

〈논 문〉

오차수정법을 도입한 비압축성 유체유동 해석을 위한 수치적 방법

권 오 봉*
(1995년 5월 8일 접수)

Numerical Algorithm with the Concept of Defect Correction for Incompressible Fluid Flow Analysis

O. B. Kwon

Key Words : Numerical Algorithm(수치 알고리즘), Incompressible Flow(비압축성 유동), High Order Accuracy(고차 정확도), Defect Correction (결합 수정)

Abstract

The characteristics of defect correction method are discussed in a sample heat conduction problem showing the numerical solution of the error correction equation can predict the error of the numerical solution of the original governing equation. A way of using defect correction method combined with the existing algorithm for the incompressible fluid flow, is proposed and subsequently tested for the driven square cavity problem. The error correction equations for the continuity equation and the momentum equations are considered to estimate the errors of the numerical solutions of the original governing equations. With this new approach, better velocity and pressure fields can be obtained by correcting the original numerical solutions using the estimated errors. These calculated errors also can be used to estimate the orders of magnitude of the errors of the original numerical solutions.

기 호 설 명

A : 미분방정식의 상수
 E : 수치해로부터 예측된 오차
 F : 함수 f 의 수치해
 P : 압력 p 의 수치해
 S, S' : 생성항
 U, V : 속도 u, v 의 수치해
 ϵ : 차분식의 상수
 e : 오차
 f : 함수
 p : 압력

t : 시간
 u, v : x 및 y 방향의 속도
 x, y : 직교 좌표계
 ν : 동점성계수
 ρ : 밀도

상첨자

$+$: 임시
 u, v : 속도
 p : 압력

하첨자

nb : 주위 격자점

*회원, 부경대학교 기계공학과

u, v	: 속도
con	: 연속방정식
p	: 압력
c	: 상수항, 혹은 수정된 값
P	: 중앙격자점

1. 서 론

컴퓨터가 발달함에 따라 많은 공학 문제, 특히 유체유동 및 열전달 해석에 보다 많은 수치적인 연구가 이루어지고 있다. 이에 필요한 알고리즘들이 개발되어 있으나 기존의 알고리즘을 사용할 경우 모두 1차 또는 2차의 정확도(1st or 2nd order accuracy)를 가지는 해가 구해질뿐이다. 경우에 따라서 유체유동의 지배방정식에 나타나는 특정항을 고차의 정확도를 가지는 차분식을 사용할 수 있으나, 연속방정식 및 운동량방정식 등 지배방정식 전체의 차분화 과정에서 1차 또는 2차의 정확도를 가진다. 따라서 보다 정확한 해를 구하기 위해서는 고차의 정확도(higher order accuracy)를 가지는 방법이 필요하다. 현재 많이 사용되고 있는 방법으로는 SOLA,⁽¹⁾ SIMPLE,⁽²⁾ SIMPLER,⁽³⁾ SIMPLER,⁽⁴⁾ PISO⁽⁵⁾ 등의 방법들이 있다. 그러나 이 방법들은 전술한 바와 같이 1차 또는 2차의 정확도를 가진다.

현재 비교적 새로운 개념인 오차수정 또는 결함수정(defect correction) 방식⁽⁶⁻⁸⁾은 보다 정확한 함수값 또는 편미방에서 고차의 수치해를 구하는 데 사용되고 있으며, 이 방법을 기존의 열유동해석에 사용되는 알고리즘과 연계하여 사용하는 방안을 제안하고자 한다.

2. 오차수정법

비교적 새로운 개념인 오차수정(defect correction) 방식이 삼미방 또는 편미방의 해를 구하는 데 적용되고 있으며 또한 multigrid 방식에 응용되고 있으나, 비선형 방정식들로 구성된 유동의 해석에는 사용되고 있지 않다. 먼저 오차수정법의 개념을 이해하기 위하여 다음과 같이 일반적인 2차 편미분 방정식을 고려하기로 한다.

$$A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial f}{\partial x} + A_5 \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ S = 0 \quad (1)$$

편의상 선형방정식을 예로 들었다. 식 (1)의 계수 A 들과 S 는 x, y 의 함수로 표시될 수 있다. 보통의 수치해석으로 얻어지는 해를 F 라고 할 때, 오차는 다음과 같이 표시된다.

$$e = f - F \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면, 이들 오차에 대한 지배방정식을 얻게 된다.

