

〈논 문〉

끝단질량을 갖고 아접선력을 받는 외팔 수직기둥의 동적 안정성

박영필* · 류봉조** · 이규섭*** · 김인성***

(1996년 6월 7일 접수)

Dynamic Stability of a Cantilevered Vertical Column Subjected to a Subtangential Force and Having a Tip Mass

Young-Pil Park, Bong-Jo Ryu, Gyu-Seop Lee and In-Sung Kim

Key Words : Subtangential Force(아접선력), Nonconservativeness(비보존도), Finite Element Method(유한요소법), Dynamic Stability(동적 안정성)

Abstract

The dynamic behavior of elastic columns under the action of the subtangential force is studied in this paper. The subtangential force is the combination of the tip mass dead load and pure follower thrust. In this study, the tip mass is assumed to be a rigid body rather than a point mass. The equations of motion are derived based on the extended Hamilton's principle and the finite element method. Then the equations of motion are transformed into a dimensionless form, and several parameters are identified. It is found that the critical subtangential force can be changed subtangentially by considering the parameters related to tip mass. It is also shown that the nonconservativeness of the applied force has a significant effect on the type of instability. The influence of the self-weight of the column on the variation of the critical force is also investigated.

1. 서 론

집중 혹은 분포 종동력(concentrated or distributed follower force)을 받는 보의 동적 안정성 해석은 비보존계(nonconservative system)의 안정성 문제로 이미 잘 알려진 사실이다. 비보존계란 넓은 의미에 있어서는 가해지는 외력이 보존력이더라도 감쇠기(damper) 등의 설치로 에너지 손실이 있는 경우까지도 포함시키지만, 외력의 관점에서만 볼 때, 비보존력의 일종인 종동력이란 그 외력에 의한 가

상일(virtual work)이 포텐셜함수에 의해 표현될 수 없는 비보존적 힘으로, 이러한 종동력을 받는 계의 동적 안정성에 관한 대표적인 예가 Beck⁽¹⁾의 기둥(Beck's column)문제나 Pflüger⁽²⁾의 기둥(Pflüger's column)의 안정성 문제들이다. 이러한 종동력들에 의한 비보존 동적 안정성 문제의 이론적 배경은 Bolotin⁽³⁾과 Leipholz⁽⁴⁾의 저서에 상세히 기술되어 있다.

비보존적 문제의 또 다른 관심부분은 아접선력(subtangential force)을 받는 기둥의 안정성에 대한 문제로서, 위의 아접선력은 끝단질량의 자중(self-weight)인 수직력과 로켓추력에 해당되는 순수 접선력의 조합으로 실현될 수 있다. 실제로 로켓 등은 경계조건이 자유 자유보로 간주될 수 있지

*회원, 연세대학교 기계공학과

**회원, 대전산업대학교 기계설계공학과

***회원, 국방과학연구소

만 추후 실험과의 비교를 위하여 외팔 구조물을 사용하여도 로켓추력인 비보존력 성분은 물리적으로 는 동일한 조건이 될 수 있다.

아접선력을 받는 계의 동적 안정성 및 진동에 관한 초기 연구는 McGill⁽⁵⁾에 의하여 이루어졌는데, 그는 Galerkin방법을 사용하여, 균일하게 분포된 수직력과 종동력을 동시에 받는 외팔 기둥의 동적 거동에 대하여 연구하였다. 그 후, Sugiyama와 Kawagoe⁽⁶⁾는 균일분포 아접선력을 받는 탄성기둥의 진동과 안정성에 대한 연구를 하였고, Celep⁽⁷⁾은 수직력과 종동력을 동시에 받는 외팔기둥의 진동 및 안정성에 대한 연구를 하였다. 그는 특히, 비보존도의 다양한 변화에 따른 불안정 형태를 엄밀해법을 통하여 조사하였다. Sugiyama와 Mladenov⁽⁸⁾는 분포종동력과 보의 자중에 의해 삼각 분포 아접선력을 받는 보의 진동 및 안정성에 관한 연구를 하였는데, 이들은 유한차분법을 이용하여 비보존도와 다양한 경계조건의 변화에 따라 안정성지도(stability map)를 나타내었고, Rao와 Rao⁽⁹⁾는 집중 아접선력을 받는 외팔기둥의 안정성 해석에 있어, 정적 및 동적 안정 판별기준의 적용을 제시하였다.

