

<논 문>

Karhunen-Loève 변환을 이용한 Forcing 제트의 동적 특성 해석

이 찬 회* · 이 상 환**

(1996년 11월 26일 접수)

Dynamic Characteristics Analysis of Forcing Jet by Karhunen-Loève Transformation

C. H. Lee and S. H. Lee

Key Words : Turbulent Forcing Jet(난류 가진 제트), Coherent Structure(응집구조), Karhunen-Loève Transformation(Karhunen-Loève 변환), Discrete Vortex Method(이산화 와류 방법), Vortex Element(와류 요소), Source Element(용출 요소), Direct Method(직접 방법), Snapshot Method(축사 방법), Vortex Pairing(와류 합체)

Abstract

The snapshot method is introduced to approximate the coherent structures of planar forcing jet flow. The numerical simulation of flow field is simulated by discrete vortex method. With snapshot method we could treat the data efficiently and approximate coherent structures in the planer jet flow. By forcing the jet at a sufficient amplitude and at a well-chosen frequency, the paring can be controlled in the region of the jet. Finally we expressed the underlying coherent structures of planar jet flow in the minimum number of modes by Karhunen-Loève transformation in order to understand jet flow and to make the information storage and management in computers easier.

1. 서 론

본 연구에서 고려하고자 하는 제트유동 현상은 연소공학, 항공공학 그리고 많은 에너지 관련 기기 등의 소음 저감을 위한 분야의 보다 효율적인 제어와 유동 자체에 대한 폭 넓은 이해를 위하여 지난 수 십년 동안 실험적이나 이론적인 분야에서 활발히 연구가 진행되고 있다. 특히 유동의 불안정성으

로 인하여 발생하는 와류의 운동에 대하여 많은 관심을 가지고 와류의 동특성을 이해하기 위하여 연구되어 왔다. 근래에 들어서는 단순한 유동현상의 이해 단계를 넘어 유동현상을 지배하는 매개변수를 찾아내어 유동장을 보다 적극적으로 제어하는 방향으로 연구가 활발히 진행되고 있다.

많은 실험적인 분석과 유동 가시화를 통한 결과는 평면 난류 혼합층과 제트 유동 현상 내에도 상당히 조직화된 구조가 존재하고 있다는 사실을 보여주고 있다. 이러한 조직화된 구조는 난류 유동의 특성을 지배하는 중요한 인자로서 고려되어지고 있으며 유동의 초기조건이나 경계조건에 의하여 상당

*회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

**회원, 한양대학교 기계공학부

히 민감한 영향을 받게 된다는 사실은 여러 연구 결과를 통하여 확인할 수 있다.

Brown과 Roshko⁽¹⁾는 두유동의 혼합층의 연구에서는 이러한 응집구조들의 강한 구조화를 연구하였으며, Crow와 Champagne⁽²⁾은 원형 제트의 유동에 주기적인 음향 가진력을 이용하여 가진에 의한 제트 유동에 대한 구조와 제트 유동의 성장 양상을 연구하였다. 또한 Reynolds와 Bouchard⁽³⁾는 실험적인 방법에 의하여 Strouhal 수의 변화에 따른 와류합체현상의 변화 양상을 관찰하여 와류운동을 활성화시키고 억제하는 Strouhal 수의 정량적인 범위를 제시하였으며, Strouhal 수의 변화와 와류합체현상과 관계를 규명하였다. 이찬희, 이상환⁽⁴⁾은 Karhunen-Loève 전개를 이용하여 평면제트 유동 내에 내재되어 있는 응집구조를 도출하였다.

최근 들어 몇몇의 학자들은 응집구조의 개념과 동역학 시스템 이론을 연계시켜 비록 난류 유동 자체가 랜덤한 운동으로 보일지 모르나 그 내부에는 그러한 유동 양상을 지배하는 저 차수의 결정론적인 동역학계가 존재한다는 가능성을 염두에 두고 이론을 전개해 나가고 있다. 그들이 도출해낸 일반적인 결론은 원칙적으로 난류 유동 현상의 동역학적 처리에 대한 가능성을 확인한 것이다.

이것은 최근 급격히 발전하고 있는 혼돈(chaos) 이론의 한 결과인 Navier-Stokes 방정식과 같은 소산계의 위상 공간상의 해들이 저차원의 manifold로 끌려 들어간다는 사실에 비추어 볼 때 상당히 의미 있는 것이라 할 수 있다. 이러한 사실은 임의의 매개변수에 따른 끌개(attractor)의 양상을 판단하고 이를 이용하여 차원을 추정할 수 있다는 것은 유동 현상의 원인을 규명하고 또한 나아가서 유동 현상을 제어 할 수 있다는 보다 포괄적인 의미를 가지기 때문에 중요한 의미를 갖는다.

이러한 맥락에서 본 연구에서는 우선 이산화와류 방법을 이용하여 가진력에 따른 와류의 동적특성을 파악하기 위하여 제트출구부분에서 일정하게 분포되는 속도성분에 대하여 10~50%의 가진력에 따른 와류의 동적특성을 해석하는 평면 제트 유동의 수치모사를 수행한다. 이러한 수치해석의 결과를 기반으로, Karhunen-Loève 전개로부터 구한 적교 고유함수가 가장 빠른 속도로 수렴하는 최적의 기저함수가 된다는 사실을 이용하여 Navier-Stokes 방정식으로부터 저 차수의 동역학계를 도

출하기 위하여 평균제곱오차의 측면에서 가장 최적한 기저함수를 정의하고자 한다. 또한 도출된 응집구조와 가진력과의 관계를 규명하고, 나아가서 다른 여타의 변환과는 달리 임의의 유동장에 대하여 원래의 유동형태를 소수의 기저함수로 효과적으로 복원할 수 있다는 것을 확인하는데 연구의 최종목적이 있다.

2. 이론적 배경

본 연구는 가진 제트 유동장의 동적 특성을 해석하기 위한 전초적인 단계로 제트유동장에 내재되어 있는 응집구조를 도출하기 위하여 Karhunen-Loève전개를 사용하기로 한다. 또한 제트유동장의 해석을 위해서 이산화와류방법(Discrete Vortex Method)을 이용하기로 한다.

2.1 지배 방정식

이산화와류방법해석은 높은 Reynolds 수를 갖는 유동을 대상으로 하고, 포텐셜유동을 기본으로 하고 있기 때문에 속도포텐셜 ϕ 는 식 (1)의 Laplace 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

속도장 \vec{u} 는 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (2)$$

이산화와류방법에서의 와류는 식 (3)과 같은 와도 수송(vorticity transport) 방정식의 지배를 받는다.

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (3)$$

본 연구에서 해석하는 제트 유동은 2차원 평면 제트유동으로 가정하였으므로 다음의 2차원 비압축성 와도수송방정식을 사용한다. 이 때 와도는 스칼라량이고, 방정식은 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \omega \quad (4)$$

이 방정식은 식 (5)와 식 (6)과 같이 각 시간스텝마다 대류항과 확산항의 두 단계로 분리되어 해석되어 진다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (6)$$

이산화와류방법에서는 유동을 지배하는 방정식인 식 (5)이나 식 (6)과 같은 미분방정식을 주어진 조건(경계조건이나 초기조건) 아래에서 그대로 해석하는 대신에, 경계면상의 적분으로 이루어지는 경계적분방정식으로 변환하여 계를 해석하게 된다. 다시 말해서, 이산화와류방법에서 선정한 특이요소 에 대한 포텐셜 유동장의 기본해를 도입함으로써, 그 기본해가 갖는 성질을 유효하게 이용할 수 있다는 것이다. 그러므로 식 (5)와 같이 표현되는 와류 운동에 대한 대류항을 모델화하기 위해서 자유와류 (free vortex)를 도입하고, 이러한 자유와류들의 시간적 이동을 통하여 대류항을 표현한다. 또한 식 (6)과 같이 표현되는 와류 운동에 대한 확산항을 모델화하기 위해서 점성와류구조를 도입하여 와류 운동에 대한 확산항을 표현하게 된다.^(5,6) 이러한 방정식에 대류항과 확산항에 대한 모델을 각각 제 2.3.4절과 제2.3.5절에 설명하여 놓았다.

