

〈논 문〉

## 곡선보 요소의 고유치 해석에서 질량행렬의 영향

유하상\* · 신호철\*\*

(1996년 7월 29일 접수)

### The Effect of the Mass Matrix in the Eigenvalue Analysis of Curved Beam Elements

Ha-Sang Ryu and Hyo-Chol Sin

**Key Words:** Curved Beam Element(곡선보 요소), Strain Interpolation(변형률 보간), Eigenvalue Analysis(고유치 해석), Quality of Mass Matrix(질량행렬의 특성)

#### Abstract

Curved beam elements with two nodes based on shallow beam geometry and strain interpolations are employed in eigenvalue analysis. In these elements, the displacement interpolation functions and mass matrices are consistent with strain fields. To assess the quality of the element mass matrix in free vibration problems, several numerical experiments are performed. In these analyses, both the inconsistent mass matrices using linear displacement interpolation function and the consistent mass matrices are used to show the difference. The numerical results demonstrate that the accuracy is closely related to the property of the mass matrix as well as that of the stiffness matrix and that the mass matrix consistent with strain fields is very beneficial to eigenvalue analysis. Also, it is proved that the strain based elements are very efficient in a wide range of element aspect ratios and curvature properties.

#### 1. 서 론

통상적인 변위 가정법에 의해 정식화된 곡선보 요소는 보 단면의 두께가 길이에 비해 상대적으로 작아질 경우, 강성과잉현상이 초래되어 정적 해석에서 변위값과 응력이 큰 오차를 발생시킬 뿐만 아니라 고유치 해석에서도 매우 부정확한 결과를 얻게된다. 강성과잉의 원인은 저차의 요소가 굽힘에너지를 표현할 때 존재하지 않는 전단 및 막에 대한 가상에너지를 도입하게 되기 때문임이 알려져 있다. 곡선보의 강성과잉현상을 제거하기 위해 많은 연구가 수행되어 다양한 방법이 제시되었는데,

대표적인 방법으로는 변형률 요소,<sup>(1-6, 13, 14)</sup> 감차적분법,<sup>(7)</sup> anisoparametric interpolation,<sup>(11)</sup> field consistency,<sup>(8-10)</sup> hybrid/mixed formulation<sup>(12)</sup> 등이 있다.

곡선보의 고유치 해석에서 유한요소 해의 정확도는 강성행렬의 성질뿐만 아니라 질량행렬의 특성과도 관련이 있음이 알려져 있다.<sup>(10, 11)</sup> 민욱기 등<sup>(10)</sup>은 질량행렬의 적분법에 변화를 줌으로써 계산된 고유치는 강성행렬 뿐만 아니라 질량행렬의 성질에도 민감함을 보였다. Tessler와 Spiridigliozzi<sup>(11)</sup>는 변형률장에 적합하지 않은 변위장을 갖는 요소가 고유치 해석에 적용되었을 때 강성행렬의 성질에 일치하지 않는 질량행렬을 가지게 되어 부정확한 계산을 하게됨을 지적하였다. 이들은 얇은 보 형상을 기초로 보 요소에 가상의 절점변위를 도입

\*회원, 한국전력연구원

\*\*회원, 서울대학교 기계설계학과

하여 강성과잉이 제거된 단순한 형태의 변형률장과 고차의 변위장을 보유하는 2절점 요소를 제안하고 정적 및 동적 문제에 적용하였다. 깊은 보 이론에 의한 변형률 요소<sup>(1-6)</sup>는 변형률과 곡률 및 변위관계의 미분방정식의 해를 이용하여 변위장을 유도하는 방법으로 정적 및 동적 문제의 해석에서 우수한 정확성을 보이지만 보의 형상이 직선보에 접근함에 따라 적용할 수 없게 된다. 한편 양승용 등<sup>(13, 14)</sup>은 곡률에 기초하여 정식화된 직선보와 곡선보를 고유치 해석에 적용하여 우수한 결과를 얻었다.

본 논문에서는 변형률 요소의 정식화 기법을 적용하여 2절점 얇은 곡선보 요소를 정식화하고 고유치 문제에 적용한다. 얇은 보 형상을 채택한 이유는 곡선보 뿐만 아니라 직선보에도 적용하기 위해서이다. 요소에서 변형률장과 곡률장은 단순한 다항식 표현을 이용하여 가정하고 변형률장에 일치하는 변위장은 변형률장을 적분하여 얻는다. 고유치 해석에서 정식화된 요소의 성능을 평가하기 위해 다양한 수치실험을 수행한다. 수치해석에서 변형률장의 성질에 일치하는 질량행렬과 선형의 Lagrange 보간함수를 사용한 변형률장에 일치하지 않는 질량행렬의 두 가지 경우를 적용하고, 그 특성 및 성능을 검토한다.

