〈논 문〉

타원균열에 작용하는 일반적인 하중에서의 응력확대계수 계산

안 득 만*

(1996년 5월 20일 접수)

Determination of k_1 in Elliptic Crack under General loading Conditions

Deuk Man An

Key Words: Stress Intensity Factor(응력확대계수), Elliptic Crack(타원균열), Weight Function (가중함수), Poisson's Theorem(푸아송의 정리), Boussinesq-Papkovich Potential (Boussinesq-Papkovich 포텐셜)

Abstract

In this paper weight function theory is extended to the determination of the stress intensity factors for the mode I in elliptic crack. For the calculation of the fundamental fields Poisson's theorem and Ferrers's method were employed. Fundamental fields are constructed by single layer potentials with surface density of crack harmonic fundamental polynimials. Crack harmonic fundamental polynimials up to order four were given explicitly. As an example of the application of the weight function theory the stress intensity factors along crack tips in nearly penny-shaped elliptic crack are calculated.

I. 서 론

일반적으로 재료의 강도가 증가할수록 파괴인성치(fracture toughness)는 감소한다. 따라서 고강도 재료가 많이 사용되는 구조물은 취성파괴(brittle fracture)의 위험이 커지게 된다. 특히 저온, 방사능, 부식 등 혹독한 환경에서는 재료의 파괴인성치가 더욱 더 낮아지므로 취성파괴를 예방할 수 있는 파괴역학에 의한 설계가 필요하다. 파괴역학이론에 의한 설계에는 두 가지 정보가 요구된다. 첫째는 주어진 환경아래서 구조물을 구성하고 있는 재료의 파괴인성치이다. 주로 ASTM에서 추천한 규격에 따라서 시편을 가공하여 실험으로 구한다. 둘째는 외부하중에 의하여 구조물에 내재된 균열 끝에서의 응력확대계수(stress intensity factor)에 관한 정보이다. 본 연구는 후자에 관한 것이다. 응력확대계수를 구하는 방법에는 여러가지가 알려져 있다.[1] 그 중에서 Bueckner[2]의 가중함수이론(weight function theory)을 이용하면 주어진 균열형상에 작용하는 모든 하중에 대한 응력확대계수가 경계를 따라서 가중함수와 구조물에 작용하는 하중의 내적의 적분으로 주어진다. 이와 같은 장점으로 가중함수법은 1970년 이후 매우 활발이 연구되는 파괴역학의 분야가 되었다. 2차원 하중에서의 여러가지 균열형상과 3차원에서 원형균열에 대한 가중함수는 알려져 있다.[3, 4] 그러나, 타원형균열에 대한 가중함수는 아직 완전하게 구하여지지 않았다. 구조물에서 발견되는 균열의 모양은 대부분 타원형이므로 이에 대한 연구는 매우 중요하다. 본 논문에서는 타원균열에 작용하는 일반적인 하중에 의한 응력확대계수를 구하기 위한 가중함수를 구하고 이렇게 구해진 가중함수를 이용하여 무한 물체에 내재된 타원균열에 집중하중이 작용할 때의 균열 끝

*회원, 부산대학교 생산기계공학과, 기계기술연구소

을 따라 변하는 응력확대계수를 해석적으로 구하였다. 3차원 탄성문제는 Laplace 방정식을 만족하는 조화함수로 해석할 수 있다. 특히 가중함수를 구하기위한 조화함수는 균열면에서 Laplace 방정식을 만족하여야 한다. 균열의 형상이 타원이므로 Poisson의 타원체 Potential 이론을 이용하였다.[5~7]

2. 푸아송의 정리

Semi-axis가 a_1, a_2, a_3인 타원체에서 질량 ρ가 다음과 같은 함수로 주어질 때

$$\rho=\rho(m^2)$$
$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=m^2,\quad 0\le m\le 1 \tag{1}$$

타원체 포텐셜은 Poisson의 공식으로 주어진다.[5] 즉, 타원체 바깥점 P에서의 포텐셜은

$$\phi_0(P)=\pi a_1a_2a_3\int_\lambda^\infty[\psi(1)-\psi(m^2(u))]\frac{du}{\Delta} \tag{2}$$

와 같이 된다. 여기서,

$$\psi(m^2)=\int_1^{m^2}\rho(\xi^2)\,d\xi^2 \tag{3}$$

$$\Delta=\sqrt{(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)} \tag{4}$$

이고, λ는 기본 타원체(식 (1)에서 $m=1$일 때))와 촛점이 같은 점 P를 지나는 타원체(confocal ellipsoid)의 방정식으로 구해진다. 즉,

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3^2+\lambda}=1 \tag{5}$$

에서 구해진다. 만약 밀도가

$$\rho(m^2)=(m^2-1)^n=\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\right)^n \tag{6}$$

로 주어지면, 식 (2)로부터 점 $P(x_1,\ x_2,\ x_3)$에서의 포텐샬은

$$\phi_0(P)=-\frac{\pi a_1a_2a_3}{n+1}\int_\lambda^\infty\left(\frac{x_1^2}{a_1^2+u}+\frac{x_2^2}{a_2^2+u}+\frac{x_3^2}{a_3^2+u}-1\right)^{n+1}\frac{du}{\Delta} \tag{7}$$

와 같이 된다. 식 (6)과 (7)을 사용하면 밀도가 x_1, x_2, x_3에 대한 homogeneous polynomial로 주어질 때 포텐셜은 미분으로 구해진다.[6] 구체적으로

$$\rho=x_1 \tag{8}$$

일 때 점 P에서 포텐셜은

$$\begin{aligned}\phi_0(P)&=-\frac{a_1^2}{4}\pi a_1a_2a_3\int_\lambda^\infty\frac{d}{dx_1}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2+u}+\frac{x_2^2}{a_2^2+u}+\frac{x_3^2}{a_3^2+u}-1\right)^2\frac{du}{\Delta}\\&=-a_1^2x_1\pi a_1a_2a_3\int_\lambda^\infty\left(\frac{x_1^2}{a_1^2+u}+\frac{x_2^2}{a_2^2+u}+\frac{x_3^2}{a_3^2+u}-1\right)\frac{du}{\Delta(a_1^2+u)}\end{aligned} \tag{9}$$

이다. 타원균열에 대한 탄성문제에서는 elliptic lamina에 의한 포텐셜이 중요한 역할을 한다. 밀도가

$$\rho=\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)^{n-1/2}=U^{n-1/2} \tag{10}$$

일때 타원체의 바깥과 안에서의 포텐셜은 식 (7)로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\phi_0(P)&=\frac{2}{2n+1}\pi a_1a_2a_3\int_\lambda^\infty\frac{U}{\Delta}du\\ \phi_i(P)&=\frac{2}{2n+1}\pi a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{U}{\Delta}du\end{aligned} \tag{11}$$

타원체 바깥에서는 Laplace 식을 만족하는 조화함수(harmonic function)가 되고, 타원체 내부에서는 다음의 Poisson 식을 만족한다.

$$\nabla^2\phi_i=-4\pi\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)^{n-1/2} \tag{12}$$

밀도가 식 (10)으로 주어지는 타원체에서 단면적이 $\delta x_1\ \delta x_2$인 사각형 막대의 질량은 다음과 같다.

$$\delta m=2\delta x_1\delta x_2\int_0^{a_3\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}}}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)^{n-1/2}dx_3 \tag{13}$$

윗 식을 적분하면 Beta 함수로 나타낼 수 있다.[8] 즉,

$$\delta m=\delta x_1\delta x_2a_3\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^n\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} \tag{14}$$

와 같이 되므로 타원체를 두께가 $2a_3$로 일정한 얇은 elliptic lamina로 생각하면 표면밀도(surface density)가

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^n\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2n}\,\frac{2n-1}{2n-2}\cdots\frac{5}{4}\,\frac{3}{4}\,\pi\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^n \tag{15}$$