2.2 요소의 설정 및 경계조건

수치해석의 특성상 격자를 생성할 필요는 없으나, 경계조건을 부여하기 위한 요소를 분포시킬 요소점 (element point)을 결정해야 한다. 고체경계면을 구현하기 위해서는 와류요소 (vortex element)를 분포시켰고, 제트출구에서의 경계조건을 나타내기 위해서는 용출요소 (source element)를 분포시켰다. 사용한 요소에 대한 분포양상을 Fig. 1에 나타내었으며, Fig. 2에는 요소들간의 기본규약을 도식적으로 나타내었다. 또한, 유동장에 대한 가시화에 필요한 속도장 해석에 대한 계산 영역 및 격자계와 Karhunen-Loève 해석에 필요한 속도 성분을 추출할 Karhunen-Loève 창(K-L window)을 Fig. 3에 표시하여 놓았다.

요소의 설정 고체경계면과 제트 출구에서의 출구 조건을 부여하기 위해서는 적절한 요소를 설정해야 하며, Fig. 1은 이러한 요소들의 분포양상을 나타내고 있다. 기하학적인 형상의 구현에 필요한 자료점 (data point, ●), 특이요소들이 분포될 요소점 (element point, ■), 모든 속도의 계산에 필요한 검사점 (collocation point, ○), 그리고 경계조건 구현에 필요한 단위벡터 (unit vector, →) 등, 하나

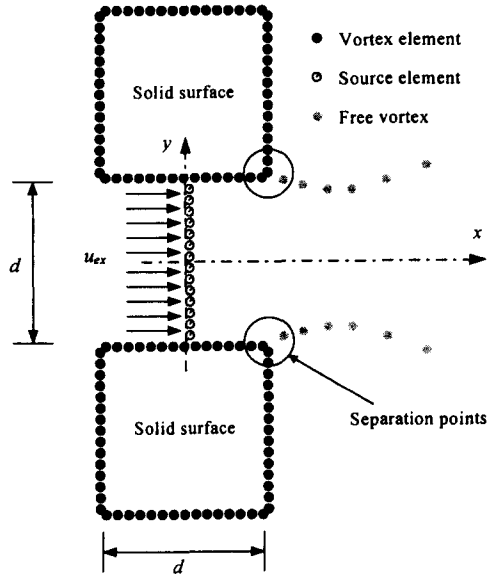


Fig. 1 Discretization of flow field and distribution of elements

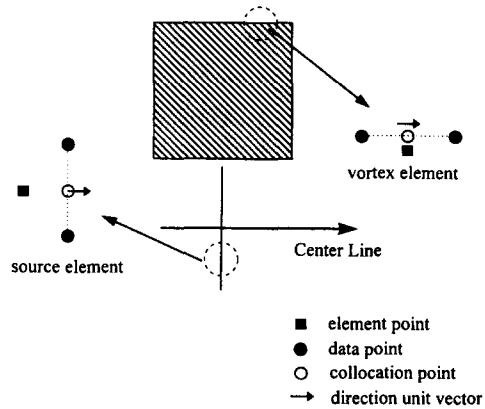


Fig. 2 Fundamental convention for vortex and source elements

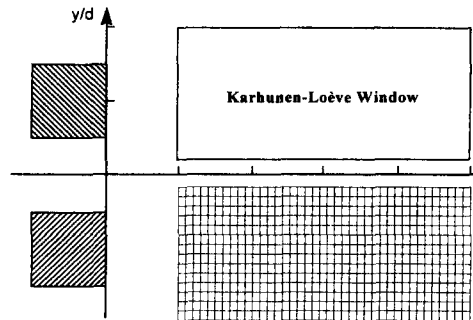


Fig. 3 Karhunen-Loève window and its grid system

의 요소에 대한 몇 가지 규약을 Fig. 2에 도시하여 놓았다. 와류요소에는 접선조건(tangential condition)을 부여하였으며, 검사점과 요소점의 위치는 동일하다. 용출요소에는 법선조건(normal condition)을 부여하였으며, 요소점의 위치는 단위벡터를 기준으로 요소길이의 절반만큼 뒤쪽에 놓여있다. 또한 각각의 요소들은 요소점을 따라 요소의 수만큼 등간격으로 분포되어 있다.

고체 벽면 물체 경계 면에서의 유동과 물체 경계면 사이의 상대속도의 접선 성분이 0이 된다는 조건으로부터 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\boldsymbol{t} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_0) = 0 \quad (7)$$

여기서 \boldsymbol{t} 는 고체경계면에 접하는 접선벡터를 나타내고, \vec{u}_0 는 고체 경계면의 속도를 나타낸다.

무한 경계면. 무한경계면에서는 물체로 인한 속도의 섭동(disturbance)성분이 0이 된다는 조건을 갖는다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{u} = 0 \quad (8)$$

노즐 출구조건 노즐출구에 대한 경계조건을 구현하기 위해서는 노즐출구에 일정한 주기와 진폭의 용출요소가 분포되어, 제트의 초기영역에서 가진의 역할을 한다는 식 (9)와 같은 주기적인 가진조건을 부여하였다.

$$\sigma_{ex} = \sigma_0 (1 + \sigma_{fl} \sin 2\pi ft) \quad (9)$$

여기서 σ_0 는 노즐 출구에서 분포되는 일정한 값의 속도이고, σ_{fl} 은 $0 < \sigma_{fl} < 1$ 의 범위를 갖는 변수로서 σ_0 에 대한 변동량의 비를 나타낸다. 또한 f 는 용출요소로 구현된 가진주파수를 나타낸다.

시간 주기적인 가진력에 대한 파라미터인 주파수를 나타내기 위해서는 식 (10)과 같이 정의되는 무차원화된 주파수인 Strouhal 수를 도입하기로 한다.

$$St = \frac{fd}{\sigma_0} \quad (10)$$

여기서 d 는 제트 출구의 폭을 나타낸다.

대칭조건 전체 영역에 대한 와류의 운동을 해석하기 위해서는 많은 계산시간이 필요하므로, 제트 출

구에서의 가진력과 제트의 유동장의 물리적 특성이 대칭이라는 점에 착안하여 제트 출구의 하부에서의 자유와류의 강도와 유기속도는 제트 출구의 상부에서의 값과 동일하다는 대칭조건을 부여하였다.

2.3 유동장 수치해석

식 (9)에서 주어진 노즐 출구 조건을 가지는 평면 가진 제트 유동의 수치모사는 이산화와류방법(Discrete Vortex Method)을 이용하였다. 이용되는 요소로서, 고체 경계면에는 와류를 그리고 제트 출구 부분에는 용출요소를 각각 분포 시켰으며, 고체 경계면에서의 요소의 수는 상하에 각 변마다 15개씩 총 120개를 분포 시켰으며, 출구 부분에 대해서는 15개의 용출요소를 분포 시켰다. 전반적인 수치해석 절차는 용출에 대한 포텐셜해석과 와류에 대한 포텐셜해석을 번갈아 가면서 수행해 나간다.

2.3.1 가진 제트의 고체 경계면 해석

제트 유동에 대한 기하학적인 형상을 구현하기 위하여 상부와 하부에 고체 경계면을 두고, 각각 $N_{bv}/2$ 개의 요소점상에 와류를 분포 시켰다. 임의의 m 검사점에서 식 (7)의 경계조건을 만족하도록 하면 다음과 같은 N_{bv} 개의 선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{N_{bv}} K^{mn} \Gamma^n + (U_\infty, V_\infty) \cdot \boldsymbol{t}_m = 0, \quad m=1, 2, \dots, N_{bv} \quad (11)$$

여기서, (U_∞, V_∞) 는 외부 유동 속도장(far field velocity field), \boldsymbol{t}_m 은 고체 경계면 상의 m 번째 표면 요소의 단위접선벡터, K^{mn} 은 고체 경계면 상에서 n 번째 와류요소가 m 번째 검사점에 미치는 영향계수이다.

영향계수 K^{mn} 은 고체 경계면의 기하학적 형상을 나타내는 것으로서 식 (12)와 같이 정의된다.

$$K^{mn} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n, -x_m + x_n) \cdot \boldsymbol{t}_m}{r_{mn}^2} \right] \quad (12)$$

위의 나타난 N_{bv} 개의 선형 방정식을 행렬의 형태로 나타내면 식 (13)과 같다.

$$[K]\{\Gamma\} = \{rhs\} \quad (13)$$

여기서 우변 항은 외부 유동 속도, 자유와류(free vortex), 그리고 용출요소에 의한 영향을 나타내는 항으로 다음과 같이 표현되며, 이 우변 항

에 의하여 고체 경계면에 분포된 요소들의 강도가 변화하게 된다.

$$\begin{aligned} rhs^m = & -(U_\infty, V_\infty) \cdot \vec{t}_m \\ & - \sum_{j=1}^{N_{uv}} \Gamma_{wv}^j [1 + (U_{wv}^{mj}, V_{wv}^{mj}) \cdot \vec{t}_m] \\ & - \sum_{k=1}^{N_{bs}} \sigma^k (U_{bs}^{mk}, V_{bs}^{mk}) \cdot \vec{t}_m \end{aligned}$$

이와 같이 고체경계면을 구현하기 위하여 고체 표면상에 와류나 용출 등의 요소를 분포시키고, 외부의 유동 조건에 의해 변동하게 되는 고체 표면에서의 요소의 강도 결정하는 절차를 Martensen 해석이라 한다.