### 2. 기본 관계식

Fig. 1에 나타난 곡선보의 거동은 중립면의 변위  $u$ 와  $w$ , 그리고 단면의 회전각  $\theta$ 로 나타낼 수 있다. 보의 초기 형상을 얇은 보로 가정하면  $w_0$ 는 Hermite 보간함수를 사용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$w_0(x) = \beta_1 L (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) + \beta_2 L (\eta^3 - \eta^2) \quad (1)$$

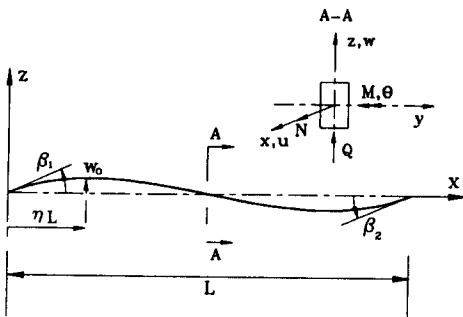


Fig. 1 Shallowly curved beam element

여기서,  $\eta = x/L$ 이다.

변형률장의 성질에 적합하며 곡선 보의 거동 특성을 고려한 변위장을 얻기 위해서는 변형률로부터 변위를 구하는 관계식이 필요하다. 얇은 보 이론에 따르면 곡률  $\chi$ 와 회전각  $\theta$ 사이의 관계는  $\chi = -\theta, \chi$ 이므로 곡률에 의해 발생하는 회전각  $\theta$ 는 곡률을 식(2)와 같이 적분함으로써 구할 수 있다.

$$\theta = -\int_0^x \chi(\xi) d\xi + C_\theta \quad (2)$$

여기서,  $C_\theta$ 는 적분상수로 요소의 강제운동 성분과 관계된다. 막 변형률  $\epsilon$ 과 전단 변형률  $\gamma$  그리고 회전각  $\theta$ 에 의한 보의 거동을 고려하면 변위  $u$ 와  $w$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$u = \int_0^x \{ -(\theta + \gamma) w_{0,\xi} + \epsilon \} d\xi + C_u \quad (3)$$

$$w = \int_0^x \{ \theta + \gamma + \epsilon w_{0,\xi} \} d\xi + C_w \quad (4)$$

식 (3)과 (4)에서  $w_{0,\xi}$ 는  $w_0$ 의  $\xi$ 에 대한 미분을 나타내며  $C_u$ 와  $C_w$ 는 적분상수로 강제운동 성분과 관계된다.

굽힘모멘트  $M$ , 축력  $N$  그리고 전단력  $Q$ 와 각각의 변형률 성분과의 관계는 다음과 같은 구성방정식으로 표현된다.

$$M = EI\chi, \quad N = EA\epsilon, \quad Q = GAk\gamma \quad (5)$$

여기서,  $E$ 는 탄성계수,  $G$ 는 횡탄성계수,  $k$ 는 전단보정계수,  $A$ 는 보 단면의 면적이고  $I$ 는 관성모멘트이다.

외력이 없는 경우 곡선보 요소의 운동방정식을 유도하기 위한 Hamilton의 정리는 다음과 같다.

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^L \{ EI\chi^2 + EA\epsilon^2 dx + GAk\gamma^2 \} dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \right] dt = 0 \quad (6)$$

여기서,  $\rho$ 는 밀도이다.

### 3. 변형률 가정에 기초한 곡선보 요소

본 논문에서는 요소 내에서 일정한 곡률장을 가정한 요소와 선형의 곡률변화를 가정한 곡선보 요소를 정식화한다.

### 3.1 변형률장의 가정 및 변위장의 유도

#### 3.1.1 CCCS 요소

요소 내의 곡률  $\chi$ , 막 변형률  $\varepsilon$  그리고 전단 변형률  $\gamma$ 를 일정하다고 가정하면 요소 내의 곡률장과 변형률장은 다음과 같이 주어진다.

$$\chi = a_1, \quad \gamma = a_2, \quad \varepsilon = a_3 \quad (7)$$

여기서  $a_1$ ,  $a_2$  그리고  $a_3$ 는 임의의 상수이다. 식 (7)을 식 (2), (3) 그리고 식 (4)에 대입하면 유도된 변위장은 다음과 같다.

$$u = \{\beta_1/2 - 2(2\beta_1 + \beta_2)\eta/3 + 3\beta_0\eta^2/4\}x^2a_1 + (1-\eta)(-\beta_1 + \beta_0\eta)xa_2 + xa_3 + C_u - w_0C_\theta \quad (8a)$$

$$w = -x^2/2a_1 + xa_2 + (1-\eta)(\beta_1 - \beta_0\eta)xa_3 + C_w + xC_\theta \quad (8b)$$

$$\theta = -xa_1 + C_\theta \quad (8c)$$

식 (8)에서  $\beta_0 = \beta_1 + \beta_2$ 이다.