최근 Lee⁽¹⁰⁾는 아접선력을 받는 탄성지지된 보의 동적 안정성을 지지 스프링의 크기와 위치변화, 비보존도의 변화에 따라 판별하였다. 그는 스프링상수의 변화에 따른 임계 아접선력 값을 구하였고, 스프링상수가 큰 경우는 rigid 지점으로 간주하여, 이 스프링위치가 계의 불안정 형태나 임계 아접선력 값에 미치는 영향을 조사하였다.

본 연구에서는 끝단질량을 갖는 외팔기둥이 추진력인 종동력과 끝단질량의 무게에 의해 가해지는 자중을 동시에 받는, 즉 아접선력을 받는 경우에 있어 기존의 끝단질량의 크기만을 고려한 문제들이나 기둥의 자중을 고려하지 않은 문제들과 달리, 기둥의 자중, 끝단질량의 크기와 회전관성, 끝단질량의 무게중심으로부터 기둥의 자유단까지의 거리, 비보존도의 변화에 따른 계의 동적 안정성을 유한요소법을 사용하여 연구하였다.

2. 이 론

2.1 문제의 기술

로켓추력에 의한 접선종동력과 로켓모터의 자중인 사하중(dead load)에 의한 아접선력을 받는 외

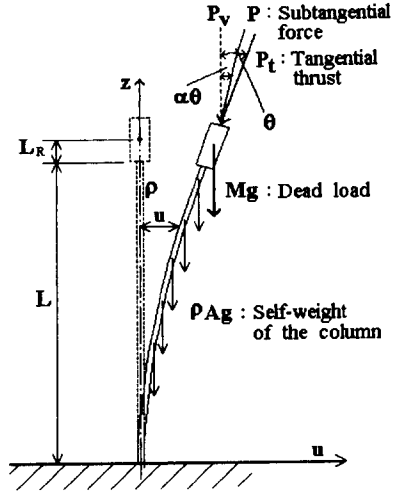


Fig. 1 Mathematical model of a cantilever under a subtangential force

팔 수직기둥의 수학적 모델은 Fig. 1에 나타난 바와 같다. 본 연구에서는 보의 세장비가 크다고 가정하여 보의 전단변형이나 회전관성의 효과는 무시하였다.

Fig. 1에서 A는 기둥의 단면적, rho는 밀도를 나타내며, L은 기둥의 전체길이, M은 끝단질량의 크기, J와 Lr은 각각 끝단질량의 회전관성과 끝단질량의 무게중심으로부터 외팔기둥의 자유단까지의 거리를 나타낸다.

또한, P는 아접선력으로서 추력 Pt와 끝단질량의 자중 Mg에 해당하는 수직력 Pv의 합력이며, alpha는 비보존도를 나타낸다. 한편, alpha*theta는 아접선각을 나타내는 것으로 예를들어 alpha=1인 경우는 순수한 접선종동력(tangential follower force)만이 주어지는 경우이고, alpha=0인 경우는 보존력인 축력만이 주어지는 경우가 된다.