와 같이 된다. 따라서 표면밀도가

$$\sigma=\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^n \tag{16}$$

일 때 포텐셜은

$$\phi_0(P)=\frac{\pi a_1a_2}{2n+1}\,\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_\lambda^\infty E^{n+1/2}\frac{ds}{q(s)} \tag{17}$$

으로 된다. 여기서,

$$E=1-\frac{x_1^2}{a_1^2+s}-\frac{x_2^2}{a_2^2+s}$$

$$q(s)=\sqrt{(a_1^2+s)\,(a_2^2+s)\,s}$$

이다. 따라서 단위 표면밀도($n=0$)에 대한 포텐셜은

$$\phi_0(P)=2a_1a_2\int_\lambda^\infty E^{1/2}\frac{ds}{q(s)} \tag{18}$$

가 되고, 또한

$$\sigma=1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2} \tag{19}$$

이면,

$$\phi_0(P)=\frac{4a_1a_2}{3}\int_\lambda^\infty E^{3/2}\frac{ds}{q(s)} \tag{20}$$

가 되므로, 미분으로

$$\sigma=x_1 \tag{21}$$

일 때, 포텐셜은

$$\phi_0(P)=2a_1^3a_2x_1\int_\lambda^\infty \frac{E^{1/2}}{a_1^2+s}\,\frac{ds}{q(s)} \tag{22}$$

와 같이 구해진다. 식 (16)에서 n 대신 $n-1/2$을 대입하면 다음 관계식을 얻을 수 있다. 즉, 표면밀도가 다음과 같이 변하면

$$\sigma=\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{n-1/2} \tag{23}$$

포텐셜은

$$\phi_0(P)=\frac{\pi a_1a_2\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1/2)}\int_\lambda^\infty E^n\frac{ds}{q(s)} \tag{24}$$

으로 된다. 윗 식은 앞으로 구할 타원균열에 대한 가중 함수를 구하는 기초장에 응용된다.

3. 타원 조화함수

식 (24)에서 $\lambda=0$이면 elliptic lamina의 표면에서의 포텐셜이 된다. 식을 간단하게 표현하기 위하여

$$c_n=\frac{a_1a_2\pi\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{25}$$

라 두면, elliptic lamina에서의 포텐셜은

$$W_n(x)=c_n\int_0^\infty E_n\frac{ds}{q(s)} \tag{26}$$

으로 쓸 수 있다. 식 (26)은 x_1, x_2에 대한 $2n$차 다항식이다. 여기서, 타원조화함수란 타원 디스크의 외부에서 뿐만 아니라 타원 디스크표면에서 2차원 Laplace equation을 만족하는 포텐셜을 말한다. 타원 디스크를 등방성 무한 탄성체에 존재하는 타원균열로 생각하면 타원조화함수는 균열 조화함수(crack harmonic function)가 된다.[3] 식 (26)에서 $n=0$이면 포텐셜이 상수가 되므로 타원조화함수가 된다. 만약 $n=1$이면 W_n이 x_1, x_2에 대한 2차 함수가 된다. 따라서, W_n을 x_1, x_2에 대하여 미분하면 1차 함수가 되므로 타원조화함수가 된다. n이 3 이상일 때는 차수가 서로 다른 다항식들을 선형중첩해야 타원조화함수를 만들 수 있다. 앞으로의 계산을 간단하게 하기 위하여 식 (26)을 타원적분(elliptic integrals)으로 표현하자. 디스크상에서의 포텐셜 W_n에서 E^n을 이항정리를 사용하여 전개하면 다음과 같이 된다.

$$W_n(x)=c_n\int_0^\infty\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{x_1^2}{a_1^2+s}+\frac{x_2^2}{a_2^2+s}\right)^k\frac{ds}{q(s)} \tag{27}$$

여기서, 다음과 같은 함수 $P_{2k}(x)$를 정의 하면

$$P_{2k}(x)=\int_0^\infty\left(\frac{x_1^2}{a_1^2+s}+\frac{x_2^2}{a_2^2+s}\right)^k\frac{ds}{q(s)}$$
$$=\int_0^\infty\left(p_1\frac{x_1^2}{a_1^2}+p_2\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^k\frac{ds}{q(s)} \tag{28}$$

와 같이 되므로 W_n은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_n(x)=c_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k}P_{2k}(x)$$

$$=c_n\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P_{2n-2j}(x) \qquad (29)$$

식 (28)에서 p_1, p_2는

$$p_1=\frac{a_1^2}{a_1^2+s},\quad p_2=\frac{a_2^2}{a_2^2+s} \qquad (30)$$

이다. 이항정리를 사용하면 $P_{2k}(x)$는

$$P_{2k}(x)=\int_0^\infty\sum_{m=0}^{n}\binom{k}{m}\left(p_1\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)^m\left(p_2\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{k-m}\frac{ds}{q(s)}$$
$$=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{2m}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2k-2m}\cdot\int_0^\infty p_1^m p_2^{k-m}\frac{ds}{q(s)} \qquad (31)$$

로 쓸 수 있다. 수치적으로 포텐셜의 값을 구하기 위해

$$L(i,j)=(a_1a_2)^{-1/2}\int_0^\infty s^{-1/2}p_1^{i+1/2}p_2^{j+1/2}ds$$
$$=(a_1a_2)^{1/2}\int_0^\infty p_1^i p_2^j\frac{ds}{q(s)} \qquad (32)$$

를 정의하면 식 (31)의 적분은

$$\int_0^\infty p_1^m p_2^{k-m}\frac{ds}{q(s)}=\frac{1}{(a_1a_2)^{1/2}}L(m,\ k-m) \qquad (33)$$

가 되므로 $P_{2k}(x)$는

$$P_{2k}(x)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{2m}\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2k-2m}$$
$$\cdot\frac{1}{(a_1a_2)^{1/2}}L(m,\ k-m)$$
$$=\sum_{k=0}^{k}b_{2m}^{(k)}x_1^{2m}x_2^{2k-2m} \qquad (34)$$

여기서,

$$b_{2m}^{(k)}=\frac{L(m,k-m)}{(a_1a_2)^{1/2}}\binom{k}{m}\left(\frac{1}{a_1}\right)^{2m}\left(\frac{1}{a_2}\right)^{2k-2m} \qquad (35)$$

이다. $L(i,\ j)$의 정의로부터

$$L(i,j)=(a_1a_2)^{1/2}\int_0^\infty\frac{a_1^{2i}a_2^{2j}ds}{(a_1^2+s)^i(a_2^2+s)^j q(s)} \qquad (36)$$

가 되고, $L(i+1,j)$, $L(i,j+1)$는

$$L(i+1,j)=(a_1a_2)^{1/2}\int_0^\infty\frac{a_1^{2i+2}a_2^{2j}ds}{(a_1^2+s)^{i+1}(a_2^2+s)^j q(s)}$$
$$L(i,j+1)=(a_1a_2)^{1/2}\int_0^\infty\frac{a_1^{2i}a_2^{2j+2}ds}{(a_1^2+s)^i(a_2^2+s)^{j+1}q(s)} \qquad (37)$$

와 같이 되어 다음과 같은 점화식을 얻게 된다.

$$a_2^2L(i+1,j)-a_1^2L(i,j+1)$$
$$=(a_2^2-a_1^2)L(i+1,j+1) \qquad (38)$$

타원에서 장축과 단축의 비를 $\varepsilon=\frac{a_2}{a_1}$라 두면 윗식은

$$(1-\varepsilon^2)L(i,j)=L(i-1,j)-\varepsilon^2L(i,j-1) \qquad (39)$$

로 된다. $L(i,j)$는 Hypergeometric 함수로 나타낼 수 있다.[8] 즉,

$$L(i,j)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i+j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(i+j+1)}$$
$$\cdot\varepsilon^{1/2}F\left(i+\frac{1}{2},\frac{1}{2},i+j+1\ ;1-\varepsilon^2\right) \qquad (40)$$