#### 3.1.2 LCCS 요소

요소 내에서  $\chi$ 의 변화를 선형으로,  $\varepsilon$ 을 상수로 가정하면 곡률장과 막 변형률장은 다음과 같이 주어진다.

$$\chi = a_1 + a_2x, \quad \varepsilon = a_3 \quad (9)$$

전단 변형률  $\gamma$ 는 독립적으로 가정하지 않고 보의 평형방정식으로부터 아래와 같이 가정한다.

$$\gamma = \alpha dx/dx = \alpha a_2, \quad \alpha = \frac{EI}{GAk} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 식 (2), (3) 그리고 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 변위장을 얻는다.

$$u = \{\beta_1/2 - 4\beta_0\eta/3 + 3\beta_0\eta^2/4\}x^2a_1 + \{\beta_1x^3/6 - 2\beta_0x^3\eta/4 + 3\beta_0x^3\eta^3/10 + \alpha(1-\eta)x(-\beta_1 + \beta_0\eta)\}a_2 + xa_3 + C_u - w_0C_\theta \quad (11a)$$

$$w = -x^2/2a_1 + (\alpha x - x^3/6)a_2 + (1-\eta)x(\beta_1 - \beta_0\eta)a_3 + C_w + xC_\theta \quad (11b)$$

$$\theta = -xa_1 - x^2/2a_2 + C_\theta \quad (11c)$$

### 3.2 강성행렬과 질량행렬의 유도

가정된 곡률장과 변형률장 그리고 변위장에 관한 식들은 아래와 같이 행렬형태로 정리할 수 있다.

$$\chi = \mathbf{B}_\chi \mathbf{V}, \quad \varepsilon = \mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{V}, \quad \gamma = \mathbf{B}_\gamma \mathbf{V} \quad (12a)$$

$$u = \mathbf{H}_u \mathbf{V}, \quad w = \mathbf{H}_w \mathbf{V}, \quad \theta = \mathbf{H}_\theta \mathbf{V} \quad (12b)$$

여기서,

$$\mathbf{V}^T = \{a_1, a_2, a_3, C_u, C_w, C_\theta\} \quad (13)$$

식 (12)와 같이 표현된 식들을 절점변위의 값으로 주어지는 일반적인 경계조건에 적용되도록 하려면  $\mathbf{V}$ 와 절점변위벡터  $\mathbf{U} = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\}^T$ 와의 관계가 필요하다.  $\mathbf{V}$ 와  $\mathbf{U}$ 의 관계는 식 (12b)로 주어진 변위장에 절점좌표를 대입하여 아래와 같은 행렬형태로 얻을 수 있다.

$$\mathbf{T}_v \mathbf{V} = \mathbf{U} \quad (14)$$

여기서,

$$\mathbf{T}_v^T = [\mathbf{H}_u^T|_{s=0}, \mathbf{H}_w^T|_{s=L}, \mathbf{H}_\theta^T|_{s=0}, \mathbf{H}_u^T|_{s=L}, \mathbf{H}_w^T|_{s=L}, \mathbf{H}_\theta^T|_{s=L}] \quad (15)$$

따라서  $\mathbf{V}$ 는 다음과 같이 변환행렬  $\mathbf{T}_m$ 을 매개로 절점변위의 값으로 표시된다.

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}_m \mathbf{U}, \quad \mathbf{T}_m = \mathbf{T}_v^{-1} \quad (16)$$

변환행렬  $\mathbf{T}_m$ 을 이용하면 곡선보의 곡률장 및 변형률장 그리고 변위장들을 절점변위의 값으로 표현할 수 있다.