2.3.2 제트출구해석

제트 출구 부분의 기하학적 형상을 구현하고 노즐 출구 조건을 만족하도록 하기 위하여 N_{bs} 개의 용출요소를 요소점상에 분포시킨다. 임의의 m 검사점에서 노즐 출구 조건 식 (9)를 만족하도록 하면 다음과 같은 N_{bs} 개의 선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{N_{bs}} S^{mn} \sigma^n + (U_\infty, V_\infty) \cdot \vec{n}_m = \sigma_{ex}, \quad m=1, 2, \dots, N_{bs} \quad (14)$$

여기서, σ_{ex} 는 제트 출구에서의 유출속도, \vec{n}_m 은 용출요소에 대한 m 번째 표면 요소의 단위법선벡터이며, S^{mn} 는 n 번째 용출요소가 m 번째 검사점에 미치는 영향계수이다.

노즐의 출구는 고체 경계면과는 달리 용출요소의 분포에 의해서 구현되었기 때문에 영향계수는 식 (15)와 같이 정의된다.

$$S^{mn} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(x_m - x_n, y_m - y_n) \cdot \vec{n}_m}{r_{mn}^2} \right] \quad (15)$$

위에 나타난 N_{bs} 개의 선형 방정식을 행렬의 형태로 나타내면 식 (16)과 같다.

$$[S]\{\sigma\} = \{rhs\} \quad (16)$$

여기서 우변항은 표면에 분포된 와류와 자유와류에 의한 영향을 나타내는 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} rhs^m = & \sigma^m - \sum_{j=1}^{N_{bv}} \Gamma_{bv}^j [(U_{bv}^{mj}, V_{bv}^{mj}) \cdot \vec{n}_m] \\ & - \sum_{k=1}^{N_{wv}} \Gamma_{wv}^k (U_{wv}^{mk}, V_{wv}^{mk}) \cdot \vec{n}_m \end{aligned}$$

2.3.3 유동박리

유동박리는 경계층의 박리나 제트유동과 같이 와류요소가 물체로부터 연속적으로 유동 중에 방출되어, 속도 전단층이 시간적으로 연속하여 하류로 흘러감에 따라 어떻게 변형하고 모여서 서로의 상호작용에 의해 와류 덩어리를 형성하는가 등을 해석하는 경우에 적용된다.

유동박리를 해석하기 위해서는 물체 표면에서 미끄러짐이 없다는 조건을 만족하도록 와류를 박리시켜주어야 한다. 이 때 가장 중요한 사항은 박리된 와류의 박리위치와 강도를 결정하는 것이다. 이러한 유동의 박리는 원칙적으로 물체의 표면상에 존재하는 모든 분할요소에서 박리 시켜야 하는데, 이러한 해석방법은 과도한 시간과 기억장소를 요구하게 된다. 그러나 본 연구에서 고려하는 제트유동의 경우는 박리점의 위치를 노즐의 출구부분으로 결정해도 물리적으로 타당한 것이라 생각하여 노즐의 출구 상하면에서 와류를 박리 시키는 방법을 채택하였다.

이상과 같은 유동박리 해석을 수행하기 위해서는 노즐의 출구 상하면에서 임의의 크기를 갖는 와류를 박리 시키며, 전체의 유동장에 대해서는 식 (17)과 같은 순환보존의 법칙을 만족하여야 한다.

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = 0 \quad (17)$$

임의의 순간에 순환보존법칙을 적용하면 식 (18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_{bv}(t) + \Gamma_{wv}(t) = 0 \quad (18)$$

여기서 $\Gamma_{bv}(t)$ 는 고체 경계면상의 와류의 세기의 합을 나타내며, $\Gamma_{wv}(t)$ 는 박리 되어 유동장에 분포된 자유와류의 세기의 합을 나타낸다.

본 연구에서 고려하는 제트유동과 같이 날카로운

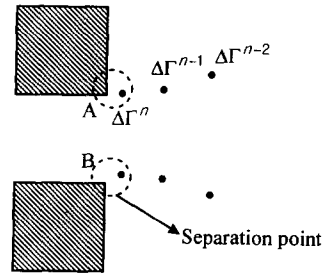


Fig. 4 Progressive shedding of discrete vortex at A, B

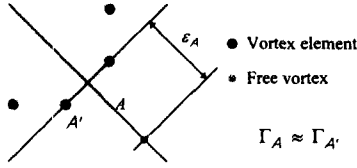


Fig. 5 Enlarged view on A

모서리가 존재하는 유동에 대해서는 노즐출구 상하 면에서 박리되는 와류의 강도 $\Delta\Gamma$ 는 식 (19)와 같이 간단히 경계층의 속도의 함수로 결정되어지며, 박리되는 위치 ε 은 식 (20)과 같이 결정된다.⁽⁷⁾ 이러한 박리의 위치와 강도에 관한 도식적인 관계를 Fig. 4와 Fig. 5에 나타내었다.

$$\Delta\Gamma_A = \frac{1}{2}\Gamma_A^2 \Delta t \quad (19)$$

$$\Delta\Gamma_B = \frac{1}{2}\Gamma_B^2 \Delta t$$

$$\varepsilon_A = \frac{1}{4}\Gamma_{A1} \Delta t \quad (20)$$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{4}\Gamma_{B1} \Delta t$$

2.3.4 와류요소의 시간적 이동

식 (19)에서와 같이 노즐 출구의 상하에서 발생 되는 와류의 강도는 전단층의 경계면에서의 속도의 함수로 결정되며,⁽⁸⁾ 노즐의 출구 상하에서 박리된 각각의 와류는 표면에 분포된 와류 Γ_{bv} 와 주위에 박리된 와류 Γ_{wv} , 그리고 제트의 출구 부분에 분포시킨 용출 σ 에 의해 유기된 속도 성분을 갖고 하류로 대류 된다. 이러한 와류요소의 시간적인 이동관계를 Lagrange적인 표현으로 나타내면 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_m(t + \Delta t) = x_m(t) + u_m \Delta t \quad (21)$$

$$y_m(t + \Delta t) = y_m(t) + v_m \Delta t$$

이때의 대류 속도 (u_m , v_m)은 식 (22)에 표현된 것과 같이 3종류의 유기속도의 합으로 나타낸다.

$$u_m = \sum_{n=1, n \neq m}^{N_{wv}} U_{wv}^{mn} + \sum_{n=1}^{N_{bv}} U_{bv}^{mn} + \sum_{n=1}^{N_{bs}} U_{bs}^{mn}$$

$$v_m = \sum_{n=1, n \neq m}^{N_{wv}} V_{wv}^{mn} + \sum_{n=1}^{N_{bv}} V_{bv}^{mn} + \sum_{n=1}^{N_{bs}} V_{bs}^{mn} \quad (22)$$

여기서, (U_{wv}^{mn} , V_{wv}^{mn})는 n 점에 존재하는 자유와류에 의해 유기되는 m 점에서의 속도성분이며, (U_{bv}^{mn} , V_{bv}^{mn})는 그체 경계면 상에서 n 점에 존재하는 와류

에 의해 유도되는 m 점에서의 속도성분으로 각각 식 (23)과 식 (24)와 같이 Biot-Savart의 법칙⁽⁹⁾에 의해 정의된다.

$$(U_{wv}^{mn}, V_{wv}^{mn}) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n, -x_m + x_n)}{r_{mn}^2} \right] \quad (23)$$

$$(U_{bv}^{mn}, V_{bv}^{mn}) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n, -x_m + x_n)}{r_{mn}^2} \right] \quad (24)$$

또한, (U_{bs}^{mn} , V_{bs}^{mn})는 분포된 용출요소 상에서 n 점에 존재하는 용출요소에 의해 유기되는 m 점에서의 속도성분으로 식 (25)와 같이 정의된다.