$$A_1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial e}{\partial x} + A_5 \frac{\partial e}{\partial y} + S' = 0 \quad (3)$$

여기서,

$$S' = A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial F}{\partial x} + A_5 \frac{\partial F}{\partial y} + S \quad (4)$$

이제 식 (3)으로부터 오차에 관한 해를 구할 수 있다. S' 은 식 (1)의 수치해석으로 얻어지는 해 F 로부터 쉽게 계산되어진다. 여기서 주의할 점은 식 (1)의 수치해 F 로써 S' 의 유한차분 형태를 계산할 때 고차(4차 또는 5차)의 차분 형태를 사용하여야 한다. 오차에 관한 식 (3)으로부터 수치해석 결과의 해, E 가 구해지면, 보다 정확한 수정된 해 F_c 는 다음 식으로부터 쉽게 구해진다.

$$F_c = F + E \quad (5)$$

보다 명확한 이해를 위하여 경계조건을 포함한 예를 통하여 이의 장점을 설명하고자 한다. 다음과 같은 2차원 열전도 문제를 고려한다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + S = 0 \quad (6a)$$

$$f = 0 \text{ at } x = 0 \quad (6b)$$

$$f = 0 \text{ at } y = 0 \quad (6c)$$

$$f = 0 \text{ at } x = 1 \quad (6d)$$

$$f = \sin(\pi x) \text{ at } y = 1 \quad (6e)$$

위 지배방정식의 유한차분 형태는 다음과 같다.

$$\frac{F_{i-1,j} - 2F_{i,j} + F_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{F_{i,j-1} - 2F_{i,j} + F_{i,j+1}}{\Delta y^2} + S_{i,j} = 0 \quad (7)$$

편의상 내부 격자점(node)에서만 표시하였다.

위 식들의 수치해는 쉽게 구해지며, 수치해 F 가 구해지면 오차에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + S' = 0 \quad (8a)$$

여기서,

$$S' = S + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (8b)$$

$$e = 0 \text{ at } x = 0 \quad (8c)$$

$$e = 0 \text{ at } y = 0 \quad (8d)$$

$$e = 0 \text{ at } x = 1 \quad (8e)$$

$$e = 0 \text{ at } y = 1 \quad (8f)$$

위 오차에 대한 방정식의 유한차분 형태는

$$\frac{E_{i-1,j} - 2E_{i,j} + E_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j-1} - 2E_{i,j} + E_{i,j+1}}{\Delta y^2} + S'_{i,j} = 0 \quad (9a)$$

로 표시된다. 여기서,

$$S'_{i,j} = S_{i,j} + \frac{-F_{i-2,j} + 16F_{i-1,j} - 30F_{i,j} + 16F_{i+1,j} - F_{i+2,j}}{12\Delta x^2} + \frac{-F_{i,j-2} + 16F_{i,j-1} - 30F_{i,j} + 16F_{i,j+1} - F_{i,j+2}}{12\Delta y^2} \quad (9b)$$

Fig. 1에 위의 차분식에 사용된 격자점들을 보여 주고 있다. 식 (9b)로 표시되는 생성항(source term)은 Fig. 1(b)의 격자점들로 표시된 것이며, 식 (7)로부터 구한 수치해 F 를 이용하여 쉽게 구할 수 있으며 오직 한 번만 계산하여 저장하면 된다. 식 (9a)의 오차, E 를 계산하는 데는 F 를 구할 때와 마찬가지로, Fig. 1(a)와 같은 격자점들이 사용되며 생성항만 다른 값을 가질뿐 완전하게 동일한 프로그램이 사용된다. 따라서, 오차에 대한 해를 쉽게 구할 수 있으며, 수정된 해는 다음 식으로 구해진다.

$$F_c = F + E \quad (10)$$

Fig. 2에 $S=0$ 인 경우의 대각선($y=x$)에서의 수렴된 해의 오차분포를 나타내고 있다. 식 (9)에서 구한 예측된(estimated) 오차 E 는 식 (7)에서 구한 수치해의 엄밀한(exact) 오차를 거의 정확하게 예측하고 있다. 또한 11×11 격자를 사용하였을 때 보다 21×21 격자를 사용하였을 때 더 잘 예측하고 있음을 알 수 있어 보다 많은 격자점을 사용하면