Fig. 1 모델에 대한 전체 운동에너지 T는

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) dz + \frac{1}{2} M \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + L_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right) \right)^2 \Big|_{z=L} + \frac{1}{2} J \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right)^2 \Big|_{z=L} \quad (1)$$

로 표시되며, 탄성 포텐셜에너지 V는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (2)$$

아접선력 P에 의해 하여진 일은 두개의 부분으로 나뉘어질 수 있다. 첫째 아접선력의 축방향성분

에 의한 탄성 포텐셜에너지 V_a 와 둘째, 아접선력의 횡방향성분인 비보존력에 의한 가상 일 δW_N 으로 각각 다음과 같이 나타내진다.

$$V_a = -\frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3)$$

$$\delta W_N = -P_t \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta u \right\} \Big|_{z=L} \quad (4)$$

또한, 기둥의 자중에 의해 하여진 일 W_s 는

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A g (L-z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \quad (5)$$

로 나타내지며, 식 (1)~(5)에 있어 $\frac{\partial}{\partial t}$ 및 $\frac{\partial}{\partial z}$ 은 각각 시간 t 와 축방향위치 z 에 대한 편미분을 나타낸다.

식 (1)~(5)를 확장된 해밀톤 원리(extended Hamilton's principle)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V - V_a + W_s) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 유한요소법의 적용

식 (6)의 변분을 정리한 후 유한요소법을 적용시키기 위해 기둥을 요소길이 l 인 N 개의 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

Fig. 2에 나타난 유한요소 보모델로부터 계산상의 편의를 위해 다음과 같은 국부좌표와 무차원화된 좌표들

$$z' = z - (i-1)l, \quad z'_m = z_m - (N-1)l \quad (7)$$

$$\xi = \frac{z'}{l}, \quad \xi_m = \frac{z'_m}{l}, \quad \eta = \frac{t}{T} \quad (8)$$

을 이용하면 식 (6)은 다음과 같이 되며, 식 (7), (8)에서 하첨자 m 은 끝단질량에 관계되는 첨자로써 끝단질량이 이동되는 경우에는 하첨자 m 이 변수로 표현된다.

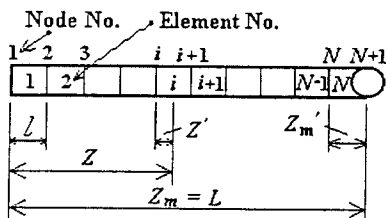


Fig. 2 Finite element model

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \frac{\lambda^2}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} - \frac{Q}{N^2} \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} - \frac{G^*}{N^2} \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{G^*}{N^3} (\xi + i - 1) \eta_\xi^{(i)} \delta \eta_\xi^{(i)} + \eta_{\xi\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi\xi}^{(i)} \right\} d\xi \\ & \quad + \frac{M^* \lambda^2 L_R^*}{N^2} \eta_\epsilon(1)^{(N)} \delta \eta_\epsilon(1)^{(N)} \\ & \quad + \frac{M^* \lambda^2 L_R^{*2}}{N} \eta_\epsilon(1)^{(N)} \delta \eta_\epsilon(1)^{(N)} \\ & \quad + \frac{M^* \lambda^2 L_R^*}{N^2} \eta(1)^{(N)} \delta \eta_\epsilon(1)^{(N)} \\ & \quad + \frac{M^* \lambda^2}{N^3} \eta(1)^{(N)} \delta \eta(1)^{(N)} \\ & \quad + \frac{J^* \lambda^2}{N} \eta_\epsilon(1)^{(N)} \delta \eta_\epsilon(1)^{(N)} \\ & \quad + \frac{\alpha Q}{N^2} \eta_\epsilon(1)^{(N)} \delta \eta(1)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 무차원 매개변수들은 식 (10)에 나타난 바와 같다.

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \omega, \quad M^* = \frac{M}{\rho A L}, \quad J^* = \frac{J}{\rho A L^3}, \\ G^* &= \frac{\rho A g L^3}{EI}, \quad L_R^* = \frac{L_R}{L}, \quad \alpha = \frac{P_t}{P_t + P_v}, \\ Q &= \frac{P L^2}{EI} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 λ 는 진동수 매개변수를 나타내고, M^* 와 J^* 는 각각 끝단질량과 기둥질량의 질량비 및 끝단질량의 회전관성 매개변수를 나타낸다. 또한, G^* 는 중력 매개변수, L_R^* 은 L_R 길이와 기둥의 길이 비, α 는 비보존도, Q 는 아접선력 매개변수를 나타낸다.

