

〈논 문〉

비선형 경계조건을 가진 보의 정상상태 진동응답

이원경* · 여명환**

(1996년 8월 17일 접수)

Steady-state Vibration Responses of a Beam with a Nonlinear Boundary Condition

Won Kyoung Lee and Myeong Hwan Yeo

Key Words: Nonlinear Boundary Condition(비선형 경계조건), Beam Vibration(보의 진동), Method of Multiple Scales(다중시간법), Subharmonic Resonance(저조화공진)

Abstract

An analysis is presented for the response of a beam constrained by a nonlinear spring to a harmonic excitation. The system is governed by a linear partial differential equation with a nonlinear boundary condition. The method of multiple scales is used to reduce the nonlinear boundary value problem to a system of autonomous ordinary differential equations of the amplitudes and phases. The case of the third-order subharmonic resonance is considered in this study. The autonomous system is used to determine the steady-state responses and their stability.

기 호 설 명

A_n : 공진변형의 복소계수
 a_n : 공진변형의 진폭계수
 E : 보의 탄성계수
 F^* : 가진진폭
 G : 비감쇠 자유진동의 보의 변형함수
 I : 보의 면적관성모멘트
 L^* : 보의 길이
 S : 보의 단면적
 T_n : 다중시간법의 시간 스케일 ($\varepsilon^n t$)
 t : 무차원 시간
 t^* : 시간
 x : 보의 길이방향 무차원 좌표
 x^* : 보의 길이방향 좌표
 Y^* : 보의 횡방향 대표변위
 y : 보의 무차원 횡변위

y_{nr} : 비공진변형
 y_{sr} : 공진변형
 y^* : 보의 횡방향 변위
 α : 스프링의 무차원 선형계수
 α_1^* : 스프링의 선형계수
 α_3^* : 스프링의 비선형계수
 γ : 공진변형의 위상
 ε : 스프링의 무차원 비선형계수
 εt : 보의 무차원 감쇠계수
 Λ : 비공진변형의 진폭계수
 μ_k : k 번째 고유모드에 해당하는 무차원 감쇠계수, $O(1)$
 μ^* : 보의 단위길이당 감쇠계수
 ρ : 보의 밀도
 σ : 이탈변수 $O(\varepsilon)$
 $\hat{\sigma}$: 이탈변수 $O(1)$
 Ω : 무차원 가진진동수
 Ω^* : 가진진동수
 ω_n : 보의 고유진동수

*회원, 영남대학교 기계공학부

**영남대학교 대학원 기계공학부

1. 서론

운동이 작을 때에는 변형체의 진동응답은 선형 방정식과 선형 경계조건으로 구성된 선형 지배방정식으로부터 적절히 구해질 수 있다. 그러나 운동이 커짐에 따라 비선형효과가 개입되므로 선형 지배방정식으로는 계의 동적거동을 적절히 설명할 수 없게 된다. 개입되는 비선형성의 원인으로서는 기하학적, 관성적, 재료적 비선형성이 포함되며, 비선형 경계조건도 비선형성의 중요한 원인 중의 하나이다.

그 동안 릴리이프 밸브⁽¹⁾ 등 여러 공학문제^(2~4)에 적용하기 위하여 비선형 경계조건을 가진 구조물의 진동해석이 이루어져 왔다. 이들 중 Dokainish와 Elmadany⁽¹⁾는 비선형 스프링 특성을 갖는 대(seat) 위에 놓인 릴리이프 밸브의 주공진(primary resonance), 저조화공진(subharmonic resonance), 고조화공진(superharmonic resonance)을, Porter와 Billet⁽²⁾은 비선형 스프링으로 구축된 봉의 주공진, 저조화공진, 고조화공진을, Watanabe⁽³⁾는 비선형 경계조건을 가진 봉의 주공진을, Paslay와 Gurtin⁽⁴⁾은 비선형 스프링위에 놓인 선형계의 주공진을 연구하기 위하여 조화균형법(method of harmonic balance)을 사용하였다. Nayfeh와 Asfar⁽⁵⁾는 비선형 스프링을 가진 봉의 주공진, 저조화공진, 고조화공진, 조합공진(combination resonance), 초저조화공진(ultrasubharmonic resonance)을 해석하기 위하여 다중시간법을 사용하였다.

한편 Szemplinska-Stupnicka⁽⁶⁾는 일반화좌표를 조화함수로 가정함으로써 일반화 Ritz 방법을 사용하여 비선형 경계조건을 가진 보의 비선형 정규모드(nonlinear normal mode)를 구하였으며, Shaw와 Pierre⁽⁷⁾는 정규모드의 정의가 계의 위상공간내의 특정곡면(two-dimensional invariant manifold) 위에서의 동역학으로 주어질 수 있다는 점에 착안하여 비선형 연속계의 정규모드를 결정하는 일반적인 방법을 소개하고, 비선형 경계조건을 갖는 보를 예로써 들었다.