오차를 더욱 정확하게 예측할 수 있다. 따라서 이와 같이 정확하게 예측된 오차를 이용하면 보다 정확한 해를 구할 수 있다. 즉, 식 (7)의 수치해의 오차에 관한 식 (9)를 한번 더 수치적으로 구한 해 E 를 식 (10)으로 수정하면 보다 정확한 해를 구할

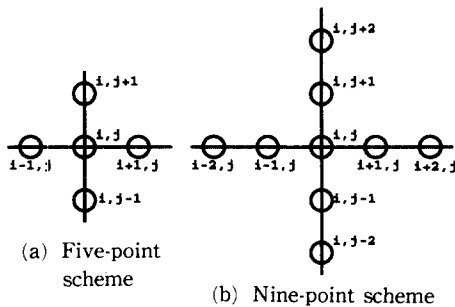
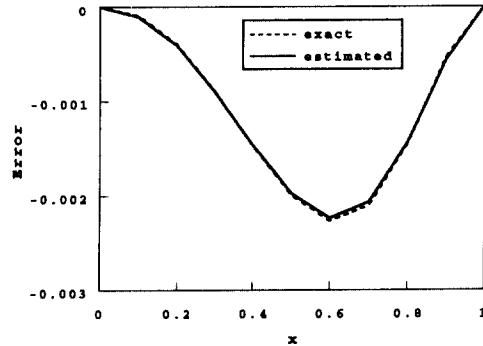
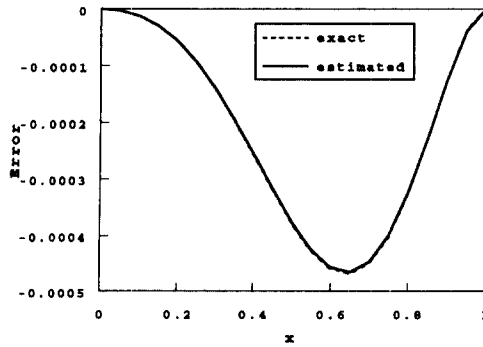


Fig. 1 Stencils used for the finite difference



(a) 11×11



(b) 21×21

Fig. 2 Exact errors and estimated errors for (a) 11×11 mesh, (b) 21×21 mesh at the diagonal line of the test problem

수 있다.

수정된 (corrected) 값의 오차와 원래의 수치해의 오차(그림에서 2nd order 로 표시)를 Fig. 3에 보여주고 있다. 그림에서 보듯이, 동일한 격자를 사용하였을 때 수정된 해의 오차가 수정되지 않은 일반적인 수치해의 오차보다 훨씬 작을뿐만 아니라, 11×11 격자를 사용한 수정된 해의 오차가 41×41 격자를 사용한 수정되지 않은 일반적인 수치해의 오차보다 훨씬 작아 오차수정법의 효과가 크다는 것을 알 수 있다. 역시 이 그림에서 오차수정법이 보다 정확한 해를 구하는데 사용될 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{-F_{i-2,j} + 16F_{i-1,j} - 30F_{i,j} + 16F_{i+1,j} - F_{i+2,j}}{12\Delta x^2} \\ & + \frac{-F_{i,j-2} + 16F_{i,j-1} - 30F_{i,j} + 16F_{i,j+1} - F_{i,j+2}}{12\Delta y^2} \\ & + S_{i,j} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

그림에서 보듯이 수렴되었을 때, 11×11 격자를 사용하여 수정된 해의 최대오차가 10⁻⁴이나, 41×41 격자를 사용한 수정되지 않은 2차의 정확도를 갖는 수치해의 최대오차가 10⁻⁴ 정도이다. 다시 말하자면 오차수정법을 이용하여 수정된 해를 구하면 42, 즉 16배의 격자점을 사용한 수치해보다 정확한 해를 구할 수 있다. 또한 수렴된 해를 구하는데 필요한 반복계산횟수를 비교하면, 11×11 격자에서 오차수정법을 이용하여 수정된 해의 경우 100회 정도의 반복계산이 필요하다. 이에 반하여 41×41 격자인 경우 1200-1300회 정도의 반복계산이 필요하여, 10배 이상의 많은 반복계산이 필요하다. 그러

수렴된 해를 구할 때, Gauss-Seidel 방법이 사용되었을 경우, 식 (6)의 엄밀해와 수치해의 차이인 오차의 최대값을 Gauss-Seidel 방식의 반복계산횟수(iteration)에 관해 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 1(a)의 5점을 사용하는 2차의 정확도를 가지는 수정되지 않은 보통의 해와 Fig. 1(b)의 9점을 사용하는 4차의 정확도를 가지는 경우의 수치해의 최대 오차를 Fig. 1(a)의 5점을 사용하여 수정된 해의 최대오차와 함께 나타내었다. Fig. 1(b)의 9점을 사용하는 4차의 정확도를 가지는 경우 내부 격자점에서의 차분식은 다음으로 표시된다.