이제 식 (9)를 N 개의 요소에 대하여 조합하면, 최종적으로 다음과 같은 고유치 문제의 방정식으로 되며, 이 고유치 λ 의 변화에 따라 계의 안정성이 판별된다.

$$\{[K] - \lambda^2 [M]\} \{H\} = 0 \quad (11)$$

식 (11)에서 $\{H\}$ 는 일반화된 좌표벡터이다.

3. 수치해석 결과 및 검토

본 연구의 수치해석 결과를 얻기 위해, 기둥을 20개의 유한요소로 나누었으며, 고유치를 얻기 위해 EISPACK Package의 부 프로그램을 이용하였다. 불안정과 안정의 경계가 되는 임계하중값은 고유치값의 변화에 따라 구하였는데, 플러터 임계하중값의 경우는 처음 1, 2차 두 개의 고유치 허수부가

접근하여 만나는 점을 선택하였고, 발산형 임계값의 경우는 고유치 허수부가 영(zero)되는 점을 선택하였다. 수치해의 타당성 검토를 위해 본 연구의 결과를 동일조건하(끝단질량이 없는 경우)의 Ref.⁽⁹⁾와 비교한 결과 비보존도 α 가 $\alpha=0.5$ 인 경우 발산형 불안정을 나타내는 임계하중값은 0.87%, 플러터형 불안정을 나타내는 임계하중값은 0.003%의 오차로 근사한 일치를 보였다.

Fig. 3과 4에서는 끝단질량이 없는 경우, 비보존도 매개변수 α 의 변화에 따른 처음 1, 2차 고유진동수의 변화를 나타낸 그림으로, 비보존도 α 가 $\alpha \leq 0.5$ 에서는 초기불안정(primary instability) 형태가 발산형(divergence type)으로 일어나고, $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형태(flutter type) 불안정이 일어남을 알 수 있고, 비보존도 α 가 증가함에 따라 초기 불안정을 나타내는 임계하중값은 증가됨을 알 수 있다.

Fig. 4에서 처음 두 개의 1, 2차 고유치는 서로 접근하여 한점에서 만나게 됨으로 플러터 형태의 불안정이 일어남을 알 수 있다. 위의 비보존도 α 의 변화에 따른 작용하중의 형태를 나타낸 표는 Table 1과 같으며, 본 연구에서는 $0.0 \leq \alpha \leq 1.0$ 인 경우에 대하여 임계하중값과 고유치 변화를 구하였다.

Fig. 5는 끝단질량이 없는 경우, 비보존도 α 가 0.0부터 1.0까지 변화되는 동안, 기둥의 안정성지도(stability map)를 보여준다. α 가 어떤 특정값 α_1 보다 작거나 같은 경우에는 두 개의 발산형 불안정(즉, 먼저 1차 고유진동수에 의해 발산형 불안정이 유발되고 그후, 2차 고유진동수에 의해서도 발산형 불안정)이 나타난다.

또한, α 가 $\alpha_1 < \alpha \leq \alpha_2$ 에서는 발산형 불안정과 플러터형태의 불안정이 공존하며, $\alpha > \alpha_2$ 에서는 단지

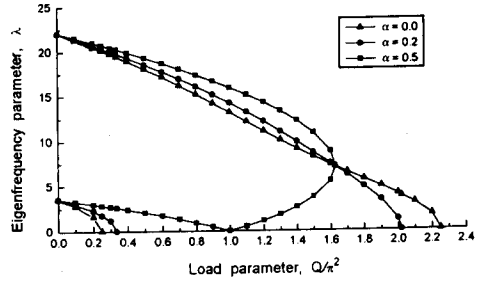


Fig. 3 Eigenfrequency curves for nonconservative-ness parameter $\alpha=0.0, 0.2$ and 0.5