본 연구에서는 비선형 경계조건을 가지는 보의 강제진동해석을 위하여, 한쪽 경계는 고정되어 있고, 다른쪽 경계에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형 스프링으로 구축된 보를 고려하였다. 이러

한 비선형 경계치문제로 주어지는 구조동역학해석의 어려움은 선형화계의 고유함수가 비선형 경계조건을 만족하지 않기 때문에, Galerkin 방법을 적용하기 위한 시도함수(trial function)로서 이 고유함수를 사용할 수가 없다는 점이다. 결국 시도함수로서 고유함수를 사용했을 때의 이점인, 고유함수의 직교성으로부터 생겨나는 수식의 간결함을 포기해야 한다. 즉, 이 문제에 Galerkin 방법을 직접 적용해서는, 비교적 간편하고도 물리적으로 의미가 있는 일반화좌표의 비자율 상미분방정식을 유도하기가 쉽지 않다는 것이다. 따라서 본 연구에서는 Galerkin 방법에 의존함이 없이, 선형 편미분방정식과 비선형 경계조건으로 주어지는 이 문제에 다중시간법을 직접 적용하여 진폭과 위상만의 자율 상미분방정식으로 변환하였다. 여러 공진조건중 가진진동수가 특정 고유진동수의 3배인 경우 즉, 3차저조화공진만을 고려하여 이 자율 상미분방정식으로부터 정상상태응답과 그 안정성을 구하였다.

2. 지배방정식

한쪽 경계는 고정되어 있고 다른쪽 경계에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형 스프링으로 구축된 보가 Fig. 1에 나타나 있다. 길이가 L^* 이며, 단면적 S , 밀도 ρ , 탄성계수 E , 면적관성모멘트가 I 로서 균일한 이 보의 방정식은 다음과 같다.

$$-EI \frac{\partial^4 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*4}} = \rho S \frac{\partial^2 y^*(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + \mu^*(x^*) \frac{\partial y^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} \quad (1)$$

위 식에서 t^* 는 시간, x^* 는 보의 왼쪽 경계로부터의 거리, $y^*(x^*, t^*)$ 는 보의 변위이고, $\mu^*(x^*)$ 는 감쇠계수로서 x^* 의 함수이다. 보의 왼쪽 경계($x^*=0$), 즉 고정단의 경계조건은 다음과 같다.

$$y^* = 0, \quad \frac{\partial y^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2,3)$$

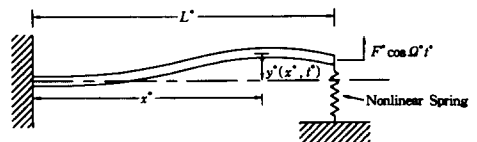


Fig. 1 A schematic diagram of a beam with a nonlinear boundary condition

비선형 스프링의 힘-변위 특성을 다음과 같이 두고,

$$H = \alpha_1^* y^* + \alpha_3^* y^{*3} \quad (4)$$

가진력을 $F^* \cos \Omega^* t^*$ 라 두면, 오른쪽 ($x^* = L^*$) 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (5)$$

$$-EI \frac{\partial^3 y^*}{\partial x^{*3}} + \alpha_1^* y^* + \alpha_3^* y^{*3} = F^* \cos \Omega^* t^* \quad (6)$$

지배방정식을 무차원화하기 위해 다음과 같은 무차원변수들을 도입한다.

$$x = \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{Y^*},$$

$$t = \frac{t^*}{L^{*2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \Omega = \Omega^* L^{*2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

여기서, Y^* 는 대표변위를 나타내며, 이 무차원변수들을 이용하면 보의 운동은 다음과 같은 경계치 문제로 정리된다.

$$-\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon \mu(x) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (7)$$

$x=0$ 에서

$$y=0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$x=1$ 에서

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

$$-\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \alpha y + \varepsilon y^3 = F \cos \Omega t \quad (11)$$

여기서,

$$\varepsilon \mu = \frac{\mu^* L^{*2}}{\sqrt{\rho S E I}}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1^* L^{*3}}{E I}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_3^* Y^{*2} L^{*3}}{E I}$$

$$F = \frac{F^* L^{*3}}{E I Y^*}$$

3. 정상상태응답

스프링의 비선형계수 ε 을 작은 매개변수로 삼아

모든 시간에 걸쳐서 타당한(uniformly valid) 근사해를 구하기 위하여 다중시간범(method of multiple scales)⁽⁸⁾을 사용하기로 한다. 우선 $y(x, t)$ 를 다음과 같이 정의된 여러 시간들의 함수로 가정하고

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (12)$$

다음과 같이 전개될 수 있다고 가정한다.

$$y(x, t; \varepsilon) = y_0(x, T_0, T_1, \dots) + \varepsilon y_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (13)$$

식 (13)을 식 (7)~(11)에 대입하고 ε 의 동일한 차수의 계수들을 같게 두면, 다음과 같이 선형 경계치문제를 얻게 된다.

$$\varepsilon^0 \text{의 계수} : -\frac{\partial^4 y_0}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} \quad (14)$$

$x=0$ 에서

$$y_0 = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$x=1$ 에서

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{\partial^3 y_0}{\partial x^3} + \alpha y_0 = F \cos \Omega T_0, \quad (18)$$

$$\varepsilon^1 \text{의 계수} : -\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \mu \frac{\partial y_0}{\partial T_0} \quad (19)$$

$x=0$ 에서

$$y_1 = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

$x=1$ 에서

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

$$-\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + \alpha y_1 = -y_0^3 \quad (23)$$

식 (14)~(18)은 선형계로서 그 해는 다음과 같이 주어진다.