위에서 나타난 변형률장 및 변위장에 관한 식들을 식 (6)에 대입하면 아래와 같이 고유치 해석에 필요한 유한요소 운동방정식을 얻는다.

$$\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^e \mathbf{U} = 0 \quad (17)$$

여기서,

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}_m^T \left[ \int_0^L \{E\mathbf{I}\mathbf{B}_\chi^T \mathbf{B}_\chi + A\mathbf{E}\mathbf{B}_\varepsilon^T \mathbf{B}_\varepsilon + G\mathbf{A}k\mathbf{B}_\gamma^T \mathbf{B}_\gamma\} dx \right] \mathbf{T}_m \quad (18)$$

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{T}_m^T \left[ \int_0^L \rho \{A\mathbf{H}_u^T \mathbf{H}_u + A\mathbf{H}_w^T \mathbf{H}_w + I\mathbf{H}_\theta^T \mathbf{H}_\theta\} dx \right] \mathbf{T}_m \quad (19)$$

## 4. 해석 결과 및 고찰

곡선보의 고유치에 대해 첫째, 요소의 수를 증가 시킴에 따른 수치해의 수렴성, 둘째, 보의 길이대 두께 비의 변화에 따른 수치해의 정확도, 셋째, 질량행렬의 계산에 이용되는 변위장의 변화에 따른 수치해의 정확도, 넷째, 보의 초기 형상의 곡률의

변화가 수치해에 미치는 영향의 관점에서 수치실험을 수행하여 그 결과를 검토하였다. 수치계산을 위하여 단면의 폭  $b=1$ , 물성치는  $E=3 \times 10^7$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $\rho=0.28$ 로 하였다. 수치실험을 통해 얻은 결과를 나타낸 표와 그림에서 (CO)는 질량행렬을 구성함에 있어 변형률장에 일치하는 변위장을 사용한 요소를 의미하고, (IN)은 유도된 변위장을 사용하지 않고 선형의 Lagrange 보간함수를 사용한 경우를 나타낸다. 또  $L_g$ 는 보의 전체 길이,  $L_e$ 는 분할된 요소에 해당하는 보의 길이,  $h$ 는 보 단면의 두께,  $w_g^2$ 은 유한요소해석에 의한 고유치,  $w_e^2$ 은 비교를 위해 적용된 고유치의 기준 값을 각각 나타낸다.

Tables 1, 2, 3에는  $L_g=20$ 이고, 두께  $h$ 가 0.02, 0.4 그리고 4인 3가지 모델에 대하여 제1, 제2 그리고 제3 고유치에 대한 수치해석결과가 이론해<sup>(15)</sup>

에 수렴되어 가는 경향이 나타나 있다. 직선 보는 초기 형상이  $\beta_1=\beta_2=0$ 이므로 CCCS(CO)요소의 경우 2차의 변위장을 보유하게 되고, LCCS(CO)요소의 경우는 3차의 변위보간함수를 가진다. 변위장이 제1, 제2, 제3의 고유모드를 나타내기 위해서 선형의 보간함수에 의한 요소는 각각 2개, 3개, 4개의 요소가 필요하게 되고, 2차의 보간함수에 의한 요소는 각각 1개, 2개, 3개의 요소, 3차의 보간함수에 의한 요소일 경우 각각 1개, 1개, 2개의 요소가 필요하다. 해석결과는 변위보간함수가 해당하는 고유모드를 나타낼 수 있을 경우에 계산된 고유치가 의미를 가질 수 있음을 보여준다. 각 모드별 고유모드를 나타내기에 충분한 요소분할이 된 경우에 오차는 두께의 변화에 대해 변화하지만 요소 수의 증가에 따라 빠른 감소를 보임으로 보아 사용된 요소들의 강성행렬에서는 강성과잉이 제거되었다고

**Table 1** Convergence of the normalized eigenvalues in a simply supported straight beam ( $L_g/h=1000$ )

No. of elements	Mode number	Normalized eigenvalues			
		CCCS(CO)	CCCS(IN)	LCCS(CO)	LCCS(IN)
2	1	1.2319	1.9711	1.0079	1.4783
	2	1.2319	3.69E05	1.2319	3.69E05
	3	2.49E05	4.38E09	1.5375	7.20E04
3	1	1.0965	1.3305	1.0016	1.1974
	2	1.4392	3.7419	1.0238	1.8710
	3	1.2320	1.64E05	1.2320	1.64E05
4	1	1.0530	1.1709	1.0005	1.1075
	2	1.2319	1.9711	1.0079	1.4783
	3	1.5527	5.9920	1.0369	2.0363
6	1	1.0232	1.0717	1.0001	1.0466
	2	1.0965	1.3305	1.0016	1.1974
	3	1.2319	1.9710	1.0079	1.4783
8	1	1.0130	1.0395	1.0000	1.0260
	2	1.0530	1.1709	1.0005	1.1078
	3	1.1653	1.4412	1.0026	1.2545
10	1	1.0083	1.0251	1.0000	1.0166
	2	1.0336	1.1053	1.0002	1.0677
	3	1.0774	1.2579	1.0011	1.1577