$$(U_{bs}^{mn}, V_{bs}^{mn}) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(x_m - x_n, -y_m + y_n)}{r_{mn}^2} \right] \quad (25)$$

2.3.5 와류 운동의 적정화와 와도확산의 모델화

연속적인 와류의 분포를 모델화 한, 이산화 되어진 자유와류의 움직임이 본래의 속도전단층의 운동을 어느 정도 정확히 나타내고 있는지를 살펴보는 것은 유동해석에 있어서 중요한 요소 중의 하나이다. 일반적으로 자유와류들의 요소들이 지나치게 접근하면 비현실적으로 큰 유기속도가 나타나게 된다. 이와 같은 비현실적인 속도발생을 억제하는 방법으로 코어함수를 도입하기로 한다. 이러한 코어함수는 자유와류에 반경 r_{cj} 의 핵(core)을 갖게 하여 중심부근의 속도에 대하여 선형적인 점성효과를 고려해 넣음으로써, 와류 중심으로부터 반경 r 의 위치에서 유기속도의 원주방향의 성분을 식 (26)과 같이 정의한다.

$$v_\theta = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi r} ; r \geq r_{cj} \quad (26)$$

$$v_\theta = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi r_{cj}} ; r < r_{cj}$$

이상과 같은 코어함수의 핵의 반경과 유기속도의 관계를 Fig. 6과 Fig. 7에 도시하여 놓았다.

(U_{wv}^{mn} , V_{wv}^{mn})는 n 점에 존재하는 자유와류에 의해 유기되는 m 점에서의 속도성분으로 코어함수를 적용하면 식 (23)은 식 (27)과 같이 수정되어 정의 되어진다.

$$(U_{wv}^{mn}, V_{wv}^{mn}) = (U_{wv}^{mn}, V_{wv}^{mn}) \chi(r_{mn}) \quad (27)$$

여기서 $r_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ 이다.

식 (27)에서 함수 $\chi(r)$ 는 포텐셜해석으로 인하

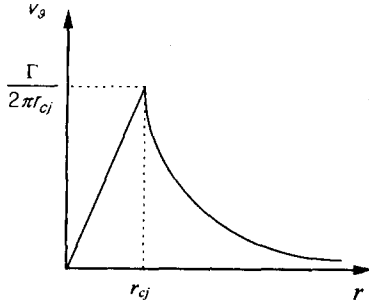


Fig. 6 Radial variation of the tangential velocity component induced by a vortex core model

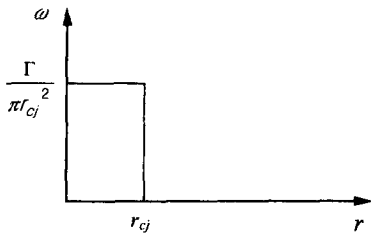


Fig. 7 Structure of vortex core model

여 발생하는 과도한 와류 속도성분을 감소시키기 위한, 시간의 경과에 따른 와류 코어의 성장을 이용하여 공간적인 확산효과가 아닌 시간의 진행에 따른 와류강도의 감소를 이용한 점성효과를 고려하기 위한 코어함수를 도입한 것이다.⁽¹⁰⁾ 여기서 코어함수 $x(r)$ 는 단일 선형 점성와류에 대한 Navier-Stokes방정식의 엄밀해를 이용한 모델방정식으로 초기의 코어 반경이 r_{c0} 일 때, 자유와류가 도입된 후의 성장시간(growth age) Δt_i 의 항으로 식 (28)과 같이 나타낸다.⁽⁵⁾

$$x(r) = 1 - \exp\left[-1.25643\left(\frac{r}{r_{c1}}\right)^2\right] \quad (28)$$

여기서 $r_{c1} = r_{c0} + 3.17\sqrt{\frac{\Delta t_i}{Re}}$ 이며, Re 는 노즐출구에서의 폭과 속도를 기준으로 결정한 Reynolds 수이다.

3. Karhunen-Loève 변환

차분화된 시간계 해석에 있어서 직교 기저함수의 선형조합으로서 신호를 전개하는 것은 아주 유용한 수학적 기법 중의 하나이다. 이와 같은 전개는 신호 내에 존재하는 구조를 도출하는데 아주 유용

하며 효과적인 방법이다. 가장 일반적인 직교함수 전개는 삼각함수를 이용한 Fourier전개이다. 이러한 Fourier전개는 신호의 성질이 주기적이거나 이에 준하는 신호에 대해서는 아주 만족할 만한 결과를 얻을 수 있고, 사실 많은 공학적인 문제들이 주기적이거나 이에 준하는 물리적인 결과를 보이기 때문에 많이 응용되어 왔다. 그러나 Fourier전개의 한계는 기저함수의 존재를 미리 정의한다는 데 있다. 만일 자료의 성격이 주기적이지 못한 경우에 있어서는 그 결과 역시 만족스럽지 못할 것이라는 것은 명백한 일이다. 어느 정도의 불규칙성은 많은 항의 Fourier전개항으로서 구현할 수 있지만, 자료의 크기가 아주 클 경우, 신호를 이러한 많은 Fourier전개항으로 표시하는 것은 아주 불합리한 것이다. 이러한 의미에서 Fourier전개와 Karhunen-Loève전개가 보이는 가장 큰 차이점은 직교기저함수가 미리 정의되어 있느냐 아니냐 하는 것이다.

Karhunen-Loève전개는 기저함수를 자료의 집합으로부터 도출하는 고유함수를 기저함수로 하기 때문에 소수의 항으로도 자료를 충분히 구현할 수 있으며, 자료의 성격에 상관없이 이용할 수 있다는 아주 강력한 장점을 가지고 있다.

Karhunen-Loève전개의 이론과 응용은 불연속 신호처리와 관련된 많은 교재에 언급되어 있으며, 그 이론적 배경 및 그 수치해석에 관하여 살펴보면 다음과 같다.

3.1 이론⁽¹¹⁾

M 개의 랜덤 벡터가 식 (29)와 같이 주어진다.

$$\{|\tilde{x}^{(m)}\rangle\}, m \in [1, M] \quad (29)$$

여기서 M 은 비상관관계에 있는 양상블[snapshot]의 수를 나타내며, 본 연구에서는 200개의 양상블을 취하였다.

각각의 랜덤 벡터의 집합은 N 개의 요소를 가지며, 각각의 벡터는 기저함수의 집합 $\{|\tilde{\phi}_b\rangle\}$ 의 항으로 전개될 수 있다고 가정한다.

$$|\tilde{x}^{(m)}\rangle = \sum_{b=1}^M v_b^{(m)} |\tilde{\phi}_b\rangle \quad (30)$$

여기서 기저함수는 식 (31)과 같은 직교성을 만족하여야 한다. (orthogonality)

$$\langle \tilde{\phi}_i | \tilde{\phi}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \quad (31)$$

이상은 직교 기저함수의 항을 이용한 일반적인 전개방법과 동일하다. 그러나 Karhunen-Loève 변환은 Hilbert공간 내에서 식 (30)에 있는 계수들간의 직교성의 부가적인 조건을 만족하여야 한다. (orthonormality)

$$\langle \tilde{v}_i | \tilde{v}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \quad (32)$$

전개계수는 식 (33)과 같이 직접적으로 정의될 수 있다.

$$\langle \tilde{\phi}_i | \tilde{x}^{(m)} \rangle = \sum_{b=1}^M v_i^{(m)} \langle \tilde{\phi}_i | \tilde{\phi}_b \rangle = \lambda_i v_i^{(m)} \quad (33)$$

$$v_i^{(m)} = \frac{\langle \tilde{\phi}_i | \tilde{x}_m \rangle}{\lambda_i}$$

위와 같이 정의되는 식 (33)를 순방향 Karhunen-Loève 변환이라 하고, 직교 기저함수로서 분해한 식 (30)의 전개를 Karhunen-Loève 전개라고 한다.