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(T_1) G(x, \omega_n) e^{i\omega_n T_0} + \text{c.c.} \quad (24)$$

이 식의 우변 첫항은 $F=0$ 인 경우의 해, 즉 제차해(homogeneous solution)이며, 둘째항은 가진

력때문에 생겨난 해, 즉 비제차해(nonhomogeneous solution)라고 말할 수 있다. 따라서 가진진동수 Ω 가 고유진동수 ω_n 에 도달할 때 공진이 발생하므로 Λ (진동수가 Ω 인 응답의 계수)가 무한대가 됨은 자명하다. 여기서, cc 는 앞 항들의 공액복소수(complex conjugate)이며, G 와 Λ 는 다음과 같다.

$$G(x, \omega) = \{(\cos\sqrt{\omega} + \cosh\sqrt{\omega})(\sin\sqrt{\omega}x - \sinh\sqrt{\omega}x) - (\sin\sqrt{\omega} + \sinh\sqrt{\omega})(\cos\sqrt{\omega}x - \cosh\sqrt{\omega}x)\} \\ \{2(\sin\sqrt{\omega}\cosh\sqrt{\omega} - \cos\sqrt{\omega}\sinh\sqrt{\omega})\} \quad (25)$$

$$\Lambda = F(\sin\sqrt{\Omega}\cosh\sqrt{\Omega} - \cos\sqrt{\Omega}\sinh\sqrt{\Omega}) / \\ 2\{\sqrt{\Omega^3}(1 + \cos\sqrt{\Omega}\cosh\sqrt{\Omega}) \\ + \alpha(\sin\sqrt{\Omega}\cosh\sqrt{\Omega} - \cos\sqrt{\Omega}\sinh\sqrt{\Omega})\} \quad (26)$$

결국 이 계의 고유진동수 ω_n 은 Λ 의 극(pole)이므로 다음 특성방정식으로부터 주어진다.

$$\sqrt{\omega^3}(1 + \cos\sqrt{\omega}\cosh\sqrt{\omega}) + \alpha(\sin\sqrt{\omega}\cosh\sqrt{\omega} - \cos\sqrt{\omega}\sinh\sqrt{\omega}) = 0 \quad (27)$$

한편 $G(x, \omega_n)$ 은 ω_n 에 해당하는 선형화계의 고유함수이다. 식 (24)의 $A_n(T_1)$ 은 현재로서는 미지의 복소함수로서 다음 단계의 근사에서 가해조건(solvability condition)을 적용함으로써 구해진다. 식 (24)를 살펴보면, 주공진($\Omega \approx \omega_m$)인 경우 성립되지 않는 것을 알 수 있는데 주공진일 경우에는, F 의 크기를 $O(\epsilon)$ 으로 조정함으로써 y_0 이 $e^{i\Omega T_0}$ 항을 포함하지 않도록 수정하여야 함을 의미한다. 즉 식 (24)는 Ω 가 ω_n 으로부터 떨어져 있을 경우의 공진인 부공진(secondary resonance)만을 위한 표현이다.

식 (24)를 식 (19)와 (23)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} i\omega_n (2A'_n + A_n \mu) \cdot G(x, \omega_n) e^{i\omega_n T_0} \\ - i\Omega \mu \Lambda G(x, \Omega) e^{i\Omega T_0} + cc \quad (28)$$

$x=1$ 에서

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - ay_1 = \sum_{n,m,k} A_n A_m A_k e^{i(\omega_n + \omega_m + \omega_k)T_0} \\ + 3 \sum_{n,m,k} A_n A_m \bar{A}_k e^{i(\omega_n - \omega_m + \omega_k)T_0} \\ + 3\Lambda \sum_{n,m} A_n A_m e^{i(\Omega + \omega_n + \omega_m)T_0} \\ + 3\Lambda \sum_{n,m} \bar{A}_n \bar{A}_m e^{i(\Omega - \omega_n - \omega_m)T_0}$$

$$+ 6\Lambda \sum_{n,m} A_n \bar{A}_m e^{i(\Omega + \omega_n - \omega_m)T_0} \\ + 3\Lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{i(2\Omega + \omega_n)T_0} + \bar{A}_n e^{i(2\Omega - \omega_n)T_0}] \\ + 6\Lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\omega_n T_0} + \Lambda^3 e^{3i\Omega T_0} + 3\Lambda^3 e^{i\Omega T_0} + cc \quad (29)$$