**Table 2** Convergence of the normalized eigenvalues in a simply supported straight beam ( $L_g/h=50$ )

No. of elements	Mode number	Normalized eigenvalues			
		CCCS(CO)	CCCS(IN)	LCCS(CO)	LCCS(IN)
2	1	1.2319	1.96941	1.0081	1.4780
	2	1.2369	928.94	1.2369	924.33
	3	623.53	2.78E05	1.5512	184.10
3	1	1.0965	1.3301	1.0017	1.1973
	2	1.4396	3.7074	1.0250	1.8690
	3	1.2432	415.64	1.2432	411.02
4	1	1.0530	1.1707	1.0006	1.1075
	2	1.2320	1.9645	1.0087	1.4772
	3	1.5554	5.7725	1.0402	2.0315
6	1	1.0232	1.0716	1.0013	1.0466
	2	1.0965	1.3289	1.0020	1.1970
	3	1.2320	1.9565	1.0096	1.4758
8	1	1.0130	1.0395	1.0000	1.0260
	2	1.0530	1.1702	1.0007	1.1074
	3	1.1240	1.4362	1.0036	1.2532
10	1	1.0083	1.0251	1.0000	1.0166
	2	1.0336	1.1049	1.0004	1.0676
	3	1.0774	1.2554	1.0017	1.1570

판단할 수 있다.

Tables 1, 2, 3에서 정해에 수렴하는 경향과 두께의 변화에 민감하지 않은 정도는 LCCS(CO), CCCS(CO), LCCS(IN), CCCS(IN)의 순이며, 수치해의 수렴성은 강성행렬뿐만 아니라 질량행렬의 성질에도 밀접한 관련이 있음을 확인할 수 있다. 즉, 변형률장에 적합한 질량행렬을 사용한 경우에 비해 변형률장에 적합하지 않는 질량행렬을 사용한 경우에 계산오차는 두께의 변화에 훨씬 민감하며 두께가 얇을수록 관성을 실제 값보다 작게 평가하는 정도가 커져서 수렴속도가 느려짐을 알 수 있다.

고유모드를 표현하기에 부족한 요소 분할상태에서 고유치의 두께에 대한 민감도를 알아보기 위하여 LCCO(IN) 요소 2개를 사용하여 제2와 제3의 고유치를 계산한 결과가 Fig. 2에 나타나 있다.

Tables 1, 2, 3의 LCCO(CO)에 의한 해석결과를 고려하면 Fig. 2에서 오차의 대부분은 질량행렬에서 비롯된 것임을 알 수 있고, 충분하지 못한 요소 분할 상태에서는 관성이 과소 평가되는 정도가 두께 변화에 몹시 민감함을 알 수 있다.

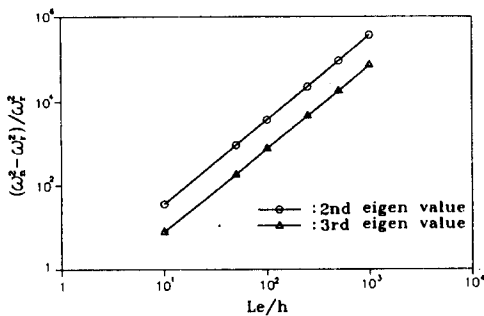
Fig. 3에는 양단이 단순지지된 아치가 나타나 있다. Figs. 4, 5, 6은  $R/h=100$ 이고,  $\delta_0=\pi/2$ 인 경우에 제1, 제2, 제3 고유치에 대한 수치해석 결과가 요소의 증가에 따라 기준해<sup>(16)</sup>에 수렴되는 경향을 보여준다. Figs. 7, 8, 9에는  $R/h=5$ 이고,  $\delta_0=\pi/2$ 인 두꺼운 보의 경우에 고유치 해석결과를 나타내었다. 이 경우의 기준해로는 Prathap과 Babu에 의해 제안된 3절점 CMCS요소<sup>(9)</sup> 30개로 모델링하여 계산된 결과를 사용하였다. 본 논문에서 제시된 요소의 신뢰성을 확인하기 위해 비교된 2절점 CMCS요소<sup>(8)</sup>는 Prathap과 Babu에 의해 깊은 보