나 수렴된 해를 구하는데 소요되는 계산시간은 41×41 격자의 경우 11×11 격자보다 16배의 격자점들이 많으므로 16×10=160배 이상의 많은 계산시간이 요구되고 있다. 삼차원 또는 유체유동의 해석에는 그 효과는 보다 더 명확할 것으로 판단된다. 또한 오차수정법을 사용하여 수정된 해의 최대 오차와 4차의 정확도를 가지는 경우의 최대오차를 비교하여 보면, 동일한 격자를 사용하였을 때, 얻을 수 있는 최대오차는 거의 같은 크기였다. 또한, 수렴속도는 거의 같거나 오차수정법의 경우가 약간 빨라, 그림에서 보듯이 21×21 격자의 경우 10⁻⁵의 최대오차를 가지려면 오차수정법의 경우 반복계산회수가 470회 정도인데 비해 4차의 정확도를 가지

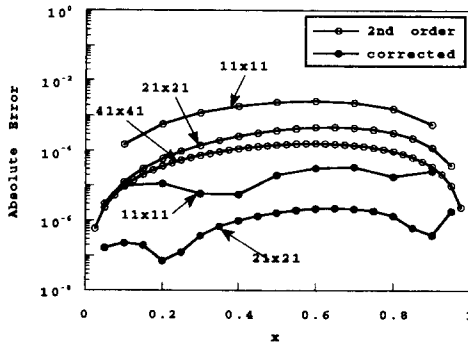


Fig. 3 Comparison of errors of 2nd order accuracy and corrected errors at the diagonal line of the test problem

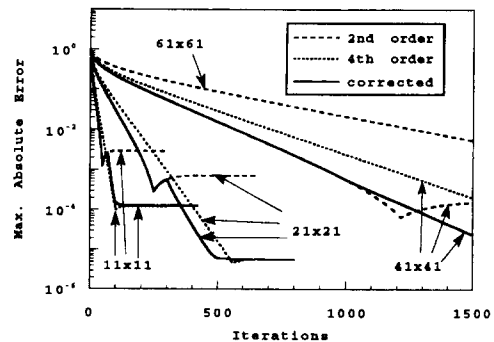


Fig. 4 Maximum absolute errors v. s. iteration for the test problem

는 경우는 530회 정도 반복계산이 필요하게 된다. 격자 수가 많아질수록 그 차이는 더욱더 크게 난다. 또한, 4차의 경우는 차분식에 사용된 격자점들이 Fig. 1(b)의 9점을 사용하기 때문에 Fig. 1(a)의 5점을 사용한 오차수정 방식과 비교하면 2배의 계산과정이 필요하기 때문에 실제 계산시간은 4차의 경우가 2배 이상 많이 소요된다. 실제 오차수정 방식에서도 Fig. 1(b) 9점이 사용되나 생성항 $S_{i,j}$ 를 계산할 때 오직 한번만 사용될뿐 실제 오차를 계산할 때는 Fig. 1(a)의 5점 방식이 사용되고 있다. 위의 예제에서는 구하고자 하는 함수값이 F 하나인 열전도 문제인 경우여서 4차의 정확도를 가지는 차분식이 가능하나, 유체 유동의 경우 u, v, w 및 p 와 같이 구하고자 하는 함수가 여러 개인 경우 4차의 해석 방법은 불가능하고, 다만 전도-확산항의 경우에만 QUICK 방식 등과 같은 보다 고차의 차분 방식만 사용되고 있을 뿐이다. 또한 오차수정법을 사용하면 오차도 예측할 수 있어 수정된 경우의 오차는 예측된 경우의 오차보다 훨씬 작아 최소한 예측된 오차값이 참고로 사용될 수 있다. 즉 Fig. 2부터 Fig. 4까지에서 11×11 격자를 사용하였을 때를 고려해 보면, 수정된 경우의 실제 오차가 10^{-4} 정도이며 수정되지 않은 경우의 실제 오차 10^{-3} 정도보다 작다는 것을 알 수 있다. 그러나 대부분의 수치해석 방법에서는 엄밀해가 알려지지 않으며 이러한 경우 위의 두 오차를 계산할 수 없다. 그러나 이러한 경우에도 오차방정식을 풀어서 예측된 오차인 10^{-3} 정도를 참고자료로 사용할 수 있어, 최소한 수정된 해의 오차는 이보다 훨씬 작다는 것을 알 수 있는 점이 오차수정법의 부차적인 이점이 된다.