이상의 식에서, \bar{A}_n 은 A_n 의 공액복소수를 의미하며 내부공진이 없는 경우에 3차의 저조화공진($\Omega \approx 3\omega_n$; subharmonic resonance of order three)을 살펴보기 위해 이탈변수 σ (detuning parameter)를 다음과 같이 도입하기로 한다.

$$\Omega = 3\omega_n + \sigma \quad (30)$$

여기서, $\sigma = \epsilon \hat{\sigma}$ 이고, $\hat{\sigma} = O(1)$ 이며, 위 식의 양변에 t 를 곱하고 정리하면, 다음을 얻는다.

$$(\Omega - 2\omega_n) T_0 = \omega_n T_0 + \sigma \hat{T}_1 \quad (31)$$

식 (28), (20)~(22), (29)의 해는 (i) 고유진동수를 가지는 비제차항에 해당하는 해, (ii) 고유진동수 근방의 진동수를 가지는 비제차항에 해당하는 해, 그리고 (iii) 고유진동수로부터 멀리 떨어진 진동수를 가지는 비제차항에 해당하는 해의 중첩으로 표현된다. 그러나, (ii)는 식 (31)과 같이 σ 를 이용하면 (i)과 (iii)의 유형으로 분리될 수 있다. 따라서 식 (28), (20)~(22), (29)의 해는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s(x, T_1) e^{i\omega_s T_0} + Y_1(x, T_0, T_1) + cc \quad (32)$$

위 식에서 우변의 첫항은 (i)에 해당하는 해이며, Y_1 은 (iii)에 해당하는 해로서 고유진동수와는 무관한 항이다.

ϕ 를 결정하기 위해, 식 (32)를 식 (28), (20)~(22), (29)에 대입하고, 양변의 $e^{i\omega_n T_0}$ 항의 계수를 같게 두면, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\phi_s^{(iv)} - \omega_s^2 \phi_s = -i\omega_n (2A'_n + \mu A_n) G(x, \omega_n) \quad (33)$$

$x=0$ 에서

$$\phi_s = 0 \quad (34)$$

$$\phi_s' = 0 \quad (35)$$

$x=1$ 에서

$$\phi_s'' = 0 \quad (36)$$

$$\phi_s''' - \alpha \phi_s = 3A_s^2 \bar{A}_s + 6A_s \sum_{r \neq s} A_r \bar{A}_r$$

$$+6\Lambda^2 A_s + 3\delta_{ns} \bar{A}_s^2 e^{i\sigma T_1} \quad (37)$$

위 식에서 ϕ_s 항에서의 '은 x 에 대한 미분율, A_s 항에서의 '은 T_1 에 대한 미분율을 나타낸다. 식 (33) ~ (37)에 해당하는 제차방정식이 $\phi_s=0$ 이 아닌 해를 가지므로 비제차방정식 (33) ~ (37)은 다음의 가해조건(solvability condition)^(5, 9, 10)을 만족해야만 해를 가진다.

$$i\omega_s \left(A_s' + \frac{1}{2} \mu_s A_s \right) = -3\Gamma_s A_s^2 \bar{A}_s - 6\Gamma_s A_s \sum_{r \neq s} A_r \bar{A}_r - 6\Gamma_s \Lambda^2 A_s, \quad s=1, 2, \dots (\neq n) \quad (38)$$

$$i\omega_n \left(A_n' + \frac{1}{2} \mu_n A_n \right) = -3\Gamma_n A_n^2 \bar{A}_n - 6\Gamma_n A_n \sum_{r \neq n} A_r \bar{A}_r - 6\Gamma_n \Lambda^2 A_n - 3\Gamma_n \Lambda^2 \bar{A}_n^2 e^{i\sigma T_1} \quad (39)$$

여기서,

$$\Gamma_k = \frac{1}{2 \int_0^1 G^2(x, \omega_k) dx} \quad (40)$$

$$\mu_k = 2\Gamma_k \int_0^1 \mu(x) G^2(x, \omega_k) dx \quad (41)$$

이다. A_k 를 극좌표 형태로 나타내면,

$$A_k = \frac{1}{2} a_k(T_1) e^{i\beta_k(T_1)} \quad (42)$$

이다. 여기서, a_k 와 β_k 는 실수이다. 식 (42)를 식 (38), (39)에 대입하고, 실수부와 허수부로 분리하면 다음과 같은 표현을 얻는다.

$$a_s' = -\frac{\mu_s}{2} a_s \quad (43)$$

$$a_s \beta_s' = \frac{3\Gamma_s}{4\omega_s} a_s^3 + \frac{6\Gamma_s \Lambda^2}{\omega_s} a_s + \frac{3\Gamma_s}{2\omega_s} a_s \sum_{r \neq s} a_r^2, \quad s=1, 2, \dots (\neq n) \quad (44)$$

$$a_n' = -\frac{\mu_n}{2} a_n - \frac{3\Gamma_n \Lambda}{2\omega_n} a_n^2 \sin \gamma \quad (45)$$

$$a_n \gamma' = a_n \bar{\sigma} - \frac{9\Gamma_n}{4\omega_n} a_n^3 - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} a_n - \frac{9\Gamma_n}{2\omega_n} a_n \sum_{r \neq n} a_r^2 - \frac{9\Gamma_n \Lambda}{2\omega_n} a_n^2 \cos \gamma \quad (46)$$