수식전개시 개념의 간결성을 위하여 주어진 랜덤 벡터의 집합을 식 (34)과 같이 행렬의 형태로 변환한다.

$$X \equiv \begin{pmatrix} \langle \tilde{x}^{(1)} | \\ \langle \tilde{x}^{(2)} | \\ \vdots \\ \langle \tilde{x}^{(M)} | \end{pmatrix} \quad (34)$$

또한 기저함수와 계수에 대해서도 같은 방법으로 행렬의 형태로 변환한다.

$$A \equiv \begin{pmatrix} \langle \tilde{\phi}_1 | \\ \langle \tilde{\phi}_2 | \\ \dots \\ \langle \tilde{\phi}_M | \end{pmatrix} \quad V \equiv (| \tilde{v}_1 \rangle | \tilde{v}_2 \rangle \dots | \tilde{v}_M \rangle) \quad (35)$$

행렬의 형태로 Karhunen-Loève 변환을 나타내면 식 (36)과 같이 나타낼 수 있다.

$$X = VA \quad (36)$$

식 (32)에서 전개계수 $\{|\tilde{v}_b\rangle\}$ 의 직교성으로 인하여 식 (35)에서 정의되는 행렬 V 가 단위행렬 ($VV^T = V^T V = I$)이 된다는 것은 명백한 일이며, 식 (37)와 같은 관계도 성립하게 된다.

$$A = V^T X, \quad A^T = X^T V \quad (37)$$

이러한 식 (37)의 두 관계식을 서로 곱하고, 식 (31)의 기저함수 $\{|\tilde{\phi}_b\rangle\}$ 의 직교성을 이용하면 다음과 같은 행렬식이 정의된다.

$$AA^T = V^T X X^T V = \Lambda \quad (38)$$

여기서 Λ 는 대각행렬(diagonal matrix)이며, 식 (38)의 $X X^T$ 는 항상 정방 대칭행렬로서 자료행렬의 상관관계를 나타내는 행렬로서 식 (39)과 같은 행렬 P 로 정의한다.

$$P \equiv X X^T \quad (39)$$

이상의 관계를 이용하여 식 (38)을 다시 정리하면, 식 (40)와 같은 고유값 방정식(eigenvalue equation)을 얻을 수 있다.

$$V^T P V = \Lambda \quad (40)$$

이렇게 정의된 식 (40)에서 계수벡터 $\{|\tilde{v}_b\rangle\}$ 는 행렬 P 의 고유벡터이다. 행렬 P 는 항상 Hermitian이기 때문에 고유값은 항상 실수값이 되며, 행렬 P 의 요소들이 실수라면 고유함수 또한 실수가 된다.

3.2 고유값의 계산

주어진 불연속 정보에 대한 Karhunen-Loève 변환에서 가장 중요한 요소는 행렬 P 의 결정과 그 고유벡터의 결정에 있다. Karhunen-Loève 변환에는 직접방법(direct method)과 속사방법(snapshot method)이 있는데, 두 가지 방법의 큰 차이점은 전자는 상관관계를 공간상의 측정점을 이용하여 구하고, 후자는 앙상블을 이용하여 결정한다는 것이다. 본 연구에서 사용되는 격자계와 앙상블의 수를 이용하여 두 방법의 차이를 설명하면 다음과 같다. 만일 관심이 있는 유동영역(이하 K-L window)에 주유동 방향으로 30개, 주유동방향과 직각방향으로 20개의 격자점을 선택한다면, 직접방법에서 결정되는 행렬 P 의 차원은 2차원 유동인 경우 1200(= 2×30×20)이 된다. 이러한 행렬의 차원은 고유값 계산에 있어서 계산용량의 관점에서 많은 문제를 수반하게 되며, 유동장해석의 차원 확장에도 문제를 야기시킨다. 하지만 속사방법은 공간상의 측정점의 수가 아니라, 앙상블의 수에 의해서 행렬 P 가 결정이 되므로 고유값 해석에 있어서 무리하게 많은 앙상블을 취하지 않는 한 계산용량에는 문제가 되지 않는다. 하지만 두 앙상블간의 내적을 이용하여 행렬 P 를 결정하기 때문에 K-L 창 내에 조밀한 격자계를 선택한다면 행렬 P 를 결정하기 위해서 많은 산술연산 시간을 요구하게 된다.

고유값 해석에 요구되어지는 앙상블은 두 가지

경우를 고려하여 수행하여 보았다. 하나는 동일한 시간간격(10 time iteration)을 통한 샘플링과, 다른 하나는 첫 번째 와류합체 현상이 발생하는 사건들만을 샘플링한 경우의 두 가지이다. 이러한 두 경우의 앙상블을 이용하여 임의의 유동장을 복원하여 본 결과, 두 가지 경우에 있어서 결과사이의 상이함을 발견할 수 없었다. 이러한 결과에 근거를 두고 계산의 편의를 위하여 동일한 시간간격의 앙상블을 이용하여 고유값해석을 수행하였다.

본 연구에서는 200개의 앙상블을 이용하였으므로, 행렬 P 의 차원은 200이 되어 직접방법에 비하여 행렬의 차원이 크게 감소되었음을 알 수 있다. 이러한 차원 확장성을 이용하여 속사방법을 이용하기로 한다.

4. 수치해석 결과

4.1 유동장해석에 대한 결과

본 연구에서 사용되는 이산화와류방법의 결과에 대한 검증을 위하여 Goretler⁽¹²⁾가 유도한 평면제트 유동의 평균속도관계식과 Rajaratnam⁽¹³⁾가 실험에 의하여 제시한 실험 계수를 이용하여 비교하였다.

Fig. 8에서 실선은 평면제트유동에 대한 Rajarat-

nam의 실험 결과에 의해 제시된 실험계수를 Goretler가 유도한 평면 제트 유동의 평균속도 관계식에 대입하여 구한 결과이고, 점선은 본 연구에서 해석한 수치 결과이다. 두 결과에서 보이는 근본적인 오차의 원인은 Goretler에 의해 유도된 관계식이 제트유동장의 하류영역에 대한 상사해에 해당하기 때문에 노즐의 출구 영역에서는 많은 오차를 보이고 있다. Goretler의 결과가 노즐의 출구 영역에서 너무 일찍 발달된 것으로 보아 오히려 본 연구에서 수행한 수치해석의 결과가 더 물리적으로 합당한 결과를 얻었다고 할 수 있으며, 하류 영역으로 갈수록 두 결과에 대한 오차가 감소하고 있음을 볼 수 있다.

본 연구에서는 Strouhal수의 변화에 따른 평면 제트 유동장의 변화 양상을 비교하기 위하여 제트 출구영역에서 주유동속도의 10~50%의 강도를 가지는 진폭과 1~5 Hz의 주기를 가지는 가진력을 고려하였다. 이에 해당하는 $St=0.2\sim 1.0$ 의 범위를 갖게 된다.

Fig. 9는 가진을 하지 않았을 경우에 $x/d=1\sim 4$ 영역에서 발생하는 와류합체 현상을 보여 주고 있는데, 와류의 운동을 잘 살펴보면 나중에 생성된 와류가 먼저 생성된 와류를 밀어 올리면서 하나의