**Table 3** Convergence of the normalized eigenvalues in a simply supported straight beam ( $L_e/h=5$ )

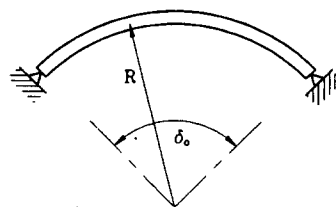
No. of elements	Mode number	Normalized eigenvalues			
		CCCS(CO)	CCCS(IN)	LCCS(CO)	LCCS(IN)
2	1	1.2324	1.8413	1.0246	1.4536
	2	1.6373	13.917	1.6373	9.2832
	3	6.0920	6.9445	2.3768	2.9290
3	1	1.0965	1.2984	1.0094	1.1880
	2	1.4536	2.4413	1.1071	1.7355
	3	1.9796	7.6371	1.9796	4.0402
4	1	1.0530	1.1560	1.0050	1.1025
	2	1.2321	1.6494	1.0577	1.4063
	3	1.6012	2.4101	1.2016	1.7790
6	1	1.0232	1.0659	1.0021	1.0445
	2	1.0964	1.2451	1.0247	1.1697
	3	1.2306	1.5179	1.0891	1.3634
8	1	1.0130	1.0364	1.0012	1.0248
	2	1.0530	1.1303	1.0137	1.0929
	3	1.1233	1.2653	1.0494	1.1966
10	1	1.0083	1.0231	1.0007	1.0158
	2	1.0335	1.0813	1.0087	1.0587
	3	1.0771	1.1623	1.0314	1.1229

이론과 field consistency 방법에 의해 정식화되었으며 강성과잉현상이 제거되어 있음이 알려져 있다. CMCS요소는 강성행렬의 성질은 우수하지만 변형률장의 성질에 일치하지 않는 변위장을 사용하

는 요소이다. 그림에서 각 요소의 수렴성에 대한 성능은 직선보의 경우와 같이 LCCS(CO), CCCS(CO), LCCS(IN), CCCS(IN), CMCS의 순이다. 즉, 선형의 곡률장을 갖는 요소가 상수의 곡률장을 갖는 요소에 비해, 또 변형률에 적합한 고차의 변위장을 갖는 요소가 변형률에 적합하지 않은 저차의 변위장을 가지는 요소에 비해 수렴성이 높음을



**Fig. 2** Variation of errors with the ratio  $L_e/h$  by 2 LCCO(IN) element idealization in a simply supported straight beam



**Fig. 3** A pinned-pinned arch

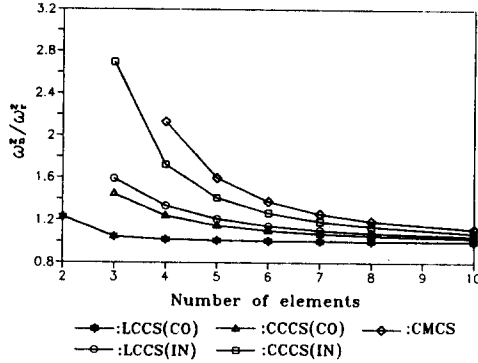


Fig. 4 Convergence for the 1st eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=100$ )

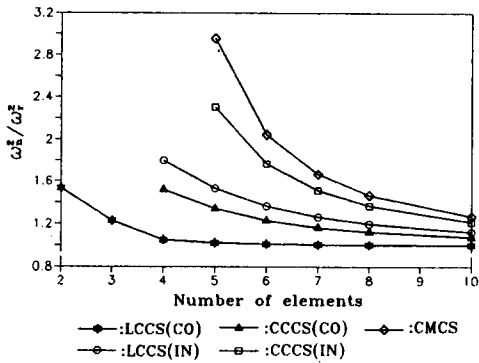


Fig. 5 Convergence for the 2nd eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=100$ )

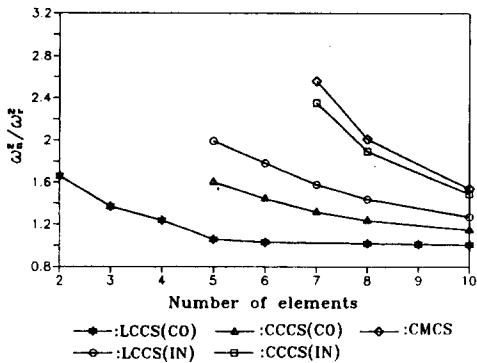


Fig. 6 Convergence for the 3rd eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=100$ )

알 수 있다. 질량행렬의 특성에 따른 수렴성의 차이는 아치의 두께가 얇을수록, 또 고차의 모드일수록 뚜렷하게 관찰된다.