위 식에서,

$$\gamma = \bar{\sigma} T_1 - 3\beta_n \quad (47)$$

식 (43)으로부터 $a_s \propto e^{-\frac{1}{2}\mu_s T_1}$ 이므로 a_n 을 제외한 모든 진폭 a_s 는 모두 시간이 충분히 지나면 소멸됨을 알 수 있다. 따라서 정상상태운동($a_n'=0$ 과 γ'

)은 자율계 (45), (46)의 평형해(equilibrium solution)로서 다음과 같은 대수방정식으로부터 구해진다.

$$\mu_n a_n = -\frac{3\Gamma_n \Lambda}{\omega_n} a_n^2 \sin \gamma \quad (48)$$

$$a_n \bar{\sigma} - \frac{9\Gamma_n}{4\omega_n} a_n^3 - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} a_n = \frac{9\Gamma_n \Lambda}{2\omega_n} a_n^2 \cos \gamma \quad (49)$$

식 (48), (49)에서 γ 를 소거하면 다음 식을 얻게 된다.

$$\left[\frac{9}{4} \mu_n^2 + \left(\bar{\sigma} - \frac{9\Gamma_n}{4\omega_n} a_n^2 - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} \right)^2 \right] a_n^2 = \frac{81\Gamma_n^2 \Lambda^2}{4\omega_n^2} a_n^4 \quad (50)$$

식 (50)으로부터

$$a_n = 0 \quad (51)$$

또는

$$a_n^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (52)$$

이다. 여기서,

$$p = \frac{4\omega_n \bar{\sigma}}{9\Gamma_n} - 6\Lambda^2 \quad (53)$$

$$q = \frac{16\omega_n^2}{81\Gamma_n^2} \left[\frac{9}{4} \mu_n^2 + \left(\bar{\sigma} - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (54)$$

이다. 식 (54)에서 $q > 0$ 이므로,

$$p^2 - q \geq 0 \text{ 이면서 } p > 0 \quad (55)$$

인 조건이 만족되면 식 (52)으로부터 a_n 은 실근을 가질 수 있다. 식 (13), (24), (42)로부터 다음과 같은 정상상태에서의 보의 변형을 얻는다.

$$y(x, t) = y_{sr}(x, t) + y_{nr}(x, t) + O(\epsilon) \quad (56)$$

$$y_{sr}(x, t) = a_n G(x, \omega_n) \cos\left(\frac{1}{3}\Omega t - \frac{1}{3}\gamma\right) \quad (57)$$

$$y_{nr}(x, t) = 2\Lambda G(x, \Omega) \cos \Omega t \quad (58)$$

변형 y_{sr} 은 고유진동수 ω_n 에 가까운 진동수와 고유진동양상(normal mode shape) $G(x, \omega_n)$ 을 가진 3차의 저조화공진응답 a_n , γ 에 기인하므로 저조화공진변형(subharmonic resonance deflection)이라고 부른다. $\Omega/3 \approx \omega_n$ 이므로 y_{sr} 은 n 번째 고유모드 진동과 흡사하다. 한편 변형 y_{nr} 은 가진진동수 Ω 와 그에 해당하는 진동양상 $G(x, \Omega)$ 를 가진 응답으로서, 가진진동수 Ω 가 고유진동수 ω_n 의 근방에 있지 않기 때문에 개입된 응답이며, Λ 즉 비공진 응답(nonresonance response)에 기인하므로 비공

진변형 (nonresonance deflection) 이라고 부르기로 한다. 정상상태의 공진응답 $a_n=0$ 인 경우에는 바로 이 비공진변형이 변형 $y(x, t)$ 가 된다. 달리 말하자면 이 비공진변형이 선형계에서 가진력의 진동수와 같은 진동수를 가지는 강제진동응답으로서 선형해석에서는 바로 이 변형을 얻게 된다.

위 식에서 a_n 은 식 (51) 또는 식 (52)로부터 구해진 실수이다. 식 (56)은 $\sum_{m=1}^{\infty} G(x, \omega_m) \psi_m(t)$ 의 형태가 아니므로 선형화계의 고유함수를 시도함수로 사용하는 Galerkin 방법으로는 이 결과를 구할 수 없음을 보여주고 있다.