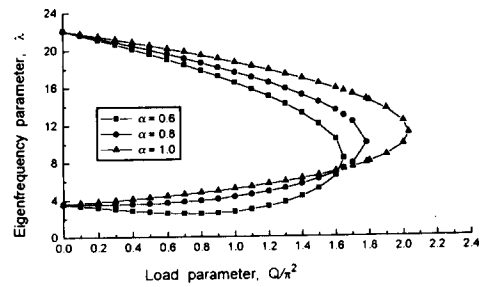


Fig. 4 Eigenfrequency curves for nonconservative-ness parameter $\alpha=0.6, 0.8$ and 1.0

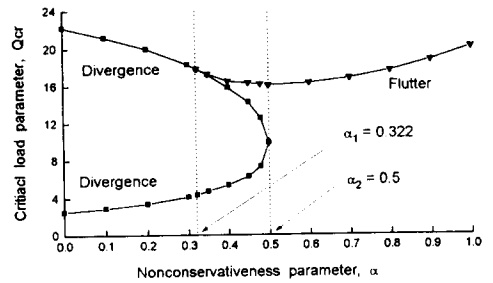


Fig. 5 Stability map of the column depending on the nonconservativeness parameter

Table 1 Types of the applied force depending on the nonconservativeness parameter

| Nonconservativeness parameter | P_v | P_t | Kinds of force |
|-------------------------------|---------------|---------------|-----------------|
| $\alpha=0$ | $P_v > P$ | $P_t < 0$ | Anti-tangential |
| $\alpha < 0$ | $P_v = P$ | $P_t = 0$ | Pure vertical |
| $0 < \alpha < 1$ | $0 < P_v < P$ | $0 < P_t < P$ | Subtangential |
| $\alpha=1$ | $P_v = 0$ | $P_t = P$ | Tangential |
| $\alpha > 1$ | $P_v < 0$ | $P_t > P$ | Supertangential |

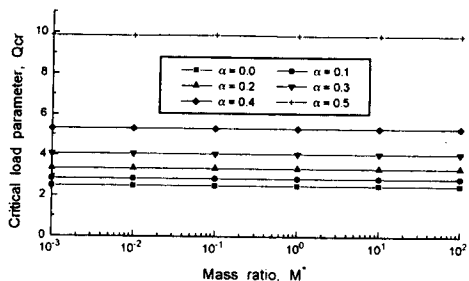


Fig. 6 Variation of critical load with mass ratios for $\alpha=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ and 0.5

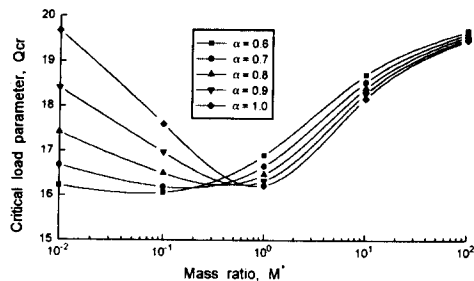


Fig. 7 Variation of critical load with mass ratios for $\alpha=0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ and 1.0

Table 2 Details of the column and the tip mass parameters

| Column | | Tip mass parameters | | | | | |
|---|--------|----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|--------|--------|
| Length L (mm) | 1,000 | Magnitude M^* | 0.01 | 0.1 | 1 | 10 | 100 |
| Width b (mm) | 30 | Rotary inertia J^* | 2.52×10^{-7} | 1.17×10^{-5} | 5.437×10^{-4} | 0.0252 | 1.17 |
| Thickness h (mm) | 7 | The length L_R^* | 0.0079 | 0.0171 | 0.0369 | 0.0794 | 0.1711 |
| Density ρ (kg/mm ³) | 2672.2 | | | | | | |
| Young's modulus E (kg/mm ²) | 6351.9 | | | | | | |