위의 예에서 보듯이 오차수정방식을 이용하면 짧은 계산시간에 보다 정확한 해를 구할 수 있는 장점이 있음에도 불구하고, 연속방정식, 운동량방정식에서의 속도와 압력의 coupling 및 지배방정식의 비선형성 등과 오차방정식의 연계 문제로 인하여 유동해석의 적용에는 어려움이 있다. 본 논문에서는 이의 해결 방안을 제시하고자 한다.

3. 유체유동의 해석

3.1 기본지배방정식

오차수정법을 유체유동의 연속 및 운동량방정식에 적용하여 고차의 정확도를 가지는 알고리즘을

개발하기 위해 다음과 같은 지배방정식을 고려한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

위의 지배방정식을 편의상 기본지배방정식이라고 한다.

3.2 오차지배방정식

위의 지배방정식을 수치적으로 구한 후 다시 한번 더 오차에 대한 지배방정식을 고려함으로써 수정된 속도 및 압력을 구하고자 한다. 이때 기본지배방정식으로부터 구한 수치해를 U, V, P 라 하고, 이들 해의 오차를 각각 e_u, e_v, e_p 라 하면, 오차에 관한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial e_u}{\partial x} + \frac{\partial e_v}{\partial y} = S_{con} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_u}{\partial t} + (U + e_u) \frac{\partial e_u}{\partial x} + (V + e_v) \frac{\partial e_v}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial e_p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 e_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_u}{\partial y^2} \right) + S_u + S_{uc} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_v}{\partial t} + (U + e_u) \frac{\partial e_v}{\partial x} + (V + e_v) \frac{\partial e_v}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial e_p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 e_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_v}{\partial y^2} \right) + S_v + S_{vc} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$S_{con} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (18)$$

$$S_u = -e_u \frac{\partial U}{\partial x} - e_v \frac{\partial U}{\partial y} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} S_{uc} = & -\left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$S_{vc} = -e_u \frac{\partial V}{\partial x} - e_v \frac{\partial V}{\partial y} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S_{vc} = & -\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

위의 오차에 관한 지배방정식을 편의상 오차지배방정식이라고 명칭한다. 오차에 관한 지배방정식 중 대류 항에서 오차의 제곱으로 표시되는 항은 생략하여도 무방하다고 생각되어진다. 실제로 오차의 제곱 항을 무시한 후 계산해 본 결과 그 차이는 극히 적었다. 위 오차에 관한 해를 구하여, 보다 정확한 해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_c = U + e_u \quad (23)$$

$$v_c = V + e_v \quad (24)$$

$$p_c = P + e_p \quad (25)$$

즉, 속도 및 압력에 관하여 기본지배방정식의 수치해를 구한 후, 그 결과를 이용하여 한번 더 오차 지배방정식을 수치적으로 풀어서 보다 정확한 해를 구하고자 한다.

3.3 기본지배방정식 및 오차지배방정식에 대한 알고리즘

위의 기본지배방정식을, 가장 많이 사용되고 있는 음적(implicit) 방식으로 Fig. 5와 같은 엇갈린격자(staggered grid)를 사용하여 차분화하고자 한다. 이에 대해서는 Patankar⁽⁴⁾에서 상세히 설명되어 있으나, 오차변수의 계산에서도 사용될 수 있는 새로운 방식이 필요하다. Fig. 5(a)에서, P 는 격자점 (i, j) 를 나타내며 압력과 온도가 이 점에서

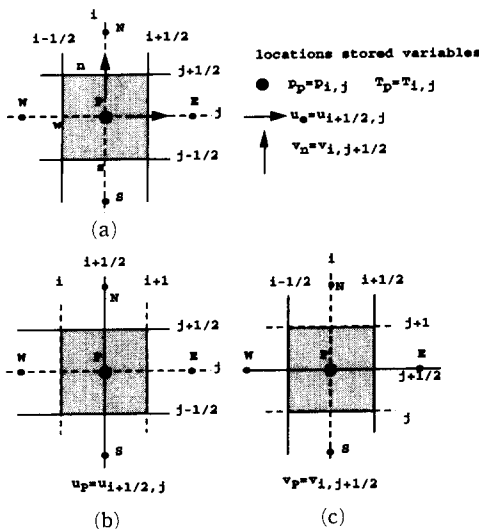


Fig. 5 Staggered grid used for the discretization of (a) continuity and energy equation, (b) x-momentum equation, (c) y-momentum equation