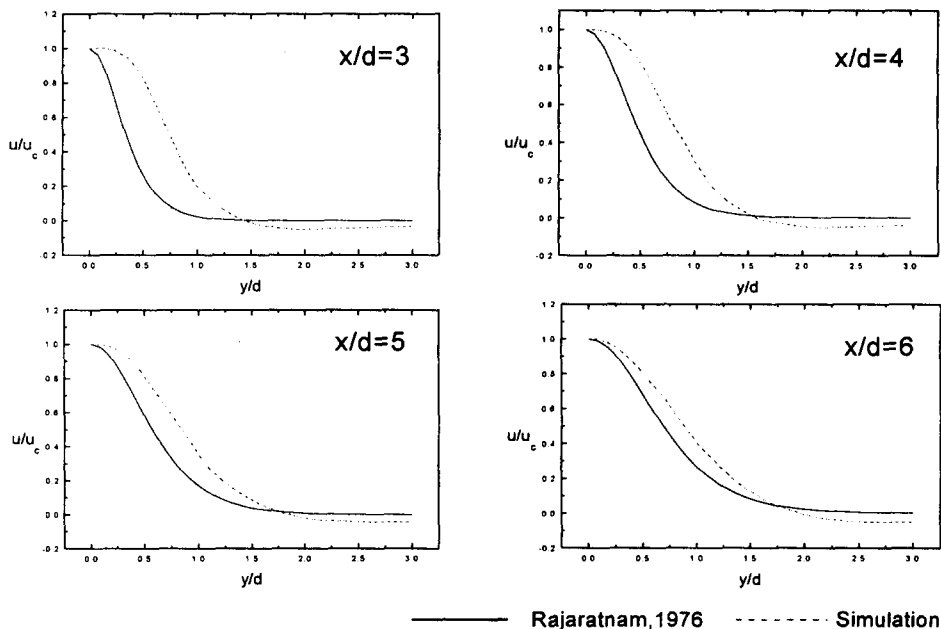


Fig. 8 Mean velocity profiles of the main stream direction

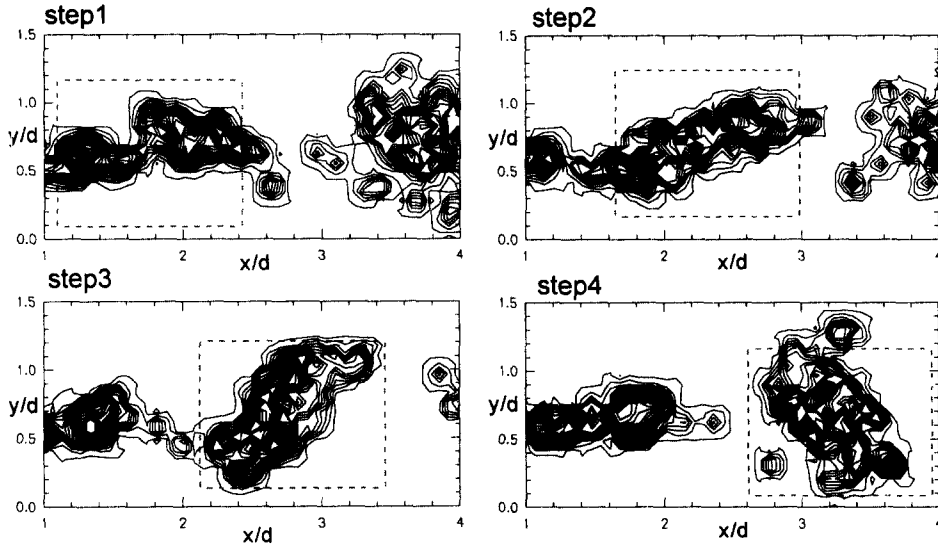


Fig. 9 Time evolution of the vorticity (unforcing case)

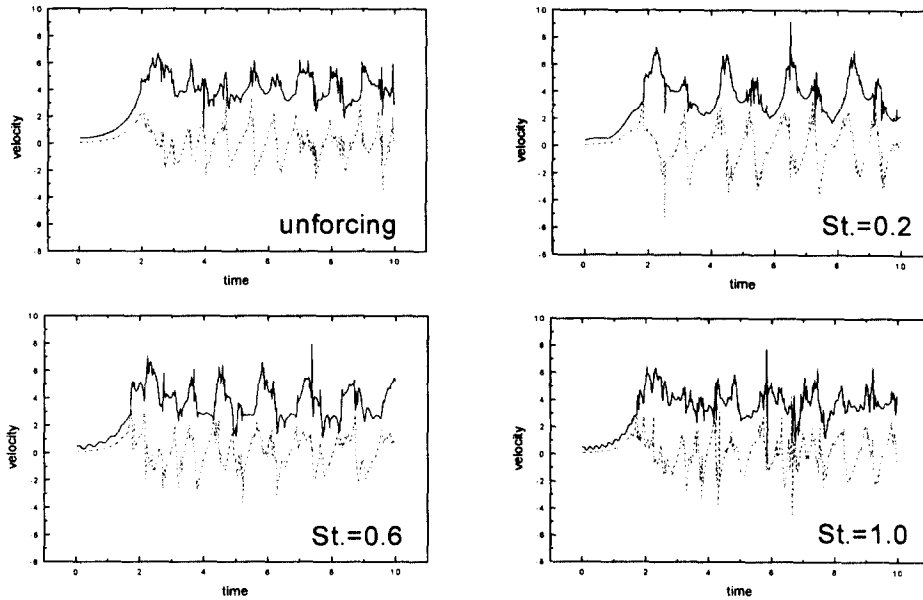


Fig. 10 Time history of the velocities(@ $x/d=3, y/d = 0.5, -u - -v$)

커다란 와류덩어리로 발전되어 가는 과정을 명확하게 묘사하고 있다. Fig. 10은 가진력의 진폭이 50%이고 $x=3d, y=0.5d$ 인 지점에서의 가진주파수의 변화에 따른 속도의 변화 양상을 보여주고 있는데, $St=0.2$ 인 경우에는 가진을 하지 않았을 경우에 비하여 상당히 주기적인 양상을 보여주고 있으며, 가진 주파수가 커짐에 따라 속도의 변화 양상

이 점점 더 불규칙적으로 되어 가는 현상을 보여주고 있다.

Fig. 11은 진폭이 30% 일 때 가진주파수의 변화에 따른 와류 중심의 궤적을 나타내는데 각각의 궤적들이 가까워지는 것은 와류합체(pairing)현상이 발생하고 있음을 나타내고, 멀어지는 것은 와류분리(tearing)현상이 발생하고 있음을 암시하는 것이

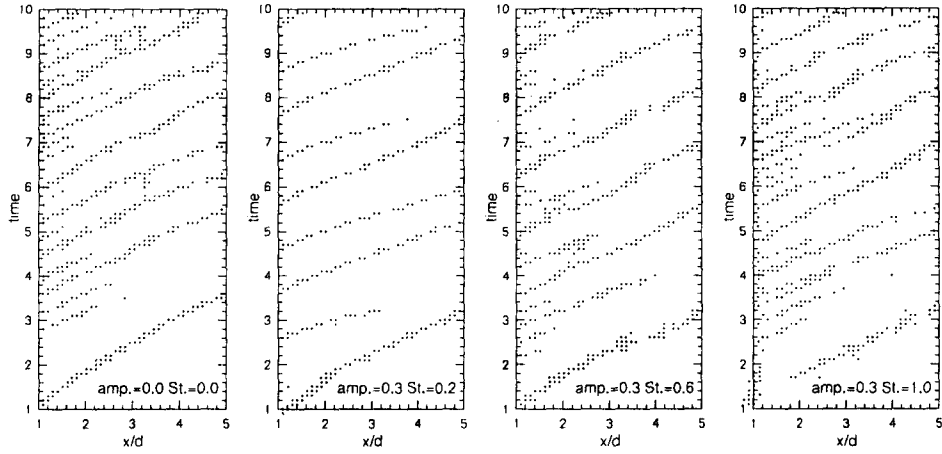


Fig. 11 Vortex center trajectories (amplitude=0.3)

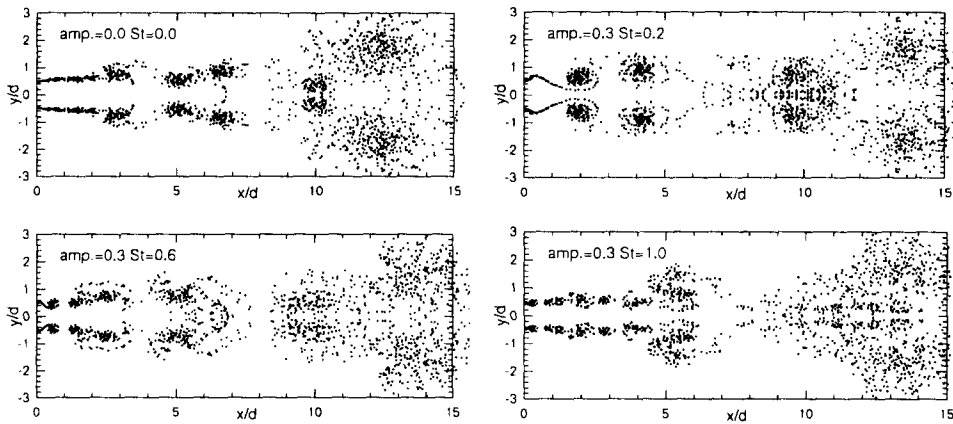


Fig. 12 Free vortex distribution (amplitude=0.3)