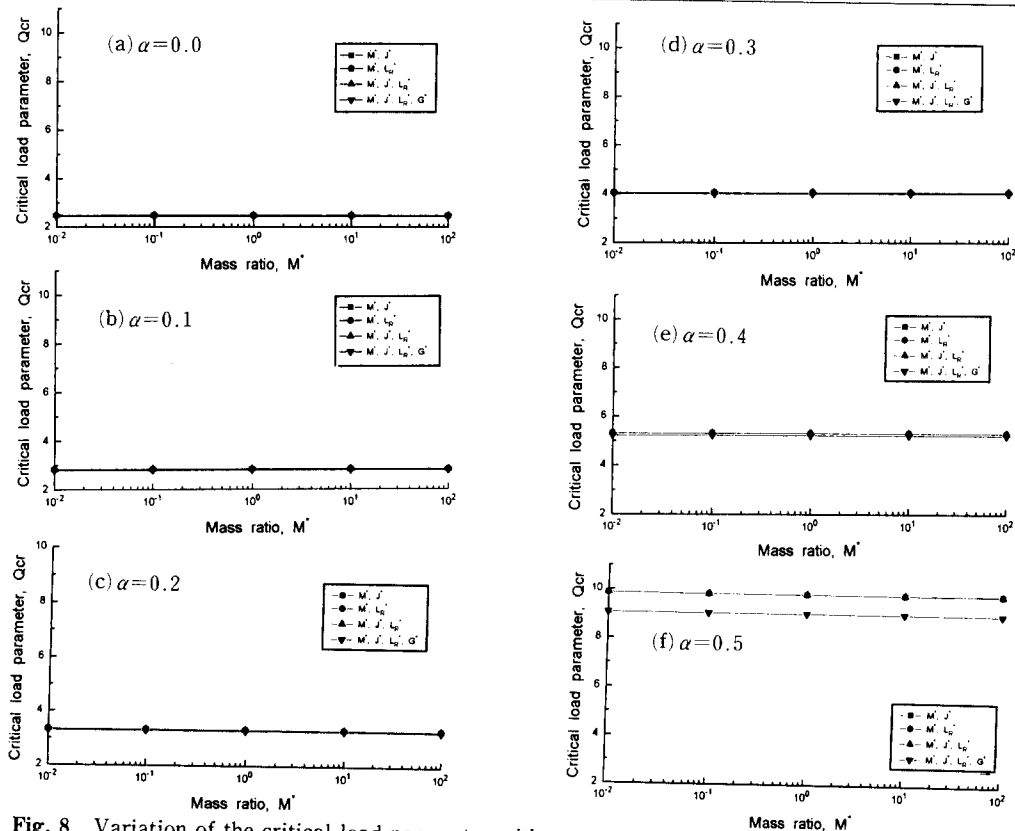


Fig. 8 Variation of the critical load parameter with nonconservativeness parameter under the consideration of M^*, J^*, L_R^* and G^*

플러터형태 불안정만이 존재한다. 본 연구에서는 $\alpha_1=0.322$, $\alpha_2=0.5$ 로 얻어졌다.

Fig. 6과 7에서는 끝단질량을 갖는 기둥의 임계 하중값을 나타내며, 단지 끝단질량의 크기만을 고려한 경우이다. Fig. 6에서 보여지는 것처럼, 비보존도 α 가 $\alpha \leq 0.5$ 에 대해 끝단질량의 크기변화가 임계하중값의 변화에 미치는 영향은 거의없고, 이때의 초기 불안정형태도 Fig. 2에서와 같이 발산형 불안정만이 존재한다. 그러나, Fig. 7에서는 α 가 $\alpha > 0.5$ 인 경우로서 끝단질량이 존재하더라도 불안정 형태는 플러터형태이며, 끝단질량비(tip mass ratio) M^* 가 $M^* \leq 0.1$ 에서는 비보존도 α 의 증가와 함께 임계 플러터 하중은 증가되고, $M^* \geq 1.0$ 에 대해서는 α 가 증가함에 따라 감소된다.

이제, 끝단질량의 크기뿐만 아니라 회전관성 J^* , 기둥의 자유단에서 끝단질량의 무게중심까지의 거리 L_R^* , 기둥의 자중 매개변수 G^* 가 임계하중에 미치는 영향을 고려하기 위하여 Table 2에 보여지는 기둥과 끝단질량의 제원을 수치 시뮬레이션의 입력 데이터로 사용하였다.

