하학적 조건이나 이와 유사하게 가정할 수 있는 문제에 대하여 균열전파속도와 재료들의 물성치가 주어지면 응력확대계수를 용이하게 계산할 수 있다. 또한 기하학적 조건이 동일한

- (1) Sih, G. C., 1977, *Elastodynamic Crack Problems, Mechanics of Fracture*, Noordhoff International Publishing, Leyden, Vol. 4.
- (2) Freund, L. B., 1990, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
- (3) Nilsson, F., 1972, "Dynamic Stress-Intensity Factors for Finite Strip Problems," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 8, pp. 403~411.
- (4) Fan, T. Y., 1993, "Plastic Zone and Opening Displacement of a Propagating Crack in a Strip," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 44, pp. 243~246.
- (5) Kousiounelos, P. T. and Willams, J. H., 1982, "Dynamic Fracture of Unidirectional Graphite Fiber Composite Strip," *Int. J. Fracture*, Vol. 20, pp. 47~63.
- (6) Huang, B., 1995, "Fundamental Formulas of Dynamic Stress Intensity Factors of Mode III for a Propagating Crack in a Strip," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 50, pp. 61~64.
- (7) Ma, C. C. and Ing, Y. S., 1995, "Transient Analysis of Dynamic Crack Propagation with Boundary Effect," *J. Appl. Mech.*, Vol. 62, pp. 1029~1038.
- (8) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (9) Sih, G. C. and Chen, E. P., 1981, *Cracks in Composite Materials, Mechanics of Fracture*, Vol. 6, Martinus Nijhoff, Hauge.
- (10) Carrier, G. F., Krook, M. and Pearson, P. E., 1966, *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York.
- (11) Gradshteyn, I. S. and Ryzik, I. M., 1980, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.
- (12) 최성렬, 권용수, 채영석, 1995, "면외하중을 받는 상이한 직교이방성 평면내의 평행균열," 대한기계학회논문집, 제19권, 제1호, pp. 170~180.
- (13) Suo, Z., 1990, "Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media," *Proc.*

- R. Soc. Lond., A427*, pp. 331~358.
- (14) Choi, S. R., Chong, C. H. and Chai, Y. S., 1994, "Interfacial Edge Crack in Two Bonded Dissimilar Orthotropic Quarter Planes under Anti-Plane Shear," *Int. J. Fracture*, Vol. 67, pp. 143~150.
- (15) Chiang, C. R., 1989, "Mode III Interface Crack Propagation," *Engng Frac. Mech.*, Vol. 32, pp. 545~550.