4. 안정성 해석

4.1 $a_n \neq 0$ 인 경우

이 경우의 안정성을 판별하기 위해 정상상태해로부터의 작은 교란에 대한 거동을 조사하기 위해 다음과 같이 둔다.

$$a_n = a_{n0} + \delta a_n \quad (59)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \delta \gamma \quad (60)$$

여기서, 아래첨자 0은 정상상태 해를 나타내고, δ ()는 이 정상상태 해로부터의 작은 교란을 나타낸다. 식 (59), (60)을 식 (45), (46)에 대입하고, δa_n , $\delta \gamma$ 에 대해 선형항만을 취하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\delta a_n' = \frac{\mu_n}{2} \delta a_n + \left(\frac{3\Gamma_n a_{n0}^2}{4\omega_n} + \frac{6\Gamma_n \Lambda^2 a_{n0}}{\omega_n} - \frac{a_{n0} \bar{\sigma}}{3} \right) \delta \gamma \quad (61)$$

$$\delta \gamma' = \left(\frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n a_{n0}} - \frac{9\Gamma_n a_{n0}}{4\omega_n} - \frac{\bar{\sigma}}{a_{n0}} \right) \delta a_n - \frac{3\mu_n}{2} \delta \gamma \quad (62)$$

식 (61), (62)의 계수행렬의 모든 고유치 λ 의 실수부가 음이면 해 a_n , γ 는 안정하다. 특성방정식이 다음과 같으므로,

$$\lambda^2 + \mu_n \lambda + \left(\frac{3\Gamma_n a_{n0}^2}{4\omega_n} + \frac{6\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} - \frac{\bar{\sigma}}{3} \right) - \left(\frac{9\Gamma_n a_{n0}^2}{4\omega_n} - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} + \bar{\sigma} \right) - \frac{3\mu_n^2}{4} = 0 \quad (63)$$

다음의 조건이 만족되면 응답 a_n , γ 는 안정하다.

$$\left(\frac{3\Gamma_n a_{n0}^2}{4\omega_n} + \frac{6\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} - \frac{\bar{\sigma}}{3} \right)$$

$$\left(\frac{9\Gamma_n a_{n0}^2}{4\omega_n} - \frac{18\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} + \bar{\sigma} \right) - \frac{3\mu_n^2}{4} > 0 \quad (64)$$

4.2 $a_n=0$ 인 경우

이 경우 γ_0 를 알 수 없기 때문에 위와 같은 방법으로는 안정성을 판별할 수 없다. 따라서 안정성 판별을 위하여 식 (45)와 (46) 대신에 식 (39)를 사용하기 위해 다음과 같이 둔다.

$$A_n = A_{n0} + \delta A_n \quad (65)$$

여기서, $A_{n0}=0$ 이고, δA_n 은 작은 교란을 나타낸다. 식 (65)를 식 (39)에 대입하고, δA_n 에 대한 선형 항만을 취하면 다음과 같다.

$$i\omega_n \left(\delta A_n' + \frac{\mu_n}{2} \delta A_n \right) = -6\Gamma_n \Lambda^2 \delta A_n \quad (66)$$

위 식에서 δA_n 은 복소수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta A_n = \delta A_{nr} + i\delta A_{ni} \quad (67)$$

여기서, δA_{nr} , δA_{ni} 는 실수이다.

식 (67)을 식 (66)에 대입하고, 실수부와 허수부를 나누면 다음과 같다.

$$\delta A_{nr}' = -\frac{\mu_n}{2} A_{nr} - \frac{6\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} A_{ni} \quad (68)$$

$$\delta A_{ni}' = \frac{6\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} A_{nr} - \frac{\mu_n}{2} A_{ni} \quad (69)$$

식 (68)과 (69)의 계수행렬의 고유치 λ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu_n}{2} \pm i \frac{3\Gamma_n \Lambda^2}{\omega_n} \quad (70)$$

식 (70)에서 감쇠계수 μ_n 이 양이기만 하면 $\lambda_{1,2}$ 의 실수부는 항상 음이 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 $a_n=0$ 인 정상상태 해는 항상 안정하다.

5. 수치결과

수치예를 위하여 본 연구에서는 $n=1$ 인 경우, 즉 가진진동수 Ω 가 첫 번째 고유진동수의 3배인 저조화공진 ($\Omega \approx 3\omega_1$)의 경우만을 고려하기로 한다. 선택한 매개변수의 값은

$$\{\epsilon, \mu_1, \alpha\} = \{0.01, 0.1, 0.3\}$$

이며, 이 때 고유진동수는 다음과 같다.

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\} = \{3.6822, 22.0618, 61.7069, \dots\}$$

식 (51), (52)와 안정성 판별기준을 이용하여 정상상태응답의 진폭을 이탈변수 σ 와 가진진폭 F 의 함수로 Fig. 2와 3에 나타내었다. 여기서 실선과 점선은 각각 안정한 응답과 불안정한 응답을 나타낸다. 진폭이 0이 아닌 응답(nonzero-amplitude response)은 한쌍이 존재하며, 하나는 안정하며 다른 하나는 불안정하다. 진폭이 0인 응답(zero-amplitude response)은 안정하기 때문에 많게는 두 개의 안정한 응답이 존재할 수 있다. 이 경우 정상상태응답은 전적으로 초기조건에 달려 있다.