와 같이 되어 Hypergeometric 함수의 성질로 부터 다음 관계식을 얻게 된다.

$$(2i+1)L(i+1,j)-(2i+2j+1)L(i,j)$$
$$+(2j+1)L(i,j+1)=0 \qquad (41)$$

$L(1,\ 0)$ 와 $L(0,\ 1)$을 구하면, 식 (39), (41)으로부터 $L(i,\ j)$는 구해진다. 즉,

$$L(0,0)=L(1,0)+L(0,1) \qquad (42)$$

가 되므로 다음과 같은 간단한 FORTRAN program으로 모든 $L(i,j)$를 구할 수 있다.

```
   DO 50 K=2, NN
   DO I=1, K-1
      J=K-1
   L(I, J)=(L(I-1, J)-EP * L(I, J-1))/
           (1-EP)
   L(K, 0)=L(K-1, 0)-L(K-1, 1)/(2*K-1)
   L(0, K)=L(0, K-1)-L(1, K-1)/(2*K-1)
50 CONTINUE
```

여기서, EP는 장축과 단축의 비 ε의 제곱을 나타낸다. 그리고 $L(1,0)$ 및 $L(0,1)$은 타원적분으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$L(1,0)=(a_1a_2)^{-1/2}\int_0^\infty s^{-1/2}p_1^{3/2}p_2^{1/2}ds$$

$$=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2}\left\{F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$L(0,1)=\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2}\left\{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-\varepsilon^2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (43)$$

여기서,

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{2}{\pi}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$k=\sqrt{1-\varepsilon^2} \quad (44)$$

이다. 포텐셜 $W_n(x)$를 x_1, x_2에 대하여 미분을 하여도 조화함수(harmonic potential)가 되므로 이를 이용하여 균열조화함수를 구한다. 이를 위하여 다음과 같은 미분연산자와 이 연산자의 선형중첩을 다음과 같이 정의하자.

$$\partial(\alpha,\beta)=\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\beta}}$$

$$(u,\ \partial^u)=\sum_{\alpha=0}^{\mu}u_\alpha\partial(\alpha,\mu-\alpha) \quad (45)$$

위의 연산자는 homogeneous differential operator 이고

$$u=(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_\mu) \quad (46)$$

로서 차원 $\mu+1$에서의 벡터로 볼 수 있다. 여기서

$$p_{n\alpha}(x)=\partial(\alpha,n-\alpha)P_{2n}(x)$$
$$\alpha=0,1,2,\cdots,n \quad (47)$$

라 두면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
p_{00}&=b_0^{(0)}\\
p_{10}&=2b_0^{(1)}x_2\\
p_{11}&=2b_2^{(1)}x_1\\
p_{20}&=2b_2^{(2)}x_1^2+12b_0^{(2)}x_2^2\\
p_{21}&=4b_2^{(2)}x_1x_2\\
p_{22}&=12b_4^{(2)}x_1^2+2b_2^{(2)}x_2^2\\
p_{30}&=24b_2^{(3)}x_1^2x_2+120b_0^{(3)}x_2^3\\
p_{31}&=8b_4^{(3)}x_1^3+24b_2^{(3)}x_1x_2^2\\
p_{32}&=24b_4^{(3)}x_1^2x_2+8b_2^{(3)}x_2^3\\
p_{33}&=120b_6^{(3)}x_1^3+24b_4^{(3)}x_1x_2^2
\end{aligned} \quad (48)$$

일반적인 경우에는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_{n\alpha}(x)=\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{n-\alpha}}P_{2n}(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}b_{2m}^{(n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{n-\alpha}}x_1^{2m}x_2^{2n-2m}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}b_{2m}^{(n)}2m(2m-1)\cdots(2m-\alpha+1)$$
$$\cdot(2n-2m)x(2n-2m-1)\cdots(2n-2m$$
$$-n+\alpha+1)x_1^{2m-\alpha}x_2^{2n-2m-n+\alpha} \quad (49)$$

윗식에서 $\mu=2m-\alpha$라 두면

$$p_{n\alpha}(x)=\sum_{\mu}b_{\alpha+\mu}^{(n)}\frac{(\alpha+\mu)!(2n-\alpha-\mu)!}{\mu!(n-\mu)!}x_1^{\mu}x_2^{n-\mu}$$

$$0\le\mu\le n,\ \ \alpha+\mu=2m,\ \ \alpha=0,1,2,\cdots,n \quad (50)$$

와 같이 되어 α가 짝수이면 x_1 또한 짝수가 되고 α가 홀수이면 x_1은 홀수가 된다. 따라서, 다항식 $p_{n\alpha}(x)$가 $\alpha=0$, 1, 2, …, n를 취했을 때 서로 독립이라면 계수가 1인 다음과 같은 monome은 $p_{n\alpha}(x)$를 사용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$x_1^{\mu}x_2^{n-\mu}=\sum_{\beta=0}^{n}u_{\mu\beta}p_{n\beta}(x)$$

$$u_{\mu\beta}=0\ \text{if}\ \mu+\beta=\text{odd} \quad (51)$$

윗 식을 matrix를 사용하여 표현하면 다음과 같이 된다.

$$x_1^{\mu}x_2^{n-\mu}=(u_{\mu0}\ \ u_{\mu1}\ \cdots\ u_{\mu n})\begin{vmatrix}p_{n0}\\p_{n1}\\\vdots\\p_{nn}\end{vmatrix} \quad (52)$$

여기서, $\mu+\beta=$odd이면 $u_{\mu\beta}=0$이므로 행렬 $u_{\mu\beta}$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{vmatrix}u_{00}&0&u_{22}&0&u_{04}&0&\cdots\\0&u_{11}&0&u_{13}&0&u_{15}&\cdots\\u_{20}&0&u_{22}&0&u_{24}&0&\cdots\\\vdots&&&&&&\\\vdots&&&&&&\end{vmatrix} \quad (53)$$

식 (51)을 (50) 식에 대입하면

$$p_{n\alpha}(x)=\sum_{\mu,\beta}b_{\alpha+\mu}^{(n)}\frac{(\alpha+\mu)!(2n-\alpha-u)!}{\mu!(n-\mu)!}u_{\mu\beta}p_{n\beta}(x) \quad (54)$$

와 같이 되어 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{\mu}\tilde{b}_{\alpha+\mu}^{(n)}\cdot\tilde{u}_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta}\text{(Kronecker's symbol)}$$

$$\tilde{b}_{\alpha+\mu}^{(n)}=b_{\alpha+\mu}^{(n)}(\alpha+\mu)!(2n-\alpha-u)!$$

$$\tilde{u}_{\mu\beta}=\frac{u_{\mu\beta}}{\mu!(n-\mu)!} \quad (55)$$

윗 식에서 행렬 $\tilde{u}_{\mu\beta}$는 $\tilde{b}_{\alpha+\mu}^{(n)}$의 역행렬로 주어진다. 예를 들어 $n=3$이면 행렬 $\tilde{b}_{\alpha+\mu}^{(n)}$가 대칭행렬이

므로 다음과 같은 행렬식에서 $u_{\mu\beta}$를 구할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} \frac{u_{00}}{6} & 0 & \frac{u_{02}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{u_{11}}{2} & 0 & \frac{u_{13}}{2} \\ \frac{u_{20}}{2} & 0 & \frac{u_{22}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{u_{31}}{6} & 0 & \frac{u_{33}}{6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 720b_0^{(3)} & 0 & 48b_2^{(3)} & 0 \\ 0 & 48b_2^{(3)} & 0 & 48b_4^{(3)} \\ 48b_2^{(3)} & 0 & 48b_4^{(3)} & 0 \\ 0 & 48b_4^{(3)} & 0 & 720b_6^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{vmatrix} \tag{56}$$