계산되고, E, W, N, S 는 각각 x, y 방향의 주위 격자점들을 나타낸다. Fig. 5(b)에서, P 는 격자점 $(i+1/2, j)$ 를 나타내며 x -방향 운동량방정식을 차분화할 때 사용되고, Fig. 5(c)에서 P 는 격자점 $(i, j+1/2)$ 를 나타내며 y -방향 운동량방정식을 차분화할 때 사용된다. 기존의 알고리즘인 SIMPLE, SIMPLER 등을 이용하면 그 해를 구할 수 있다. 그러나 S^3 알고리즘⁽⁹⁾을 사용하면, 프로그램도 훨씬 간단할뿐만 아니라 해의 수렴속도도 빠른 것으로 나타났다.

오차에 관한 지배방정식을 차분화할 때, 오차 (e_u, e_v, e_p) 에 관하여서는 기본지배방정식과 동일한 방식이 사용된다. 그러나 오차지배방정식 중, S_{con}, S_{uc}, S_{vc} 등에 대해서는 고차의 차분방식이 사용되어야만 보다 정확한 오차에 대한 해를 구할 수 있으며, 각 시간 단계에서 이미 기본지배방정식에서 구한 속도 및 압력 U, V 및 P 등을 이용하여 한번만 계산하면 된다. 검사체적을 사용하여 오차방정식을 차분화 할 때, 생성(source)항에 포함된 1차 또는 2차의 도함수의 처리가 문제될 수 있다. 왜냐하면 이들 생성항을 차분화 할 때는 보다 고차의 정확도를 가지는 방식이 사용되어야 하기 때문이다. 검사체적을 사용하여 오차방정식 전체를 차분화 하면 생성항에 대한 고차의 차분방식을 적용하기가 상당히 복잡하다. 따라서 다음과 같은 방식을 채택하였다. 연속방정식 및 운동량방정식에 포함된 생성항을 먼저 Taylor 급수 전개 방식을 사용하여 차분화 한 후, 차분화된 항을 사용하여 원래의 연속방정식 및 운동량 방정식을 차분화 하면 쉽게 해결될 수 있다. 원래의 지배방정식 중 연속방정식은 검사체적 방식을 사용하고, 운동량방정식을 차분화 할 때에는 Taylor 급수 전개 방식을 사용하는 또 다른 해결 방식이 있다. 이들을 계산하기 위해 다음과 같은 차분식들이 필요하다. 물론 보다 고차의 차분식을 사용하면 더 정확한 해를 구할 수도 있으나 다음과 같은 4차의 정확도를 가지는 차분식을 사용해도 비교적 정확한 해를 구할 수 있다. 편의상 내부 격자점에서 오차에 대한 차분식을 표시하고자 한다. 연속방정식에 대해서 다음 차분식

$$[S_{con}]_{i,j} = \frac{U_{i-3/2,j} - 27U_{i-1/2,j} + 27U_{i+1/2,j} - U_{i+3/2,j}}{24\Delta x} + \frac{V_{i,j-3} - 27V_{i,j-1} + 27V_{i,j+1} - V_{i,j+3}}{24\Delta y} \quad (26)$$

이 필요하고, x 방향의 운동량방정식에 대해

$$\left[U \frac{\partial U}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}}{12\Delta x} (-U_{i-\frac{1}{2},j} + 8U_{i+\frac{1}{2},j} - 8U_{i+\frac{3}{2},j} + U_{i+\frac{5}{2},j}) \quad (27)$$

$$\left[V \frac{\partial U}{\partial y} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{V_{i+\frac{1}{2},j}}{12\Delta y} (U_{i+\frac{1}{2},j-2} - 8U_{i+\frac{1}{2},j-1} + 8U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i+\frac{1}{2},j+1}) \quad (28)$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{P_{i-2,j} - 8P_{i-1,j} + 8P_{i+1,j} - P_{i+2,j}}{12\Delta x} \quad (29)$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{12\Delta x^2} (-U_{i-\frac{3}{2},j} + 16U_{i+\frac{1}{2},j} - 30U_{i+\frac{3}{2},j} + 16U_{i+\frac{5}{2},j} - U_{i+\frac{7}{2},j}) \quad (30)$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{12\Delta y^2} (-U_{i+\frac{1}{2},j-2} + 16U_{i+\frac{1}{2},j-1} - 30U_{i+\frac{1}{2},j} + 16U_{i+\frac{1}{2},j+1} - U_{i+\frac{1}{2},j+2}) \quad (31)$$