Fig. 2는 saddle node 분기, 즉 응답곡선의 기울기가 무한대가 되는 분기가 세 곳에서 발견되고 있

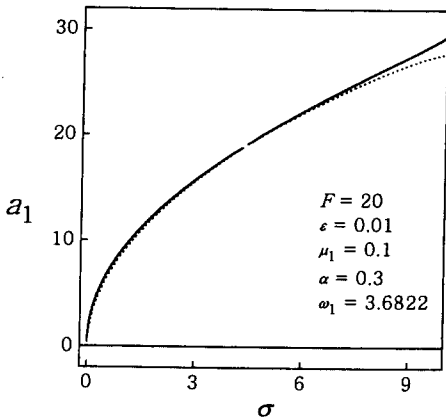


Fig. 2 Variation of the amplitude of subharmonic responses with the detuning parameter σ . —: Stable,: Unstable

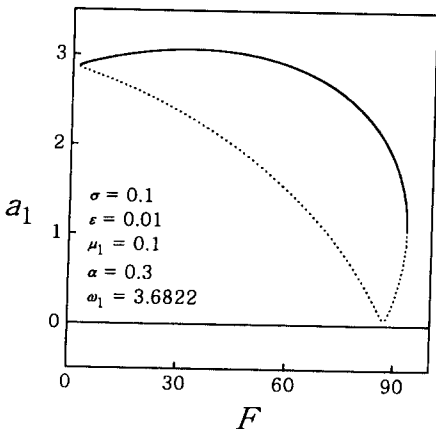


Fig. 3 Variation of the amplitude of subharmonic responses with the amplitude of the excitation F . —: Stable,: Unstable

다. 진폭이 0인 응답때문에 이 분기에서 점프현상이 발생함을 말해 주고 있다. 또한, 이 그림의 결과는 σ 가 증가함에 따라 응답의 진폭이 계속 증가함을 보여주는데, 이것은 물리적으로 명백히 타당성이 없는 결과이다. 왜냐하면 이탈변수 σ 가 증가함에 따라 가진진동수 Ω 가 증가하여 $\omega_2(\sigma = 1101.5$ 에 해당)에 근접하게 되므로 저주파공진의 효과는 사라져야만 하기 때문이다. 이 결과는 Nayfeh와 Asfar⁽⁵⁾의 비선형 경계치문제뿐만 아니라 Hadian과 Nayfeh,⁽¹¹⁾ Lee와 Kim⁽¹²⁾의 축대칭 진동하는 원판문제에서도 나타났는데 이러한 결과는 직관에 명백히 위배되므로 반드시 수치적 혹은 실험적으로 검증되어야만 한다. 그러나 우리는 이 검증을 장차의 연구로 미루기로 한다. 다만 Lee와 Kim⁽¹²⁾의 경우, σ 가 적당히 작은 범위 내에선 해석결과가 수치해와 잘 일치함을 보여주었는데 이로 미루어 보아 Fig. 2의 결과도 σ 가 충분히 작은 경우에만 타당성이 있을 것으로 짐작된다. Fig. 3은 F 가 어느 값을 초과하면 가진진폭 F 가 증가함에 따라 공진응답의 진폭이 감소함을 보여주고 있는데 이 현상은 이 계가 비선형계임을 감안하더라도 매우 특이한 현상이다. 즉, 이 공진응답 a_1 의 거동은

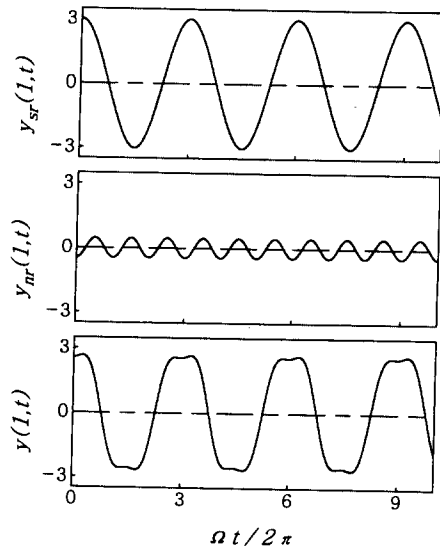


Fig. 4 Time histories of steady-state response at $x = 1$ for $\sigma = 0.1$, $F = 20$, $\epsilon = 0.01$, $\mu_1 = 0.1$, $\alpha = 0.3$ and $\omega_1 = 3.6822$: $y_{sr}(1, t)$, $y_{nr}(1, t)$ and $y(1, t)$ are corresponding to resonance response nonresonance response and total response, respectively

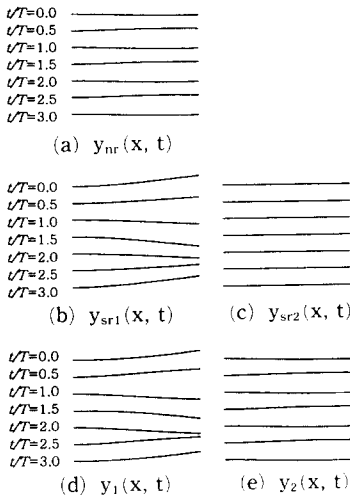


Fig. 5 Deflection curves of the beam for three periods of the excitation for $\sigma=0.1$, $F=20$, $\epsilon=0.01$, $\mu_1=0.1$, $\alpha=0.3$ and $\omega_1=3.6822$; (a) nonresonance deflection curves, (b and c) resonance deflection curves, and (d and e) total deflection curves

식 (26)에서 알 수 있듯이 A 가 F 에 비례하는 비공진응답의 거동과는 판이한 것이다. 기존의 연구^(5, 11, 12)에서도 이러한 현상이 발견되었으며, Lee와 Kim⁽¹²⁾은 이 결과의 타당성을 수치적으로 검증하였다.