윗 식으로부터

$$u_{00}=\frac{b_4}{8}\cdot\frac{1}{15b_0b_4-b_2^2},\quad u_{02}=-\frac{b_2}{8}\cdot\frac{1}{15b_0b_4-b_2^2}$$
$$u_{11}=\frac{5b_6}{8}\cdot\frac{1}{15b_2b_6-b_4^2},\quad u_{13}=-\frac{b_4}{24}\cdot\frac{1}{15b_2b_6-b_4^2}$$
$$u_{20}=-\frac{b_2}{24}\cdot\frac{1}{15b_0b_4-b_2^2},\quad u_{22}=\frac{5b_2}{8}\cdot\frac{1}{15b_0b_4-b_2^2}$$
$$u_{31}=-\frac{b_4}{8}\cdot\frac{1}{15b_2b_6-b_4^2},\quad u_{33}=\frac{b_2}{8}\cdot\frac{1}{15b_2b_6-b_4^2}$$

가 된다. 여기서, b의 위첨자 (3)는 기록을 간단하게 하기위하여 생략하였다. n 차수의 homogeneous 다항식

$$p(x)=\sum_{\gamma=0}^{n} v_\gamma x_1^\gamma x_2^{n-\gamma} \tag{58}$$

은 식 (51)으로부터 $p_{n\alpha}(x)$의 선형중첩으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$p(a)=\sum_{\alpha} w_\alpha p_{n\alpha}(x),\ \text{with}\ w_\alpha=\sum_{\gamma=0}^{n} v_\gamma u_{\gamma\alpha} \tag{59}$$

윗 식은 또한 식 (47)로부터

$$p(x)=\sum_{\alpha} w_\alpha \partial(\alpha, n-\alpha) P_{2n}(x)$$
$$=(w, \partial^n) P_{2n}(x) \tag{60}$$

와 같이 된다. 여기서, $p(x)$는 계수가 복소수인 다항식도 포함한다. 우리가 취급하고자 하는 타원균열에서는 $p(x)$가 균열면에서 조화함수인 경우가 매우중요하다. 이 경우에는 균열면에 작용하는 수직응력이 없게되어 기초장을 구성하는 필요조건을 만족하게 된다. 따라서 $p(x)=(x_1+i\ x_2)^n$를 구성하는 미분 연산자를 $(w,\ \partial^n)=\partial_*^n$라 두어 구별하고자 한다. 구체적으로 $n=3$인 경우

$$p(x)=(x_1+ix_2)^3$$
$$=x_1^3-3x_1x_2^2+i(3x_1^2x_2-x_2^3) \tag{61}$$

가 되고, 식 (51)을 사용하여 $p_{3\beta}(x)$로 표현하면

$$(x_1+ix_2)^3=(u_{31}-3u_{11})p_{31}(x)$$
$$+(u_{33}-3u_{13})p_{33}(x)$$
$$+i(3u_{20}-u_{00})p_{30}(x)$$
$$+i(3u_{22}-u_{02})p_{32}(x) \tag{62}$$

와 같이되어 벡터 w는

$$w_0=i(3u_{20}-u_{00}),\quad w_1=u_{31}-3u_{11}$$
$$w_2=i(3u_{22}-u_{02}),\quad w_3=u_{33}-3u_{13} \tag{63}$$

와 같이 된다. 타원 디스크상에서 표면밀도가 다음과 같은 거동을 하고

$$\sigma=\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{-1/2} f(x_1, x_2) \tag{64}$$

타원 디스크상에서 포텐셜이 조화함수일때 다항식 $f(x_1, x_2)$를 fundamental polynomial이라 정의하자. 이 때 포텐셜 $W(x)$를 Boussinesq 포텐셜로 생각하면 이것은 3 차원 타원균열에 대한 기초장을 제공한다. 예를 들어 다항식의 차원이 0인 기초장은 W_0이고 균열면에서의 값은 식 (29), (48)에서 $c_0b_0^{(0)}$이다. 다항식 $f(x_1, x_2)$ 차원이 1차인 fundamental polynomial은 W_1을 x_1, x_2에 대하여 미분하면 균열면에서 기초장의 거동을 하는 포텐셜이 된다. 즉, 균열면에서 $W_1(x)=c_1\{P_0(x)-P_2(x)\}$가 되므로 x_1 및 x_2로 미분하면 선형함수가 되므로 균열면에서 Laplace 식을 만족하는 조화함수가 된다. 일반적인 n 차원의 fundamental polynomial은 균열면에서 $W(x)$가 함수 $(x_1+ix_2)^n$의 실수부 또는 허수부에 비례하는 값이 되도록 구성한다. 즉,

$$W(x)=\frac{1}{c_n}\partial_*^n W_n(x)+\sum_{k=1}^{[n/2]} D^{n-2k} W_{n-2k}(x)/c_{n-2k} \tag{65}$$

여기서, c_n 및 c_{n-2k}는 식 (25)로 주어지고, D^j은 미분연산자로 $D^j=(w,\ \partial^j)$와 같다. 여기서, w가 j에 종속되어 변하는 $j+1$의 성분을 가진 벡터이므로 $D^j=(w^{(j)}, \partial^j)$로 표현하자. 균열면에서 포텐셜 $W(x)$는 식 (29)으로부터

$$W(x)=\partial_*^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P_{2n-2j}(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{[n/2]} D^{n-2k} \sum_{j=0}^{n-2k} (1)^{n-j} \binom{n-2k}{j} P_{2n-4k-2j}(x) \tag{66}$$

와 같이 된다. 여기서, 미지수 $w^{(j)}$은 다음 조건에서 구한다.

$$W(x) = (-1)^n \partial_*^n P_{2n}(x) = (-1)^n (x_1 + ix_2)^n$$
$$\text{harmonic on elliptic disk} \tag{67}$$

따라서 식 (65)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\partial_*^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P_{2n-2j}(x) + \sum_{k=1}^{[n/2]} D^{n-2k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{n-j} \binom{n-2k}{j} P_{2n-4k-2j}(x) = 0 \tag{68}$$

여기서 $\mu > 2\nu$인 경우 $\partial^\mu P_{2\nu}(x) = 0$가 되므로

$$\partial_*^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P_{2n-2j}(x) + \sum_{k=1}^{[n/2]} D^{n-2k} \sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^{n-j} \binom{n-2k}{j} P_{2n-4k-2j}(x) = 0 \tag{69}$$

와 같이 쓸 수 있다. 예를 들어 n=2, 3, 4, 5인 경우 Table 1과 같이 된다.