Figs. 10, 11, 12에는 보의 길이  $L_g=15.708$ 로 일정하게 하고  $\delta_0$ 의 값을  $0^\circ$ 에서  $110^\circ$ 까지 변화시키

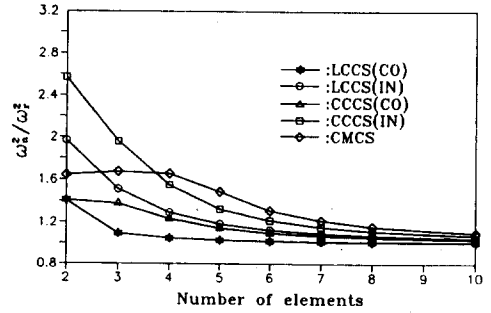


Fig. 7 Convergence for the 1st eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=5$ )

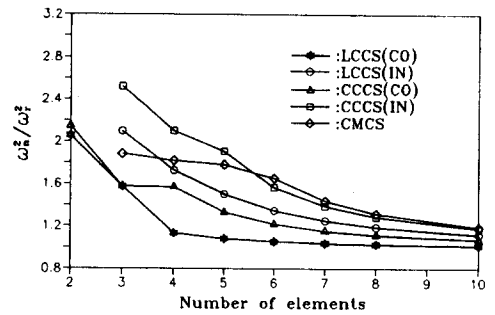


Fig. 8 Convergence for the 2nd eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=5$ )

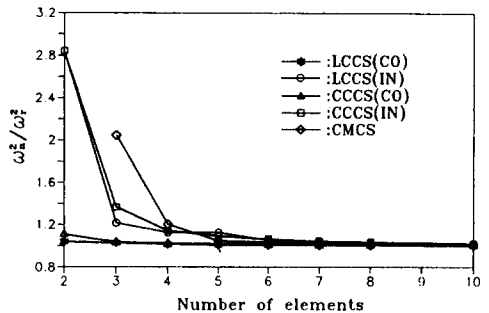


Fig. 9 Convergence for the 3rd eigenvalues in the pinned-pinned arch ( $\delta_0 = \pi/2$ ,  $R/h=5$ )

면서 8개의 요소로 모델링하여 계산한 제3 고유치까지의 정확도를 나타내었다.  $w_3^2$ 은 3절점 CMCS 요소<sup>(9)</sup> 30개를 사용하여 계산하였다. LCCS(CO)를 제외하면 보 형상의 변화에 대해 제1 고유치의 경우  $\delta_0=10^\circ$ 까지, 제2 고유치의 경우에는  $\delta_0=20^\circ$ 까지, 제3 고유치는  $\delta_0=30^\circ$ 까지 계산값이 민감한 변화를 보이고, 그 이후는 작은 변화를 보임이 관찰된다. LCCS(CO)의 경우 형상의 변화에 대한 민감도가 거의 없다. Figs. 10, 11, 12에서 해석오차의

형상변화에 대한 민감도는 요소의 변형률장뿐만 아니라 변위장의 보간함수와 밀접한 관련이 있으며 고차의 모드일수록 민감함을 알 수 있다.

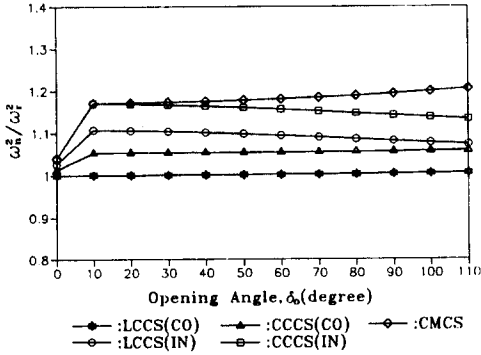


Fig. 10 Influence of curvature on the 1st eigenvalues by 8 element idealization of the pinned-pinned arch ( $L_g=5\pi$ ,  $h=0.1$ )

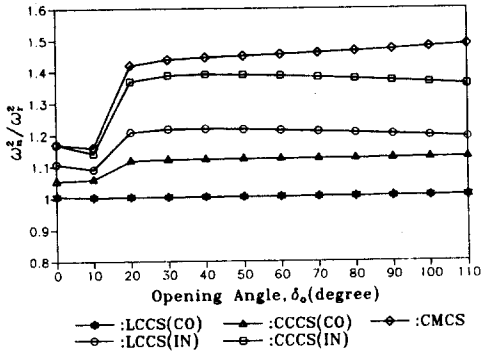


Fig. 11 Influence of curvature on the 2nd eigenvalues by 8 element idealization of the pinned-pinned arch ( $L_g=5\pi$ ,  $h=0.1$ )