Fig. 4는 $\sigma=10$ 이고, $F=20$ 인 경우에 $x=1$ 에서의 저조화공진변형 y_{sr} , 비공진변형 y_{nr} 과 그 합인 변형 y 의 시간이력(time history)을 보여주고 있다. 따라서 $y_{sr}(1, t)$ 와 $y_{nr}(1, t)$ 의 진폭은 각각 $a_1 G(1, \omega_1)$ 과 $2AG(1, \Omega)$ 이며, 이들의 진동수는 각각 $\Omega/3$ 과 Ω 이다. Fig. 5는 정상상태에 도달한 이후 가진주기($T=2\pi/\Omega$)의 3배 동안의 보의 두 안정한 응답에 해당하는 변형곡선을 보여주고 있다. y_{nr} 은 가진진동수 Ω 와 같은 진동수를 가지므로 매 가진주기마다 동일한 변형곡선을 보여준다. y_{sr1} 과 y_{sr2} 는 공진응답의 진폭이 0이 아닌 경우와 0인 경우의 저조화공진변형을 보여주고 있다. 결국 정상상태에서 보의 변형이 y_1 과 y_2 중 어느 것에 도달하는가는 전적으로 초기조건 $y(x, 0)$ 과 $\partial y(x, 0)/\partial t$ 에 달려 있다.

6. 결 론

비선형 경계조건을 가지는 구조물의 진동특성을

알아보기 위하여, 한쪽 경계는 고정되어 있고, 다른쪽 경계에는 조화가진력이 작용하는 한편 비선형 스프링으로 구속된 보의 강제진동을 해석하였다. 3차의 저조화공진, 즉 $\Omega \approx 3\omega_n$ (Ω 는 가진진동수, ω_n 은 n 번째 고유진동수)인 경우, 정상상태에 도달하면 보의 변형은 n 번째 고유진동양상과 진동수가 $\Omega/3$ 인 진동, 즉 n 번째 고유모드 진동과 흡사한 변형과, 선형계의 변형에 해당하는 비공진변형의 합으로 주어진다. 진폭이 0인 공진응답은 언제나 존재하며 안정한 반면, 진폭이 0이 아닌 공진응답은 특정 매개변수 값에서 2 개가 존재하는데 그 중 하나만 안정하다. 진동수 이탈변수가 증가하여 가진진동수가 ω_{n+1} 에 도달할 때까지 진폭이 0이 아닌 공진응답의 진폭이 계속 증가하는 양상은 물리적으로 타당성이 없으므로, 이탈변수의 어떤 범위 내에서 이 해석결과가 타당한지를 확인해야만 한다. 또한 강제진동응답의 진폭이 가진진폭에 비례하는 선형계의 현상과는 대조적으로, 가진진폭이 증가함에 따라 이 공진응답의 진폭이 감소하는 현상을 보여 주었다.

후 기

이 연구는 한국학술진흥재단의 1996년도 자유공모과제 연구비의 지원에 의한 것이다.

참고문헌

- (1) Dokainish, M. A. and Elmadany, M. M., 1978, "On the Nonlinear Response of a Relief Valve," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 100, pp. 675~680.
- (2) Porter, B. and Billet, R. A., 1965, "Harmonic and Subharmonic Vibration of a Continuous System having Nonlinear Constraint," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 7, pp. 431~439.
- (3) Watanabe, T., 1978, "Forced Vibration of Continuous System with Nonlinear Boundary Conditions," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 100, pp. 487~491.
- (4) Paslay, P. R. and Gurtin, M. E., 1960, "The Vibration Response of a Linear Undamped System Resting on a Nonlinear Spring," *ASME*

- Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 272~274.
- (5) Nayfeh, A. H. and Asfar, K. R., 1986, "Response of a Bar Constrained by a Non-linear Spring to a Harmonic Excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 1, pp. 1~15.
- (6) Szemplinska-Stupnicka, W., 1983, "Non-linear Normal Modes and the Generalized Ritz Method in the Problems of Vibrations of Non-linear Elastic Continuous Systems," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 18, No. 2, pp. 149~165.
- (7) Shaw, S. W. and Pierre, C., 1994, "Normal Modes of Vibration for Non-linear Continuous Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 3, pp. 319~347.
- (8) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Non-linear Oscillations*, New York: Wiley-Interscience.
- (9) Nayfeh, A. H., 1973, *Perturbation Methods*, New York: Wiley-Interscience.
- (10) Nayfeh, A. H., 1981, *Introduction to Perturbations Techniques*, New York: Wiley-Interscience.
- (11) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 279~292.
- (12) Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-mode Interaction," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, pp. 1015~1022.