미분연산자 D^k는 식 (69)로부터 구할 수 있다. 예를 들어 n=5인 경우 위에서 주어진 표에 의하여 각 다항식에서 서로 독립인 항의 계수를 0으로 하는 조건으로부터 구한다. 즉, $D^3P_6 = 5\partial_*^5 P_8$ i.e. $(w^{(3)}, \partial^3) P_6 = 5\partial_*^5 P_3$으로부터 $w^{(3)}$가 구해지고, 이로부터 D^1은 1차원 다항식 항의 계수를 비교하여 구한다. 즉 $D^1 P_2 = -10\partial_*^5 P_6 + 3D^3 P_4$에서 구한다, 여기서, 식 (69)의 $D^{n-2k} P_{2n-4k-2j}$은 차수가 $n-2(k+j)$이므로 $k+j \leq n' = \left[\frac{n}{2}\right]$를 만족해야 한다. 여기서, [ ]는 괄호안의 값을 넘지않는 정수값을 택하는 함수이다. 따라서 j은 $0 \leq j \leq n' - k$ 사이의 자연수이다. 여기서부터 $k+j=m$으로 놓고 k를 $m-j$으로 취환하면, Table 1에서 각각의 n의 값에서 같은 열을 따라서 합하는 것은 m을 고정시키고 모든 j에 대하여 합하는 것이다. 따라서 $\partial_*^n = D^n$라 두면, 식 (69)는

$$\sum_{m=1}^{n'} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{n-j} \binom{n-2m+2j}{j} D^{n-2m+2j} P_{2n-4m+2j} = 0$$

로 되어, 윗 식을 만족하는 필요충분조건은

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{j} \binom{n-2m+2j}{j} D^{n-2m+2j} P_{2n-4m+2j} = 0$$
$$\text{for } m = 1, 2, \cdots, n' \tag{70}$$

와 같이 된다. 포텐셜 W로부터 균열면에서의 변위, 즉 가중함수는 $\frac{\partial W}{\partial x_3}$로 주어지므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \mp 2\pi \left\{ \frac{1}{C_n} \partial_*^n E(x\,;\,0)^{n-1/2} + \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{C_{n-2k}} D^{n-2k}\ E(x\,;\,0)^{n-2k-1/2} \right\}$$
$$= \mp 2\pi F(x) E(x\,;\,0)^{-1/2} \tag{71}$$

윗 식에서의 차수가 n인 다항식 $F(x)$는 식 (64)에서의 homogenous polynomial $f(x)$와는 무관하다. 실제로 $F(x)$는 항상 homogeneous polynomial이 되지는 않는다. 식 (71)에서 함수 $E(x\,;\,0)$에 대한 미분을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\partial(\alpha, m-\alpha) E(x\,;\,0)^{m-1/2}$$
$$= (2m-1)(2m-3)\cdots 2\cdot 1$$
$$\cdot (-1)^m \left(\frac{x_1}{a_1^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{x_2}{a_2^2}\right)^{m-\alpha} \cdot E^{-1/2}(x\,;\,0)$$
$$+ p(x) E^{1/2}(x\,;\,0) \tag{72}$$

여기서, $p(x)$는 윗 식을 만족하는 polynomial이다. 식 (72)을 operator $D^m = (u, \partial^m)$에 적용하면

$$D^m (x;0)^{m-1/2} = d_m(x) E^{-1/2}(x\,;\,0) + p(x) E^{1/2}(x\,;\,0) \tag{73}$$

와 같이 된다. 여기서,

Table 1 Constructions of fundamental polynomial by Eq. (65)

n=2	n=3	n=4	n=5
$-2\partial_*^2 P_2$ $+D^0 P_0$	$+3\partial_*^3 P_4$ $-D^1 P_2$	$-4\partial_*^4 P_6 + 6\partial_*^4 P_4$ $+D^2 P_4 - 2D^2 P_2$ $+D^0 P_0$	$+5\partial_*^5 P_8 - 10\partial_*^5 P_6$ $-D^3 P_6 + 3D^3 P_4$ $-D^1 P_2$

$$d_m(x)=1\cdot3\cdots(2m-1)(-1)^m\sum_{k=1}^{n}u_a\left(\frac{x_1}{a_1^2}\right)^a\left(\frac{x_2}{a_2^2}\right)^{m-a} \tag{74}$$

이고, $p(x)$는 식 (73)을 만족하는 적당한 다항식이다. 따라서, 다항식 $F(x)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n'}\frac{1}{C_{n-2k}}d_{n-2k}(x)+E(x\ ;\ 0)f(x) \tag{75}$$

여기서, $f(x)$는 윗 식을 만족하는 적당한 다항식을 나타낸다.

4. 수직압력을 받고 있는 평면균열

기호의 복잡함을 줄이기 위해 앞뒤 내용으로서 기호가 무엇을 의미하는지가 분명한 경우에는 앞장에서의 기호와 같은 것을 사용하기로 하자. 등방성 무한 물체에 존재하는 평면균열면에 대칭인 수직압력이 작용하는 경우, 변위변형률, 응력 등은 한 개의 Boussinesq-Papcovich 조화함수[(7)]로서 나타낼 수 있다. 여기서, 직각좌표계 x, y, z(또는 기록의 편의를 위하여 (x_1, x_2, x_3))를 사용하고 균열면이 $x-y$면 상에 있고, 이 영역을 C라고 하고 하자. 균열의 경계를 Γ라 하고, 균열면의 윗면과 아랫면을 각각 C^+, C^-라하고, 이들를 z좌표로 $z=+0$, $z=-0$라고 표현하자. 균열면에 압력이 작용할 때 이로 인한 변위, 응력은 Boussinesq-Papcovich 조화함수 $G(x, y, z)$를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}u&=-zG_{xz}-(1-2\nu)G_x\\ v&=-zG_{yz}-(1-2\nu)G_y\\ w&=-zG_{zz}+(2(1-2\nu)G_z\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x&=-2\mu[(zG_{xx})_z+2\nu G_{yy}]\\ \tau_{yz}&=-2\mu zG_{yzz}\\ \sigma_y&=-2\mu[(zG_{yy})_z+2\nu G_{xx}]\\ \tau_{xz}&=-2\mu zG_{xzz}\\ \sigma_z&=-2\mu[zG_{zzz}-G_{zz}]\\ \tau_{xy}&=-2\mu[zG_{xyz}+(1+2\nu)G_{xy}]\end{aligned} \tag{77}$$

여기서, μ, ν는 각각 전단계수와 푸아송비를 나타낸다. 그리고 조화함수 G에 붙혀진 아래첨자는 그첨자에 대한 편미분을 나타낸다. C^-, C^-는 각각 다른 평면을 나타내고, G는 균열 끝의 경계 Γ를 제외한 모든영역에서 3차 미분까지 연속이라고 가정한다. 위와 같은 가정에서 균열면 $C^\pm$에서의 변위와 응력은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}w&=2(1-\nu)G_z\\ \sigma_z&=2\mu G_{zz}\\ \tau_{xz}&=\tau_{yz}=0\ \text{ on }\ C^\pm\end{aligned} \tag{78}$$

여기서, 체적력은 고려하지 않으므로 G는 다음과 같은 편미분방정식을 만족하는 조화함수이다.

$$\nabla^2G=G_{xx}+G_{yy}+G_{zz}=0 \tag{79}$$

앞으로의 이론 전개과정에서 보면, 다음과 같은 2차원 Laplacian을 정의하면 편리하다. 즉,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{80}$$

식 (77)으로부터

$$-\sigma_z=p(x, y)=2\mu\Delta G(x, y, \pm0)\ \text{ on }\ C^\pm \tag{81}$$

가 되고 G는 z에 대하여 우함수가 됨을 알 수 있다. 따라서 G를 다음과 같은 한겹(single layer)으로 된 포텐셜로서 나타낼 수 있다.[(10)]

$$G(x, y, z)=\alpha\int_C f(\xi, \eta)R^{-1}d\xi d\eta \tag{82}$$

여기서,

$$\alpha=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$
$$R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2$$

이다. 그리고 식 (82)에서 적분영역은 균열이 차지한 영역 C에 대한 것이다. 포텐셜이론과 식 (76)로부터 균열면에서의 변위 w는

$$w=\pm f(x, y)\ \text{ on }\ C^\pm \tag{83}$$

와 같이 된다. 다음과 같은 적분변환 연산자를 정의하고

$$Tf=\alpha\int_C f(\xi, \eta)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-1/2}d\xi d\eta \tag{84}$$

$G(x, y, 0)=g(x, y)$라 두면

$$g=Tf \tag{85}$$

와 같이 쓸 수 있고, 식 (65)는 다음과 같은 적분-미분방정식(integro-differential equation)으로 된다.

$$p=2\mu\Delta Tf\ \text{ where }\ (x, y)\ \text{ on }\ C \tag{86}$$

여기서, 밀도함수 f가 균열 윗면에서의 수직 변위 w이므로 Mode I변형에서의 해 f가 유한해야 하며 균열 경계선 Γ를 따라서 영이 된다. 균열 면상의 점 (x, y)에서 균열경계선 상의 임의의 점 s까지의 거리를 d라 두면, 점 (x, y) 가 s에 가까이 접근할 때 f는 균열 끝을 따라서 변하는 응력확대계수 $k_1(s)$로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x, y) \cong \frac{\sqrt{2}}{\mu} k_1(s)(1-\nu) d^{1/2} \tag{87}$$

식 (86)에서 f가 구해지면, 식 (82)로부터 포텐셜 G가 구해지므로 균열면에 작용하는 압력 $p(x, y)$ 에 의한 장(field)이 구해진다. 이때 만약 $p(x, y)=0$이 되면 식 (86)의 해 중에서 $f=0$을 제외한 해는 유일하지 않게 되고(non unique) 특히 균열 끝을 따라서 f가 무한대가 된다. 여기서 균열 끝을 따라서 f가

$$f = m(s) d^{-1/2} \tag{88}$$

이고 무한대에서 영으로 수렴할 때 f를 무게함수라 하고, 이때의 장을 기초장(fundamental field)이라 한다. f가 식 (87)와 같이 주어질 때의 장을 정상장(regular field)이라 한다. 예를 들어 균열면에 일정한 압력 p_0가 작용할 때 균열 윗면에서의 변위 w^+는

$$w^+ = \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{1/2} \frac{1-\nu}{\mu E(k, \pi/2)} a_2 p_0 \tag{89}$$

아 같이 되고, Boussinesq-Papcovich 함수 $G(x_1, x_2, x_3)$는

$$\begin{aligned} w^+ &= 2(1-\nu)\left(\frac{\partial G}{\partial x_3}\right)_+ \\ &= E(x;0)^{1/2} \frac{1-\nu}{\mu E(k, \pi/2)} a_2 p_0 \end{aligned} \tag{90}$$

의 관계식으로부터

$$G(x_1, x_2, x_3) = -\frac{a_1 a_2^2 p_0}{8\mu E(k, \pi/2j} \int_t^\infty T(x;s) \frac{ds}{q(s)} \tag{91}$$

가 된다. 여기서,

$$T(x;s) = 1 - \frac{\overset{2}{x}}{a_1^2+s} - \frac{x_2^2}{a_2^2+s} - \frac{x_3^2}{a_3^2}$$

이고 $q(s)$는 식 (17)에서와 같고, t는 식 (5)에서 $a_3=0$를 만족하는 양의 근이다. 균열면에서의 면력은

$$2\mu \Delta G(x_1, x_2, 0) = p_0 \tag{92}$$

가 되어 경계조건을 만족하는 정상장인 것을 알 수 있다. 따라서, 일정한 압력하에서의 타원균열 끝을 따라서 응력확대계수는 식 (89)을 균열에 근접한 지점에서 전개하여 식 (87)과 비교하면 구할 수 있다. 즉,

$$k_1(x_1, x_2) = \frac{a_2 p_0}{E(k, \pi/2)} \left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4}\right)^{1/4} \tag{93}$$

가 된다. 식 (23)에서 $n=0$을 택하면 균열면에서의 포텐셜은 식 (24)으로부터 상수가 되어 균열면에 작용하는 면력은 영이 된다. 균열면에서의 변위는 식 (23)에 비례하므로 균열 끝에서 변위가 무한대이고 면력이 없는 기초장이 구해진다. 구체적으로

$$w^+ = \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{-1/2} \tag{94}$$

이면 Boussinesq-Papcovich 포텐셜 G는

$$G(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\pi c_0}{1-\nu} \int_0^\infty \frac{ds}{q(s)} \tag{95}$$

와 같이 되어 균열면, 즉 $t=0$에서 G는 상수가 되어 균열면에서 Laplace equation을 만족하게 되어 면력이 영이 된다. 일반적으로 균열 윗면에서의 변위가 다음과 같이 주어질 때

$$w^+ = h(x_1, x_2)\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{-1/2} \tag{96}$$

균열면에서 면력이 없는 Boussinesq-Papcovich 포텐셜은 2장에서의 이론을 이용하여 구할 수 있다. 식 (79)에서 $h(x_1, x_2)$는 독립변수 x_1, x_2에 대한 다항식이다. 구체적으로 균열면에서

$$W(x) = -(x_1 + i\, x_2) \tag{97}$$

의 거동을 하면

$$\Delta W(x_1, x_2, 0) 0 \tag{98}$$

이 되므로 균열면에서 면력이 영이 된다. 기초장이 되기위해서는 식 (88)의 조건을 만족해야 한다. 이를 만족하기 위해서 식 (65)와 같이 W를 구성한다. 즉,

$$W(x) = \frac{1}{c_1} \partial_*^1 W_1(x) \tag{99}$$

가 되고,

$$\partial^1_* = w_0\frac{\partial}{\partial x_2} + w_1\frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$w_0 = \frac{i}{2b_0^{(1)}},\quad w_1 = \frac{1}{2b_2^{(1)}} \tag{100}$$

가 된다. 따라서 식 (71)로부터

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \mp\frac{2\pi}{c_1}\left[w_0\frac{\partial}{\partial x_2}E^{1/2} + w_1\frac{\partial}{\partial x_1}E^{1/2}\right]$$
$$= \pm\left(\frac{4\pi w_1}{c_1 a_1^2}x_1 + \frac{4\pi w_0}{c_1 a_2^2}x_2\right)E^{-1/2} \tag{101}$$

와 같이 되고, 포텐셜 W는 다음과 같다.

$$W = (x_1, x_2, x_3)$$
$$= w_0\frac{\partial}{\partial x_2}\int_t^\infty \frac{T(x\,;\,s)}{q(s)}ds$$
$$+ w_1\frac{\partial}{\partial x_1}\int_t^\infty \frac{T(x\,;\,s)}{q(s)}ds \tag{102}$$

따라서 균열면에서의 변위가

$$2(1-\nu)\frac{\partial G}{\partial a_3})_+ = x_1E^{-1/2} \text{ or } x_2E^{-1/2} \tag{103}$$

로 주어질 때의 Boussinesq-Papcovich 포텐셜은

$$G(x) = \frac{c_1a_1^2}{8\pi(1-\nu)}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\int_t^\infty \frac{T(x;s)}{q(s)}ds \text{ or}$$
$$\frac{c_1a_2^2}{8\pi(1-\nu)}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\int_t^\infty \frac{T(x;s)}{q(s)}ds \tag{104}$$

와 같이 된다. 윗 식은 Dyson의 공식[7]을 사용하면

$$G(x) = -\frac{a_1^2a_2\pi x_1}{2(1-\nu)}\int_t^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)q(s)} \text{ or}$$
$$-\frac{a_1a_2^2\pi x_2}{2(1-\nu)}\int_t^\infty \frac{ds}{(a_2^2+s)q(s)} \tag{105}$$

와 같이 쓸 수 있다. $h(x_1, x_2)$가 order 2인 다항식인 경우에는 식 (65) 에서 $n=2$를 택한다. 즉,

$$W(x) = \frac{1}{c_2}\partial^2_* W_2(x) + \frac{D^0}{c^0}W_0 \tag{106}$$

where $W_2(x) = c_2\{\dot{P}_0 - 2P_2(x) + P_4(x)\}$
$W_0 = c_0P_0$

여기서, 연산자 ∂^2_*는 식 (67)을 이용하여 구한다. 즉, 다음식으로 주어진다.

$$\partial^2_*P_4(x) = \left(w_0\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + w_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + w_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)P_4(x)$$
$$= (x_1 + ix_2)^2$$
$$= x_1^2 - x_2^2 + 2ix_1x_2 \tag{107}$$

식 (47) (48)을 사용하면 w_0, w_1, w_2는 다음과 같은 연립방정식의 해로서 주어진다.

$$4b_2^{(2)}w_1 = 2i$$
$$2b_2^{(2)}w_0 + 12b_4^{(2)}w_2 = 1$$
$$12b_0^{(2)}w_0 + 2b_2^{(2)}w_2 = -1 \tag{108}$$

즉,

$$w_1 = \frac{i}{2b_2^{(2)}}$$
$$w_0 = \frac{b_2^{(2)} + 6b_4^{(2)}}{2(b_2^{(2)})^2 - 72b_0^{(2)}b_4^{(2)}}$$
$$w_2 = \frac{b_2^{(2)} + 6b_0^{(2)}}{2(b_2^{(2)})^2 - 72b_0^{(2)}b_4^{(2)}} \tag{109}$$

식 (106)의 D^0는

$$D^0 = \frac{2\partial^2_*P_2(x)}{P_0} = \frac{4b_0^{(1)}w_0 + b_2^{(1)}w_2}{b_0^{(0)}} \tag{110}$$

로 주어진다. 변위는 식 (71)를 사용하여 구해진다. 즉,

$$\frac{\partial W}{\partial x_3} = \mp 2\pi\left\{\frac{1}{c_2}\partial^2_*E(x;0)^{2/3} + \frac{D^0}{c^0}E(x;0)^{-1/2}\right\}$$
$$= \mp\left\{\frac{D^0}{c^0} - \frac{3}{c_2}\left(\frac{w_0}{a_2^2} + \frac{w_2}{a_1^2}\right) + \frac{3}{c_2}\left(\frac{w_0}{a_1^2a_2^2} + \frac{2w_2}{a_1^4}\right)x_1^2 + \frac{3}{c_2}\left(\frac{2w_0}{a_2^4} + \frac{w_2}{a_1^2a_2^2}\right)x_2^2\right\}E^{-1/2} \tag{111}$$

그러나, D^0는 식 (65)에서 상수항에 기여하므로 이를 포함하는 항은 평면조화함수(plane harmonic function)가 되므로 고려하지 않아도 된다. 같은 이유로 선형항도 고려하지 않아도 된다. 즉, 다음과 같은 함수는 항상 기초장에서의 변위가 된다.

$$w^+ = (\tau_0 + \tau_1x_1 + \tau_2x_1 + \tau_2x_2)E(x\,;\,0)^{-1/2} \tag{95}$$

여기서, τ_0, τ_1, τ_2는 임의의 상수들이다. 따라서, 식 (111)에서 2차항만 고려하고, 식 (35), (39), (41)를 사용하면, $h(x_1, x_2)$은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2(1-\nu)\frac{\partial G}{\partial x_3})_+ = \{L(0,1)x_1^2 - L(1,0)x_2^2\}E^{-1/2}$$
$$\text{or } x_1x_2E^{-1/2} \tag{112a, b}$$

같은 방법으로 $h(x_1, x_2)$의 차수가 3차인 것은

$$h(x_1, x_2) = L(1,1)x_1^3 - 3L(2,0)x_1x_2^2$$
$$\text{or } L(1,1)x_2^3 - 3L(0,2)x_1^2x_2 \tag{113}$$

와 같이 되고, 4차인 것은

$$h(x_1, x_2) = L(1,2)x_1^3x_2 - L(2,1)x_1x_2^3 \quad (114a)$$

$$h(x_1, x_2) = \alpha_1x_1^4 + \alpha_2x_1^2x_2^2 + \alpha_3x_2^4 + \alpha_4x_1^2 + \alpha_5x_2^2 \quad (114b)$$

여기서, 상수는 다음과 같다.

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} L(1,1) & 3L(0,2) \\ L(2,1) - L(1,2) & -5L(0,2) + 2L(1,2) \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2 = -3\begin{vmatrix} L(2,0) & L(0,2) \\ 5L(2,0) - 2L(2,1) & -5L(0,2) + 2L(1,2) \end{vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 3L(2,0) & L(1,1) \\ 5L(2,0) - 2L(2,1) & L(2,1) - L(1,2) \end{vmatrix}$$

$$\alpha_4 = \frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)}\{(\alpha_1 - \alpha_2)a_1^2 + \alpha_3a_2^2\}$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}\{\alpha_1a_1^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)a_2^2\}$$

5. 가중함수이론

가중함수이론은 Betti의 상반정리에 기초를 두고 있다. 즉, 정상장(regular field)과 기초장(fundamental field)에서의 혼합일(mixed work)을 이용한다. 정상장, 즉 유한한 변형에너지밀도를 가지는 장에서는 경계조건을 만족하는 정상장은 유일하다. 그러나, 균열, 노치 등 기하학적인 불연속을 내재한 경우, 이들 점을 포함한 영역에서의 변형에너지가 무한대가 가능하다고 허용하면 외부에서의 하중이 없는 경우에도 장(field)을 구성할 수 있다. 이러한 장은 유일하지 않고 변위가 균열 끝에서 무한대가 된다. 이 변위를 무게함수라 한다. 그리고 이 장을 기초장이라 한다. 특히 균열인 경우 변위가 식 (88)와 같이 거동하는 경우가 많이 쓰이고 있다. 타원균열인 경우 균열 윗 면에서의 무게함수가 식 (96)로 주어질 때 상반정리로부터 Mode I인 경우 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_{C'} k_1(s)m(s)\,ds = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\iint_{C+} w^+(x_1, x_2)p(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 \quad (116)$$

여기서, $k_1(s)$는 균열면에 작용하는 압력 $p(x_1, x_2)$에 의하여 균열 끝 s를 따라서 변하는 응력확대계수를 나타내고, $m(s)$는 식 (88)에서와 같이 균열 윗 면에서의 변위를 균열 끝 부근에서 전개했을 때의 leading coefficient이다.

6. 원형에 가까운 타원균열에서의 집중하중에 의한 응력확대계수 계산

앞에서 구한 가중함수를 이용하여 원형균열(penny shaped crack)에 가까운 타원형 균열에 집중하중이 작용하는 경우 균열 끝을 따라서 변하는 응력확대계수를 구하고자 한다. 여기서, 원형균열에 가까운 타원균열이란 타원에서 $\frac{a_2}{a_1}$를 ε으로 정의했을 때

$$k^2 = 1 - \varepsilon^2$$

이 1에 비하여 매우 작다는 것을 뜻한다. 선형 등방성 무한물체에 semi axis가 a_1, a_2인 타원균열에 집중하중이 작용할 때의 응력확대계수를 구하고자 한다. 이 타원의 방정식을 다음과 같이 표현하자.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (117)$$

극좌표계를 이용하면 균열 끝을 따라 변하는 응력확대계수는 Fourier series로 전개하면

$$k_1(x_1, x_2) = k_1(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) \quad (118)$$

와 같이 된다. 여기서,

$$x_1 = a_1\cos\theta, \quad x_2 = a_2\sin\theta \quad (119)$$

이다. 하중이 원점에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} k_1(x_1, x_2) &= k_1(x_1, -x_2) \\ &= k_1(-x_1, x_2) \\ &= k_1(-x_1, -x_2) \end{aligned} \quad (120)$$

가 되어, 식 (118)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$k_1(\theta) = A_0 + A_2\cos 2\theta + A_4\cos 4\theta + A^6\cos 6\theta + \cdots$$

여기서, 우리는 2차까지의 근사식을 구해 보자. 즉,

$$k_1(\theta) \cong A_0 + A_2\cos 2\theta \quad (121)$$

으로 표현하면 Fourier계수 A_0, A_2를 구하기 위해서는 2개의 서로 독립인 가중함수가 필요하다. 이들 가중함수는 식 (94), (112a), (114b) 을 사용한다. 가중함수가 식 (94)로 주어질 때 식 (88)의

$m(s)$는

$$m(s)=m_0(x_1, x_2)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_1^2}{a_1^4}+\frac{x_2^2}{a_2^4}\right)^{-1/4}$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}} \quad (122)$$

와 같이 되고 면력을 Dirac의 델타함수를 사용하여 표현하면, $p(x_1, x_2)=\delta(x_1)\delta(x_2)$가 되어 식 (116)로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$B_{00}A_0+B_{20}A_2=\frac{1}{2\pi a_1\sqrt{a_2}} \quad (123)$$

여기서, 계수 B_{00} 등은 다음과 같은 정적분으로 주어진다.

$$B_{00}=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}d\theta$$
$$B_{20}=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}\cos 2\theta d\theta \quad (124)$$

같은 방법으로 무게함수가 식 (112a)인 경우 $m(s)$는

$$m(s)=m_2(\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{2}}\frac{a_1^2\{L(0,1)\cos^2\theta-\varepsilon^2L(1,0)\sin^2\theta\}}{(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}} \quad (125)$$

가 되고 식 (116)을 적용하면

$$B_{02}A_0+B_{22}A_2=0 \quad (126)$$

으로 된다. 여기서,

$$B_{02}=\int_0^{\pi/2}\{L(0,1)\cos^2\theta-\varepsilon^2L(1,0)\sin^2\theta\}$$
$$(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}d\theta$$
$$B_{22}=\int_0^{\pi/2}\{L(0,1)\cos^2\theta-\varepsilon^2L(1,0)\sin^2\theta\}$$
$$(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}\cos 2\theta d\theta \quad (127)$$

이제부터, 식 (123)과 (126)에서 계수 A_0, A_2를 매개변수 k^2으로 나타내어 응력확대계수가 k^2에 대하여 어떻게 변하는지 구하고자 한다. 먼저 이항정리를 사용하면

$$1-k^2\sin^2\theta)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\theta$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\theta+\cdots$$
$$(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta$$
$$-\frac{1}{8}k^4\sin^4\theta-\frac{1}{16}k^6\sin^6\theta-\cdots$$

와 같이 되므로, 제 1 종 및 2종 타원적분을 k^2의 다항식으로 전개하면 다음과 같이 된다.

$$F(k,\theta)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right]$$
$$E(k,\theta)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\frac{1}{8}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)k^4\right.$$
$$\left.-\frac{1}{16}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)k^6+\cdots\right]$$

따라서,

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{16}k^4+\frac{15}{128}k^6+\cdots\right]$$
$$E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)-\varepsilon^2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{16}k^4+\frac{3}{128}k^6+\cdots\right]$$

가 되어 $L(1,0)$, $L(0,1)$는 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$L(1,0)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}\left(1+\frac{3}{8}k^2+\frac{15}{64}k^4+\cdots\right)$$
$$L(0,1)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{8}k^2+\frac{3}{64}k^4+\cdots\right)$$

식 (124)에서

$$(\sin^2\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta)^{1/4}=(1-k^2\cos^2\theta)^{1/4}$$
$$=1-\frac{1}{4}k^2\cos^2\theta-\frac{3}{32}k^4\cos^4\theta-\cdots$$

와 같이 전개할 수 있으므로 B_{00}, B_{20}는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{00}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{8}k^2-\frac{9}{256}k^4-\cdots\right)$$
$$B_{20}=-\frac{\pi}{2}k^2\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{128}k^2+\cdots\right)$$

같은 방법으로

$$B_{02}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}\ \frac{5\pi}{32}k^2+\cdots$$
$$B_{22}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{32}k^2-\cdots\right]$$

와 같이 된다. 여기서, 구하고자 하는 계수 A_0, A_2를 k^2에 대한 다항식으로 다음과 같이 가정하자. 즉,

$$A_0(k^2)=\alpha_0+\alpha_1 k^2+\alpha_2 k^4+\cdots$$
$$A_2(k^2)=\beta_1 k^2+\beta_2 k^4+\cdots$$

으로 두면 식 (123)은

$$\left(1-\frac{1}{8}k^2-\frac{9}{256}k^4-\cdots\right)(\alpha_0+\alpha_1 k^2+\alpha_2 k^4+\cdots)$$
$$-\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{128}k^2+\cdots\right)(\beta_1 k^2+\beta_2 k^4+\cdots)$$
$$=\frac{1}{\pi^2 a_1\sqrt{a_1}}\left(1+\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{8}k^4+\cdots\right)$$

가 되고 식 (126)은

$$(5\alpha_0+8\beta_1)k^2+(5\alpha_1-\beta_1+8\beta_2)k^4+\cdots=0$$

으로 된다. 윗 식에서 k^2의 계수를 비교하면

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi^2 a_1\sqrt{a_1}},\quad \alpha_1=\frac{5}{8}\alpha_0$$
$$\beta_1=-\frac{5}{8}\alpha_0,\quad \beta_2=-\frac{15}{32}\alpha_0$$

가 되어 응력확대계수는 다음과 같이 표현된다.

$$k_1(\theta)=\frac{1}{\pi^2 a_1\sqrt{a_1}}\left[1+\frac{5}{8}\left(1-\cos 2\theta\right)k^2+\cdots\right]$$

윗 식에서 $k=0$이면 원형균열이 되고 응력확대계수는

$$k_1=\frac{1}{\pi^2 a_1\sqrt{a_1}}$$

으로 되어 이미 잘 알려져 있는 결과와 일치한다.

7. 결 론

본 논문에서는 Poisson의 타원체 포텐셜이론과 Ferrers의 미분방법을 이용하여 무한 선형 등방성 재료에 내재된 타원균열에 대한 Mode I에서의 응력확대계수를 구할 수 있는 가중함수를 구하였다. 이렇게 구한 가중함수를 이용하여 원형에 가까운 타원균열에 집중하중이 작용할 때의 균열 끝을 따라서 변하는 응력확대계수를 각도에 대한 함수로 구하였다. 선형중첩을 이용하면 유한한 물체에 존재하는 타원균열에 대한 응력확대계수도 구할수 있으므로 본 논문의 결과는 앞으로 많은 응력확대계수 계산에 사용될 것으로 생각된다.

후 기

본 논문은 1995년도 교육부 기계공학분야 연구지원과제(과제번호 ME95-C-06)로 수행되었으며, 이에 감사 드립니다.

참고문헌

(1) Sih, G. C. ed., 1973, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, Leiden.
(2) Bueckner, H. F., 1970, "A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors," *ZAMM* 46, pp. 529~545.
(3) Bueckner, H. F., 1987, "Weight Functions and Fundamental Fields for the Penny-Shaped and the Half-Plane Crack in Three-Space," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23, No. 1, pp. 57~93.
(4) Bueckner, H. F., 1989, "Observations on Weight Functions," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 6, No. 1, pp. 3~18.
(5) Chandrasekhar, S., 1987, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Dover Publications, Inc., New York.
(6) Ferrers, N. M., 1877, "On the Potentials of Ellipsoids, Ellipsoidal Shells, Elliptic Laminae and Elliptic Rings, of Variable Densities," *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, Vol. 14, pp. 1~22.
(7) Dyson, F. W., 1891, "The Potentials of Ellipsods of Variable Densities," *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, Vol. 25, pp. 259~288.
(8) Andrews, L. C., 1985, *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, Macmillan Publishing Company, New York.
(9) Sokolnikoff, I. S. 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
(10) Kellog, O. D., 1953, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, Inc., New York.