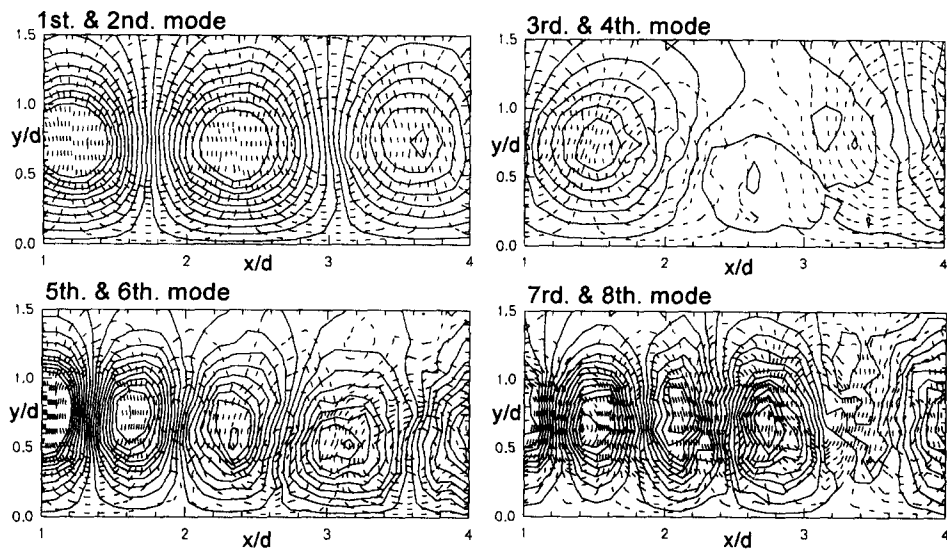


Fig. 13 Folded contours of the eigenfunctions (amplitude=0.3, St=0.2)

다. $St=0.2$ 인 경우에는 가진을 가하지 않았을 경우에 비하여 와류합체 현상이 현저히 억제되었음을 볼 수 있으며, 가진 주파수가 커짐에 따라 와류의 합체 및 분리 현상이 활발해 짐을 알 수 있다. 또한 주목할 만한 현상으로 Fig. 12를 살펴보면, Strouhal수가 커짐에 따라서 출구에서의 불안정성이 증가하여 와류가 말리고(roll-up) 잘려나가는(break-down) 일련의 현상이 노즐의 출구 부분으로 이동하는 현상도 확인할 수 있다.

4.2 고유값 해석에 대한 결과

제트유동현상에서 주유동과 직각방향인 속도성분의 부호 변화는 와류합체 현상과 같은 와류의 구조와 아주 밀접한 관계를 보이고 있기 때문에 구조의 명확성을 위하여 고유값 해석의 도식화에 이용하였다.

Fig. 13은 30%의 가진 진폭과 $St=0.6$ 의 가진 주파수를 가진 경우에 있어서의 첫 번째 고유유동장(실선)과 두 번째 고유유동장(점선)의 결과를 겹

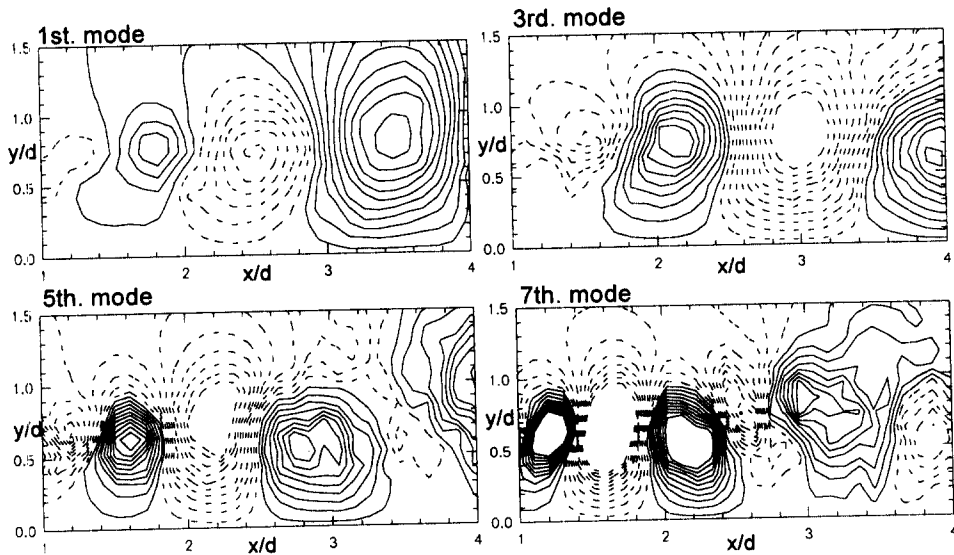


Fig. 14 Contours of the eigenfunctions (unforcing case)

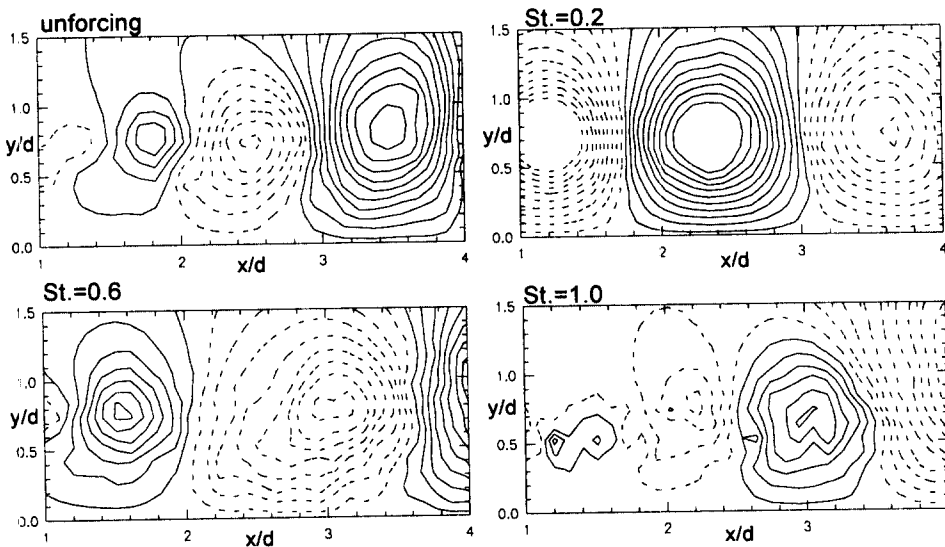


Fig. 15 Contours of the 1st. eigenfunctions (amplitude =0.5)

쳐서 나타낸 것으로 두 모드가 1/4파장의 위상차이를 보이고 있는 것을 확인할 수 있다. 이것은 한 모드의 에너지가 최대일 때 다른 모드의 에너지가 최소가 된다는 것을 의미한다. 이러한 결과는 두 모드 중에서 하나만을 선택한다해도 유동장의 구조를 표현하는데 무리가 없다는 사실을 검증해 주며 Rempfer와 Fasel⁽¹⁴⁾는 이렇게 쌍을 이루는 두 모드를 하나의 모드로서 응집구조를 정의하고 있다.

Fig. 14는 가진을 하지 않은 경우에 있어서의 고유값해석 결과를 도시한 것인데 모드 수의 증가에 따라 구조들이 작아지고 불규칙한 형태를 나타내고 있다. 이는 앞쪽의 소수의 모드에 큰 에너지가 집중되어 있음을 보여주고 있는 것으로, 그러한 결과는 임의의 유동형태를 소수의 모드로 재현할 수 있다는 것을 간접적으로 말해주고 있다.

Fig. 15는 가진 진폭이 50%인 경우에 있어서의 가진 주파수에 따른 고유유동장 중에서 첫 번째 모드만을 도시한 것으로 가진을 하지 않은 경우와 비교하여 보면, $St=0.2$ 인 경우에는 상당히 조직화된 커다란 구조들만이 발견되며 이는 다른 경우와 비교하여 첫 번째 모드에 에너지가 집중되어 있다는 사실을 입증해주고 있다. 또한, 가진주파수가 점점 커짐에 따라서 이러한 구조화는 약화되며, 점차 작은 구조들이 발견됨을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 앞에서 설명한 유동장 해석의 결과에서 보여준 가진주파수에 따른 속도 양상의 주기성이나, 유동 양상의 구조화에 대한 정보가 고유유동장에 내포되어 있음을 확인할 수 있는 것이다.