계산상의 편의를 위해 끝단질량은 구형태(spherical form)로 가정하였으며, Fig. 8과 9는 끝단질량에 관계된 매개변수들과 보의 자중 매개변수가 임계 하중값에 미치는 영향을 보여준다.

Fig. 8(a)~(f)는 비보존도 $\alpha=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 에 대하여, 끝단질량비 M^* 와 회전관성 매개변수 J^* 만을 고려한 경우, M^* 와 L_R^* 매개변수만을 고려한 경우, M^* , J^* , L_R^* 의 세 매개변수를 고려한 경우, M^* , J^* , L_R^* 및 G^* 를 모두 고려한 네가지 경우에 대하여 이들 네가지 경우의 각각이 임계하중값에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들에서 알 수 있는 것은 끝단질량의 크기에 관계없이, 또 M^* , J^* , L_R^* 의 조합에 관계없이 임계하중의 변화는 거의 없다는 것이다. 그러나, 기둥의 자중 매개변수 G^* 의 변화가 임계하중값의 변화에 미치는 영향은 경미하지만, $\alpha \leq 0.4$ 에 대해 1.5%이내, $\alpha=0.5$ 에 대해 9.1% 정도의 임계하중의 변화를 보였다. Fig. 9(a)~(e)는 Fig. 8(a)~(f)에서의 방법과 같은 것으로서, 끝단질량비 $M^* \leq 0.1$ 에 대해 J^* 와 L_R^* 의 변화는 임계하중값의 변화에 영향이 거의 없으나, $M^* \geq 1.0$ 에 대해서는 J^* 와 L_R^* 의 영향은 크다. 따라서, 끝단질량이 단순한 질점이 아닌 유한한 크기의 강체로 간주되는 경우, 기둥의 회전관성 매개변수 J^* 와 거리

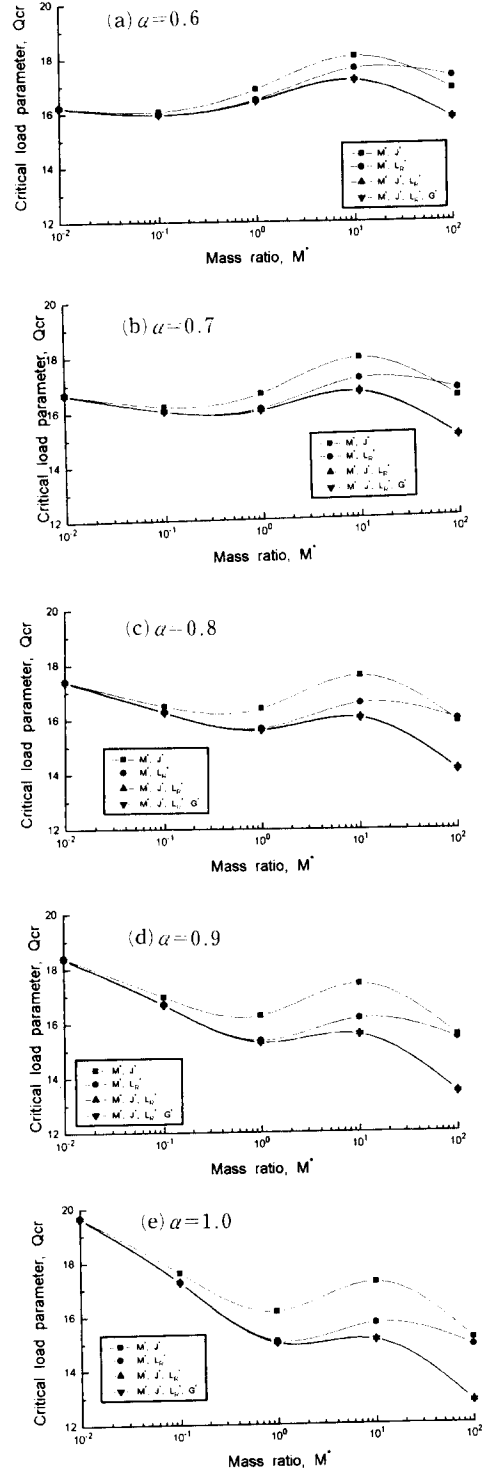


Fig. 9 Variation of the critical load parameter with nonconservativeness parameter under the consideration of M^* , J^* , L_R^* and G^*