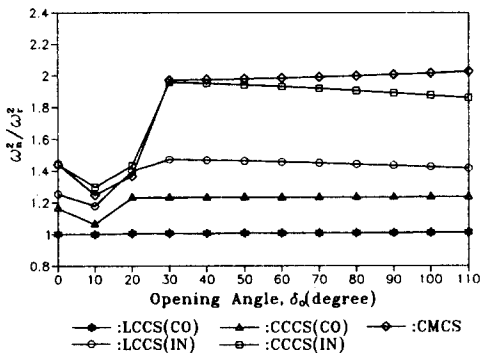


Fig. 12 Influence of curvature on the 3rd eigenvalues by 8 element idealization of the pinned-pinned arch ( $L_g=5\pi$ ,  $h=0.1$ )

## 5. 결 론

본 논문에서는 절점이 2개인 얇은 곡선 보요소를 변형률 보간에 기초하여 수식화하고 고유치 해석을 수행하였다. 양단이 단순지지된 직선보와 아치에 대한 수치해석결과를 검토하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 변형률장에 적합한 고차의 변위장을 사용한 요소가 선형의 변위장을 사용한 요소에 비해 빨리 수렴하며 그 정도는 고차모드의 고유치 계산에서 더욱 두드러진다.

(2) 강성행렬의 성질에서 비롯되는 오차뿐만 아니라 질량행렬의 성질에서 비롯되는 오차도 보의 두께의 변화와 관련이 있으며, 변형률장에 적합한 고차의 변위장을 사용할 경우 보의 길이에 대한 두께 비의 변화에 따른 계산 오차를 줄일 수 있다.

(3) 보의 형상이 고유치 계산 오차에 미치는 영향은 고차모드일수록 커지며 변형률장에 적합한 고차의 변위장을 사용할 경우 형상의 변화에 의한 계산 오차를 줄일 수 있다.

(4) 2절점 CMCS요소와 비교한 결과, 변형률 보간에 기초하여 개발된 요소는 변형률장에서 강성과 잉이 제거되고 적합한 질량행렬을 계산할 수 있어 고유치 해석에 효율적이다.

(5) 선형의 곡률장을 사용한 LCCS요소는 보의 두께와 곡률에 관계없이 매우 정확한 결과를 얻을 수 있다.

## 후 기

본 연구는 터보동력기계연구센터의 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 심심한 감사를 표한다.

## 참고문헌

- (1) Ashwell, D. G., Sabir, A. B. and Roberts, T. M., 1971, "Further Studies in the Application of Curved Finite Elements Applied to Arches," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, pp. 507~517.
- (2) Ashwell, D. G. and Sabir, A. B., 1974. "On the Finite Element Calculation of Stress Distributions in Arches," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16, pp.



- 21~29.
- (3) Dawe, D. J., 1974, "Curved Finite Elements For the Analysis of Shallow and Deep Arches," *Comp. Struct.*, Vol. 4, pp. 559~580.
- (4) Choi, J. K. and Lim, J. K., 1993, "Simple Curved Shear Beam Elements," *Comm. in Numer. Meth. in Engrg.*, Vol. 9, pp. 659~669.
- (5) Sabir, A. B. and Ashwell, D. G., 1971, "A Comparison of Curved Beam Finite Elements When Used in Vibration Problems," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 18, pp. 553~563.
- (6) Sabir, A. B., Djoudi, M. S., and Sfindji, A., 1993, "Effect of Shear Deformation on the Natural Frequencies of Arches by the Finite Element Method," PD-Vol. 52, Proc. of ASME, pp. 143~152.
- (7) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved  $C^0$  Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 41, pp. 279~296.
- (8) Babu, C. R. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (9) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (10) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회 논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323.
- (11) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (12) Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., 1987, "On the Hybrid-mixed Formulation of  $C^0$  Curved Beam Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 60, pp. 95~121.
- (13) 양승용, 이재관, 김식연, 신호철, 1993, "곡률 보요소에 의한 Timoshenko보의 고유치 문제 해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제11호, pp. 2694~2703.
- (14) 양승용, 신호철, 1993, "곡률 곡선보요소에 의한 곡선보의 고유치문제 해석," 대한기계학회 논문집, 제17권, 제12호, pp. 3020~3027.
- (15) Rao, Singiresu S., 1995, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley.
- (16) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold.