

〈논 문〉

방진고무 변형형상 및 하중-변위곡선 예측을 위한 단순 유한요소법

전만수* · 문호근* · 김성진**

(1996년 4월 4일 접수)

A Simple Finite Element Method to Determination of Deformed Shape and Load-Displacement Curve of Elastomers

M. S. Joun, H. K. Moon and S. J. Kim

Key Words : Simple Finite Element Method(단순 유한요소법), Elastomer(방진고무) Rubber Deformation(고무변형), Stress-Strain Curve(응력-변형률곡선), Load-Displacement Curve(하중-변위곡선)

Abstract

A simple finite element approach to predicting deformed shape and load-deflection curve of elastomers is presented in this paper. The method is based on several simplifications in deformation pattern and material behavior. The conventional updated Lagrangian approach is employed together with material data obtained by a simple tension test. The presented approach is verified through comparison of predicted results with experimental ones and applied successfully to shape design of various elastomers for shock, vibration and noise control. The advantage of the presented approach lies in easiness, simplicity and accuracy enough for engineering application.

1. 서 론

방진고무는 가전제품과 자동차 등의 완충 및 소음제어 목적으로 광범위하게 사용되고 있다. 냉장고의 경우, 소음이 성능을 평가하는 핵심요소이므로 압축기에서 발생하는 운동에너지를 기계적으로 흡수하여 소음원을 외부로 차단해야 한다. 압축기 방진고무는 압축기로부터 전달되는 소음을 일차적으로 감소시키고, 수송과 사용중에 외부로부터 가해지는 충격을 흡수하여 압축기를 보호하는 주요 부품이다. 고무는 일반적으로 사용에 따른 기능의

퇴화정도가 큰 소재이다. 따라서 냉장고의 기본 수명 범위내에서 기계적 성질의 저하가 적어야 한다는 점이 방진용 고무가 갖추어야 할 재료학적 요구조건이다. 고무의 기계적·화학적 성질이 요구조건을 충족시키는 경우라도 방진고무의 형상설계에 따라 수명 및 성능은 크게 차이가 날 수 있다. 따라서 방진고무에 관한 연구는 소재 관련 연구와 형상설계 관련 연구로 나누어지며 본 연구는 형상설계 관련 연구에 초점이 맞추어져 있다.

하중-변위곡선을 비롯한 방진고무의 역학적 거동 특성은 형상설계에 필수적인 설계정보이다. 따라서 형상최적설계 및 설계 시행오차의 최소화를 위해서는 역학해석이 필수적이다. 고무의 역학해석 문제는 초탄성(hyperelastic) 소재, 비선형, 비압축성 등의 성질로 난해한 문제⁽¹⁻⁴⁾에 속한다. 대변

*회원, 경상대학교 기계공학과, RRC/항공기부품기술연구센터

**LG 전자(주) 생활시스템연구소

형 이론이 확립되어 있지만, 실제 문제를 해결하는 데는 넘어야 할 장애가 매우 많다. 이론 및 계산이 어렵고, 이론에서 요구하는 소재의 응력-변형률 관계식의 획득이 쉽지 않다. 임피해를 구하기 위해서는 고무에 대한 일함수를 변형률의 함수로 표현해야 하기 때문이다. 이를 위해서는 고가의 비용이 소요되는 인장시험이 필요하다. 특히, 고무의 경우, 화학적 조성비율에 따라 그 성질이 매우 다르므로 소재 핸드북으로부터 필요한 자료를 얻기란 사실상 불가능하다.

따라서 이론이 쉽고, 이론에 부합하는 소재의 성질을 손쉽게 얻을 수 있는 근사적 해석방법이 활용 측면에서 효과적이다. 이러한 점이 본 연구의 동기가 되었다. 본 연구에서 사용된 해법은 단순유한요소법으로 방진고무의 변형거동과 소재의 성질에 관한 이론적 간소화에 근간을 두고 있다. 개발된 프로그램의 예측결과는 실험결과와 비교되었으며, 냉장고 압축기 등의 방진고무 설계목적으로 성공적으로 적용되고 있다.⁽⁶⁾

2. 문제의 정의, 가정, 단순화

대부분의 방진고무의 형상은 축대칭이다. 하중이 특별한 방향성을 지니고 있지 않으며, 설계, 금형 제작, 생산 등에서 이점이 많기 때문이다. 축대칭 방진고무의 형상설계 문제는 Fig. 1에서 보는 바와 같이, 방진고무의 형상 이외에 방진고무가 놓이는 평판(하판)과 압축기의 지지대가 연결되는 부위의 판(상판) 등의 형상 데이터를 필요로 한다. 방진고무는, 해석 및 문제의 수학적 정의를 위하여, 해석영역 Ω , 하중이 작용하는 상판과 하판 Γ_c , 그 이외의 자유표면 Γ_f 로 구분된다. Γ_c 는 해석과정에서 이 경계에 인장응력이 작용할 경우 접촉이 분리되므로 변할 수 있는 해석경계이다.

고무의 재질은 등방성이며 비압축성이라고 가정하였고, 자중과 가속도에 의하여 유발되는 힘은 다른 힘에 비하여 상대적으로 매우 작기 때문에 무시하였다. 이론 및 접근방법을 단순화하기 위하여 하중이 가해지는 동안 국부적 언로딩(unloading)의 발생은 매우 작으며, 그 영향을 무시 가능하다고 가정하였다. 즉, Fig. 2에서 요소의 처음형상과 최종변형상태가 알려져 있다면, 임의의 중간부위의 변형형태는 상판의 처짐량에 대한 관련 절점들의 내분점에 의하여 결정된다고 간주하였다. 이 가정

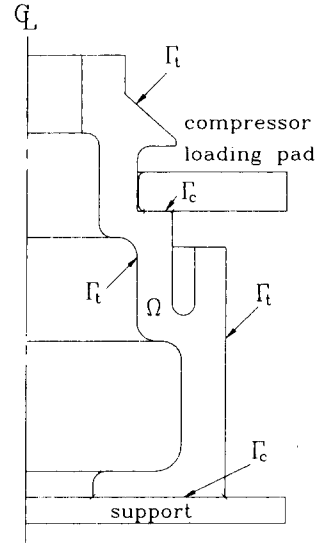


Fig. 1 Geometric definition of the problem

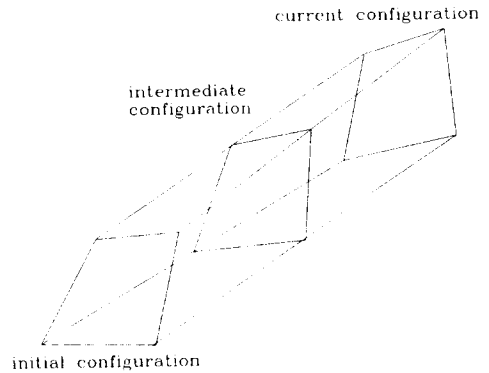


Fig. 2 Simplification of deformation mode

은 방진고무가 지탱하는 정적하중을 전후한 하중영역에서 실제의 현상을 매우 잘 반영할 것으로 사료되며, 변형이 매우 작거나 매우 클 경우엔 오차를 다소 유발할 것으로 사료된다. 설계시 주안점이 정적하중 전후의 하중과 변형의 특성, 즉 하중-변위 곡선의 기울기에 맞추어져 있으므로 이 가정은 본 연구 목적으로 부합된다고 볼 수 있다.

3. 문제의 수식화

전술한 가정과 단순화로 인하여 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1)$$

초탄성 소재는 변형에너지밀도함수 $u = u(\epsilon_{ij})$ 를 갖는다. 응력과 변형률의 관계는 $\sigma_{ij} = \partial u(\epsilon_{mn}) / \partial \epsilon_{ij}$ 로 표현된다. 변형률 텐서 ϵ_{ij} 는 3개의 불변치 $I_1, I_2, I_3^{(2)}$ 를 가지고 있으며, 등방성이라는 가정하에 변형에너지밀도함수를 세 개의 변형률 불변치의 함수로 간주할 수 있다. 비압축성 조건으로부터 $I_1 = 0$ 이므로, 변형에너지밀도함수는 변형률 불변치 I_2, I_3 만의 함수이다. 본 연구에서는 I_2 만의 함수라고 가정한다. 비록 I_3 을 수식화 단계에서 고려했다고 하더라도 이를 활용하기 위해서는 고난도의 재료시험이 필요하므로 근사적 해를 찾아 설계에 반영하는 것을 목표로 하고 있는 본 연구의 목적에 부적합하다. 이러한 배경을 바탕으로 상판의 변위중분 Δ_j 에 기인한 변형률중분량 $\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$ 과 응력 σ_{ij} 의 관계는 다음과 같이 가정한다.

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\bar{\epsilon}) \Delta \epsilon_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2)$$

여기서, μ 는 유효변형률 $\bar{\epsilon}$ 의 함수이다. p 는 정수압, 즉 평균응력의 부의 값을 의미한다. 유효응력 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$ 및 유효변형률 증가량 $\Delta \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \epsilon'_{ij} \Delta \epsilon'_{ij}}$ 의 정의와 식 (2)로부터 $\mu(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\Delta \bar{\epsilon}}$ 의 관계가 성립한다. 여기서, 유효응력 $\bar{\sigma}$ 는 유효변형률 $\bar{\epsilon}$ 의 함수이며, 관계식은 인장시험으로부터 구해진다.

구성방정식 (2)는 현재상태에서 다음 단계의 해를 구할 때 현재상태의 유효변형률만 이용하고 과거의 변형 역사를 무시하고 있으며, 현재까지의 변형과정은 전술한 변형형태에 대한 가정(Fig. 2 참고)에 바탕을 두고 있다. 하중이 가해지는 동안 모든 변형률 성분의 절대값이 거의 감소되지 않는다면, 구성방정식 (2)는 실제의 상황을 잘 반영한다고 볼 수 있다. 국부적인 언로딩 문제는 해석결과에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 예상되며, 유효변형률 $\bar{\epsilon}$ 의 계산 과정에서 다소 완화될 수 있다. 중간강도의 변형률을 목표로 하는 방진고무의 형상 설계 문제는 바로 이러한 문제의 범주에 속한다. 해석과정에서 문제가 되는 것은 현재시간 t 에서 각 요소의 유효변형률을 어떻게 구하느냐는 것이다. 본 연구에서는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 현재의 변형모양이 초기형상으로부터 선형보간의 과정을 거쳤다는 가정하에 진변형률을 근사적으로 구하였다.

비압축성 성질과 경계조건을 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta u_{i,i} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta u_n = \Delta \bar{u}_n \text{ on } \Gamma_c \quad (4)$$

$$\sigma_t = -\mu \sigma_n \text{sign}(\Delta u_t - \Delta \bar{u}_t)$$

$$\text{또는 } \Delta u_t = 0 \text{ on } \Gamma_c \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \text{ on } \Gamma_i \quad (6)$$

여기서, 하첨자 n 과 t 는 각각 법선성분과 접선성분을 의미한다. $\Delta \bar{u}_n$ 은 증분에 해당하는 값으로 사용자가 입력해야 할 값이다. 이 값은 매 반복계산마다 방진고무의 하중이 가해지는 부분이 증분량만큼 하강하는 결과로 나타난다. Γ_c 의 경계에서 인장응력이 작용하면, 자동적으로 접촉이 분리된다.

전술한 경계치 문제의 약형(weak form)은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \sigma'_{ij} \omega'_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} p \omega_n d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u_{i,j} q d\Omega - \int_{\Gamma_c} \sigma_t \omega_t d\Gamma = 0 \quad (10)$$

여기서, ω_i 와 q 는 가중함수(weighting function)이고, $\omega_{ij} = (\omega_{i,j} + \omega_{j,i})/2$ 로 정의된다. 그리고 텐서량에 프라임 부호(')가 붙은 것은 편차텐서량을 의미한다. 이 약형은 라그랑지변수법(Lagrange's multiplier method)에 의거하여 비압축성 조건을 포함하고 있는 형태이다. 라그랑지변수는 정수압의 부(negative)를 의미한다. 자세한 유한요소방정식의 유도는 참고문헌으로 대신한다.⁽⁶⁾

4. 고무의 인장시험

본 연구에서 제안한 해석방법이 필요로 하는 소재에 관한 정보는 유효응력-유효변형률 관계곡선이 다. 이 곡선은 인장시험으로부터 구할 수 있다. 인장시험의 결과는 공칭응력-공칭변형률 관계곡선이므로, 해석에 필요한 진응력-진변형률 곡선으로 바꾸어 주어야 한다.

본 연구에서 사용된 소재인 EPDM 고무와 NR 고무를 응력-변형률 관계곡선을 Fig. 3에 도시하였다. EPDM 고무와 NR 고무 모두 쌍곡률(double curvature)을 갖는 응력-변형률 관계특성을 보이고 있으며, EPDM 고무를 더욱 뚜렷하다. 유효변형률이 약 0.25일 때 곡률의 변화가 생기게 되는데, 이 부분에서 응력-변형률의 기울기가 최소가 됨을 의미한다. 실제 방진고무의 경우 하중이 작용하는

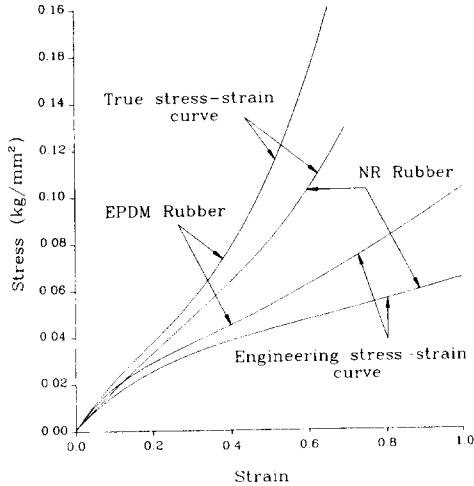


Fig. 3 Stress-strain curve

부위에서의 변형률이 이 부근에 있으므로 설계시 이 점을 충분히 감안하여야 할 것이다. 이러한 점을 잘 활용하면, 방진고무의 성능을 향상시킬 수 있으나, 그렇지 못한 경우에는 좌굴을 비롯한 구조적 불안정을 유발할 수도 있다.

Fig. 3의 응력-변형률 관계곡선은 비교적 높은 비선형성을 보이고 있다. 실제 방진고무의 경우, 정적하중 상태에서 최대변형률이 0.2 이상이 되는 경우가 대부분이므로 비선형해석은 불가피하다고 판단된다.

5. 해석결과와 실험결과의 비교

제안된 방법의 타당성을 검증하기 위하여, 두 가지의 예제에 대한 실험결과와 예측결과를 비교하였다. 선형등계수 사각형요소가 사용되었으며, Fig. 4는 실험방법을 개념적으로 보여 주고 있다. 사용된 고무의 재료는 모두 EPDM 고무이며, 기계적 성질은 Fig. 3에서 보는 바와 같다.

Fig. 5는 첫 번째 예제에 대한 실험결과와 해석결과를 비교하고 있다. 예측결과는 실험결과와 잘 일치하고 있다. 특히, 정적하중이 가해지고 있는 3~4 kg 주위에서 결과의 정확도가 높게 나타났다. 그러나 하중이 증가하면 예측결과와 실험결과는 다소의 차이를 발생하였는데 이는 좌굴현상에 그 원인이 있다. Fig. 6은 방진고무의 변형형상을 나타내고 있다.

두 번째의 적용 예제에 관한 변형형상을 Fig. 7

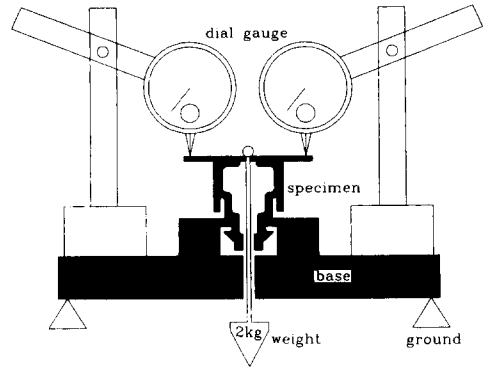


Fig. 4 Experimental apparatus

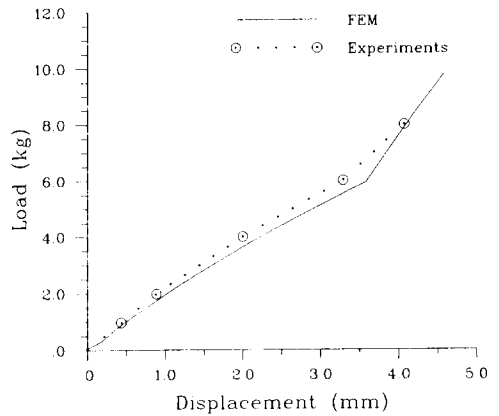


Fig. 5 Comparison of the predicted result with the experimental one of the first example

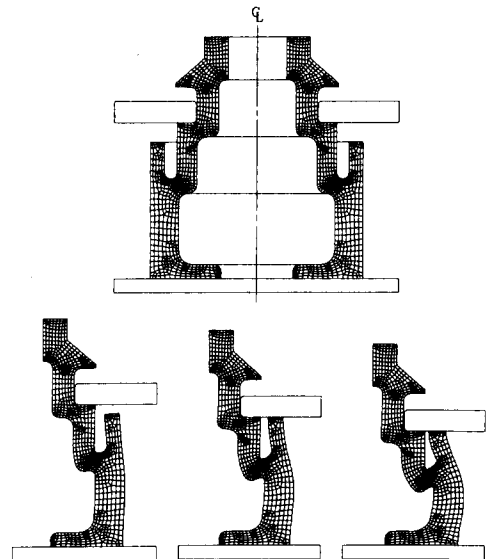


Fig. 6 Deformed shape of the first example, predicted

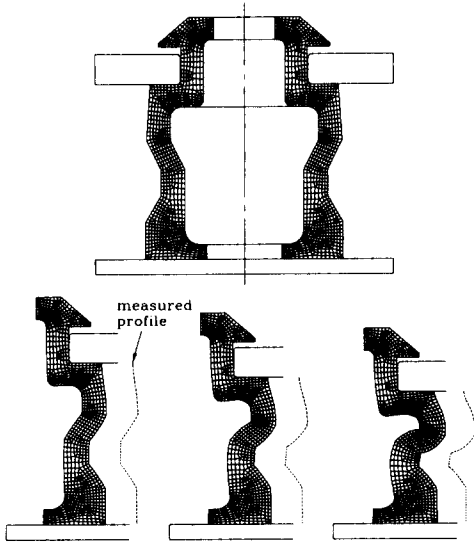


Fig. 7 Deformed shape of the second example, predicted and measured

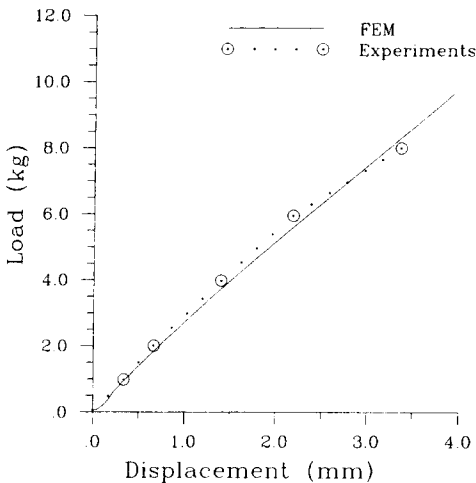


Fig. 8 Comparison of the predicted result with the experimental one of the second example

에 도시하였다. 그림에서 점선은 제품의 변형형상을 측정된 결과이다. 고무제품이 일반적으로 비교적 큰 공차를 허용한다는 점을 감안할 때, 그림에서의 예측된 외관형상과 실측된 외관형상은 사실상 일치하고 있다고 할 수 있다. Fig. 8의 하중 비교 결과도 예측결과와 시험결과의 유사성을 보여주고 있다. Fig. 9는 정수압 및 응력분포를 나타내고 있다. 응력분포에서 양의 정수압이 작용하거나 인장 응력이 작용하면 주위분위기에 의한 조직퇴화가 가

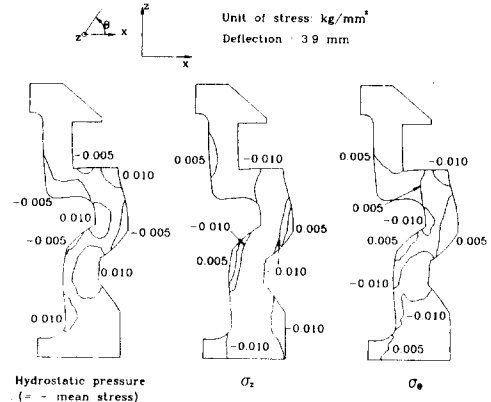


Fig. 9 Stress distributions

속되므로 설계시 고려해야할 주요 내용중에 하나이다.

6. 결 론

본 연구에서는 방진고무의 단순 유한요소해석법이 제안되었다. 대변형 이론은 매우 복잡하고, 실제 적용하는데도 어려움과 상당한 노력이 요구된다. 고무의 기계적 성질이 화학적 조성에 민감하게 영향을 받기 때문에 이론에서 요구하는 재료상수들을 자료 또는 문헌에서 얻기가 매우 어려우며, 직접 얻기 위해서는 특수한 방법으로 정교한 재료시험을 실시해야 한다. 따라서 기존 이론의 공학적 사용은 일부에 한정되어 있다. 이러한 문제 인식을 바탕으로 단순 유한요소법과 관련 프로그램을 개발하였다. 단순 유한요소법은 대부분의 방진고무가 큰 변형을 허용하지 않는다는 점과 변형형태의 근사적 예측이 가능하다는 점에 기초하고 있다.

실제의 방진고무를 대상으로 실시한 실험결과와 해석결과가 정성적 및 정량적으로 매우 잘 일치하였다. 그리고 공정적용과정에서 설계정보의 추출에 효과적으로 활용될 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Scharnhorst, T. and Pian, T. H. H., 1978, "Finite Element Analysis of Rubberlike Materials by a Mixed Model," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 12 pp. 665~676.
- (2) Shin, S. J., Lee, T. S. and OH, S. I., 1995,

- "Finite Element Modeling of Pad Deformation in Rubber Pad Forming (I)," *Proc. KSME Spring Annual Meeting '95*, pp. 331~336.
- (3) James, A. G., Green, A. and Simpson, G. M., 1975, "Strain Energy Function of Rubber I. Characterization of Gum Vulcanizates," *J. Appl. Poly. Sci.*, Vol. 19, pp. 2033~2058.
- (4) Haines, D. W. and Wilson, W. D., 1979, "Strain Energy Function for Rubber-Like Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 345~360.
- (5) 전만수, 문호근, 1994, "냉장고 방진고무 형상 최적설계를 위한 유한요소 프로그램의 개발," LG전자 보고서, 8.
- (6) Hwang, S. M. and Joun, M. S., 1992, "Analysis of Hot-Strip Rolling by a Penalty Rigid-Viscoplastic Finite Element Method," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 34, pp. 971~984.