L_0^* 의 고려는 매우 중요하다. 또한 기둥의 자중 매개변수 G^* 의 변화가 임계하중값의 변화에 미치는 영향은 $\alpha \leq 0.5$ 에서는 $\alpha = 0.5$ 인 경우만이 임계하중값의 약간의 차이를 보이나 $\alpha > 0.5$ 에서는 M^* , J^* , L_0^* 의 세 매개변수를 고려한 경우와 자중 매개변수 G^* 를 고려한 경우를 비교하면 임계하중값의 변화는 미미함을 알 수 있다.

4. 결 론

아접선력을 받고 끝단질량을 갖는 외팔기둥의 동적안정성에 대한 수치해석을 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 비보존도 매개변수 α 가 $\alpha \leq 0.5$ 에서는 기둥의 초기 불안정형태는 발산형이고, α 가 $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형태이다.
- (2) 끝단질량이 없는 경우, 비보존도 매개변수 $\alpha \leq 0.322$ 에서는 두개의 발산형 불안정이 존재하고, $0.322 < \alpha \leq 0.5$ 에서는 발산형과 플러터형 불안정이 공존하며, $\alpha > 0.5$ 에서는 플러터형 불안정만이 존재한다.
- (3) 끝단질량이 있는 경우, $\alpha \leq 0.5$ 에서는 M^* 와 J^* 그리고 L_0^* 의 변화가 임계하중값의 변화에 미치는 영향은 거의 없다. 그러나, $\alpha > 0.5$ 에 대해, 끝단질량의 크기가 크거나 무거운 경우에 있어서는 끝단질량의 회전관성 매개변수 J^* 와 거리 L_0^* 의 고려는 중요하다.
- (4) 기둥의 자중 매개변수 G^* 는 임계하중값의 변화에 미치는 영향이 본 연구의 모델에서는 작은 것으로 나타났다.

참고문헌

(1) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes," *ZAMP*, Vol. 3, pp. 225~228.

(2) Pflüger, A., 1955, "Zur Stabilität des Tangential Gedrückten Stabes," *ZAMM*, Vol. 35, pp. 191.

(3) Bolotin, V. V., 1963, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, London.

(4) Leipholz, H., 1980, *Stability of Elastic Systems*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.

(5) McGill, D. J., 1971, "Column Instability under Weight and Follower Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 97, pp. 629~635.

(6) Sugiyama, Y. and Kawagoe, H., 1975, "Vibration and Stability of Elastic Columns under the Combined Action of Uniformly Distributed Vertical and Tangential Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 38, pp. 314~355.

(7) Celep, Z., 1977, "On the Vibration and Stability of Beck's Column Subjected to Vertical and Follower Forces," *ZAMM*, Vol. 57, pp. 555~557.

(8) Sugiyama, Y. and Mladenov, K. A., 1983, "Vibration and Stability of Elastic Columns Subjected to Triangularly Distributed Subtangential Forces," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 88, No. 4, pp. 447~457.

(9) Rao, B. N. and Rao, G. V., 1987, "Stability of Cantilever Column under a Tip-concentrated Subtangential Follower Force, with the Value of Subtangential Parameter Close to or Equal to 1/2," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, pp. 181~184.

(10) Lee, H. P., 1995, "Dynamic Stability of a Rod with an Intermediate Spring Support Subject to Subtangential Follower Forces," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 125, pp. 141~150.