Fig. 16은 도출된 고유유동장을 이용하여 앙상블에 속해 있는 원래의 유동장을 재구성한 것으로, 전개에 포함되는 차수가 높아질수록 원래의 유동장

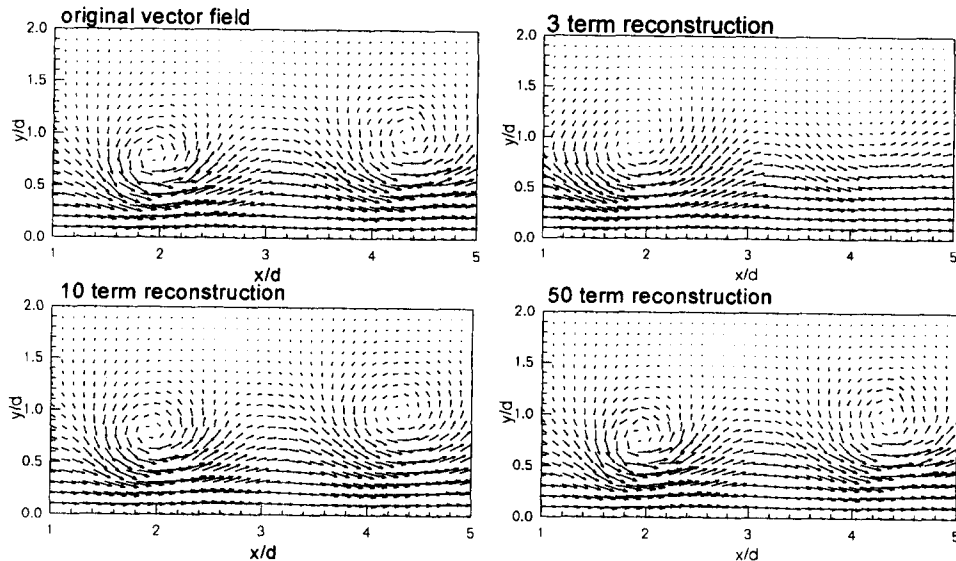


Fig. 16 Reconstruction of the flow field (original flow field is in the ensemble)

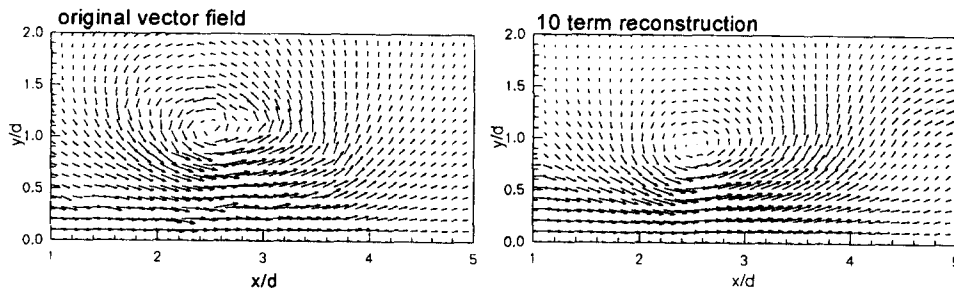


Fig. 17 Reconstruction of the flow field (original flow field is in the transient region)

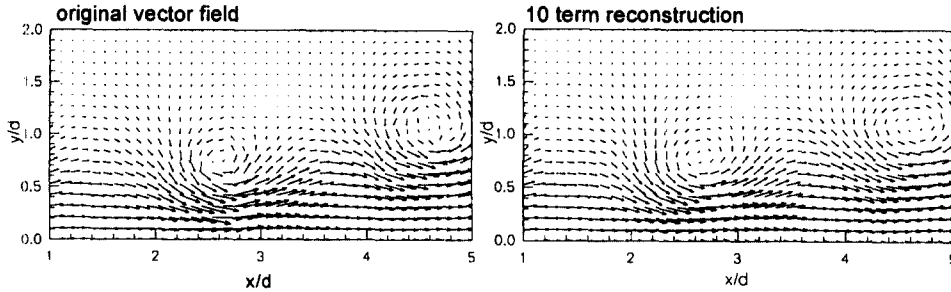


Fig. 18 Reconstruction of the flow field (original flow field is not in the ensemble)

에 근접함을 알 수 있다. 또한 50개의 전개항을 이용하여 원래의 유동장을 거의 완벽하게 재구성할 수 있었다. 이러한 유동장의 재구성은 앙상블에 속해 있는 유동장 뿐만 아니라 앙상블에 속해 있지 않는 유동장에 대해서도, 심지어는 과도 영역에 속해 있는 유동장에 대해서도 소수의 항으로 원래의 유동장을 폭넓은 범위에서 재구현 할 수 있었다. 이러한 결과를 각각 Fig. 17과 Fig. 18에 나타내었다.

5. 결론

이상과 같이 노즐 출구영역에서 주기적인 가진이 가해지는 평면 제트유동에 대하여 이산화와류방법과 Karhunen-Loève 변환을 이용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 이산화와류방법을 이용하여 평면 제트유동장을 해석한 결과 이론과 실험에 의해 제시된 결과의 비교를 통하여 비록 출구 영역에서는 어느 정도의 오차를 수반하였으나, 와류의 운동이 활발히 진행되는 출구로부터 약 3D~5D되는 부분에서의 유동의 양상은 정성적으로 잘 일치함을 확인하였다.

(2) 유동장에 대한 와도의 운동을 관찰한 결과 난류 경계층에서 일반적으로 발생하는 주기적인 와류합체 현상을 발견 할 수 있었으며, $St=0.2$ 인 경우에 있어서는 속도 성분의 운동이 상당히 주기적인 양상을 띄고 있음과 자유와류의 공간적인 분포의 강한 구조화 현상을 관찰하였다.

(3) Strouhal수를 0.2에서 1.0까지 변화시키면서 와류 입자의 궤적을 관찰한 결과 Strouhal수가 증가함에 따라서 와류들의 운동양상이 활발해짐을 확인하였으며, 자유와류의 공간적인 분포의 구조화가 점차적으로 약화되는 현상을 확인하였다. 또한 유

동의 불안정성이 증대되어 와류가 말리고 잘리는 일련의 현상이 노즐의 출구 부분으로 이동함을 발견하였다.

(4) 평면제트유동장에 Karhunen-Loève 변환을 적용하여 평균제곱오차의 측면에서 가장 최적한 기저함수를 도출하였으며, 이러한 최적의 기저함수를 이용하여 소수의 모드로서 폭넓은 범위에서 원래의 유동장을 효과적으로 복원할 수 있었다. 또한 가진력에 따른 고유모드의 에너지 집중현상도 규명하였다.

참고문헌

- (1) Brown, G. L and Roshko, A., 1974, "On Density Effects and Large Structure in the Turbulent Mixing Layers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, No. 4, pp. 775~816
- (2) Crow, S. C. and Champagne, F. H., 1971, "Orderly Structure in the Jet Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 48, pp. 574~591
- (3) Reynolds, W. C. and Bouchard, E. E. 1981, "The Growth and Structure of the Mixing Layer Region of a Forcing Jet," Ph. D. dissertation, Dept. of Mech. Engineering, Stanford Univ.
- (4) 이찬희, 이상환, 1995, "평면제트류 응집구조의 근사적 표현에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제19권 제3호, pp. 751~762
- (5) Kiya, M., Sasak, K. and Arie, M., 1982, "Discrete Vortex Simulation of a Turbulent Separation Bubble," *J. Fluid Mech.*, Vol. 120, pp. 219~244
- (6) Kiya, M. and Arie, M., 1980, "Discrete Vortex Simulation of Unsteady Separated Flow Behind a

- Nearly Normal Plane," *Bull. JSME*, Vol. 23 ~183, p. 1451
- (7) Lewis, R. I., 1991, "Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems," Cambridge university press
- (8) Fage, A. and Johnson, F. C., 1927, On the Flow of Air Behind an Inclined Flat Plate of the Infinite Span, *Proc. Roy. Soc. A* Vol. 116, pp. 170 ~179
- (9) Josep Katz and Allen Plotkin, 1991, *Low-Speed Aerodynamics From Wing Theory to Panel Methods*, McGraw-Hill, Inc., pp. 44~46
- (10) Ling, Guo-Can, 1986, Numerical Study of Secondary Separation and Circulation Reduction in the Wake Flow Around a Circular Cylinder, *Wroclaw, Poland*, Vol. 51, No. 14, pp. 103~117
- (11) Curt A. L., Szuberla, *Discrete Karhunen-Loève Transform*, Geophysical Institute, Univ. of Alaska, Fairbanks, Alaska
- (12) Goertler, H., 1942, Berechnung von Aufgaben der Freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungssatzes. *Z. A. M. M.* Vol. 22, pp. 244 ~254
- (13) Rayaratnam, N. 1976, *Turbulent Jets*, Elsevier
- (14) Dietmar Rempfer and Hermann F. Fasel, 1994, "Dynamics of Three Dimensional Coherent Structures in a Flat-Plate Boundary Layer," *J. Fluid Mech.*, Vol. 275, pp. 257~283