등이 사용된다. 따라서 위 식들로부터 S_{uc} 를 쉽게 계산할 수 있으며 기본지배방정식의 결과를 이용하여 한번만 계산하면 된다. 또한 S_u 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [S_u]_{i+\frac{1}{2},j} = & \frac{[e_u]_{i+\frac{1}{2},j}}{12\Delta x} (-U_{i-\frac{1}{2},j} + 8U_{i+\frac{1}{2},j} - 8U_{i+\frac{3}{2},j} \\ & + U_{i+\frac{5}{2},j}) + \frac{[e_v]_{i+\frac{1}{2},j}}{24\Delta y} (U_{i+\frac{1}{2},j-2} \\ & - 27U_{i+\frac{1}{2},j-1} + 27U_{i+\frac{1}{2},j} \\ & - U_{i+\frac{1}{2},j+2}) \end{aligned} \quad (32)$$

S_u 와 S_{uc} 로 표시되는 생성항을 x -운동량방정식을 차분화 할 때 나타나는 식 (33)의 b^u 에 포함시키기만 하면 원래의 차분식과 거의 동일한 형태가 된다. 그리고, y 방향의 운동량방정식에 대해서도 동일한 형태의 차분식을 나타낼 수 있다. 오차지배방정식에 대해서도 기본지배방정식과 동일한 형태의 차분화된 방정식을 구할 수 있으며 다음과 같다.

$$\rho e_{u_{i+1/2,j}} \Delta y - \rho e_{u_{i-1/2,j}} \Delta y + \rho e_{v_{j+1/2,i}} \Delta x - e_{v_{j-1/2,i}} \Delta x = S_{con_{i,j}} \Delta x \Delta y \quad (33)$$

$$a_{pe_{u_{i+1/2,j}}}^u = \sum_{nb} a_{nb}^u e_{u_{nb}} + b^u + \Delta y (e_{p_{i,j}} - e_{p_{i,j+1}}) \quad (34)$$

$$a_{pe_{v_{j+1/2,i}}}^v = \sum_{nb} a_{nb}^v e_{v_{nb}} + b^v + \Delta x (e_{p_{i,j+1}} - e_{p_{i,j}}) \quad (35)$$

여기서 계수 a 와 b 는 오차 e_u, e_v 에 대한 계수이며, 식 (12)부터 식 (14)까지와 식 (15)부터 식 (17)까지를 비교해 보면 알 수 있듯이, 계수 a 는 원래의 속도 및 압력을 구할 때와 거의 동일한 형

태로 표시되고 계수 b 를 계산할 때 위에서 언급한 생성항들을 고려하여야 하고, 앞의 예제에서 언급하였듯이 주위의 보다 많은 격자점들이 사용되어야 한다. 이들 오차에 대해서도 기본지배방정식과 거의 동일한 알고리즘을 적용하여 그 해를 구할 수 있다.

4. 결과 및 검토

제안된 오차수정 방식이 유체유동 문제에 제대로 작동하는지를 검증하기 위해 Fig. 6과 같은 문제에 적용하였다. 기본 알고리즘으로는 S^3 알고리즘⁽⁹⁾을 사용하였고, 오차수정법을 사용하여 계산한

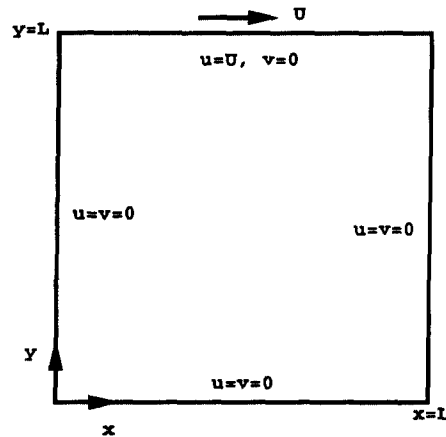


Fig. 6 Test problem: standard driven square cavity

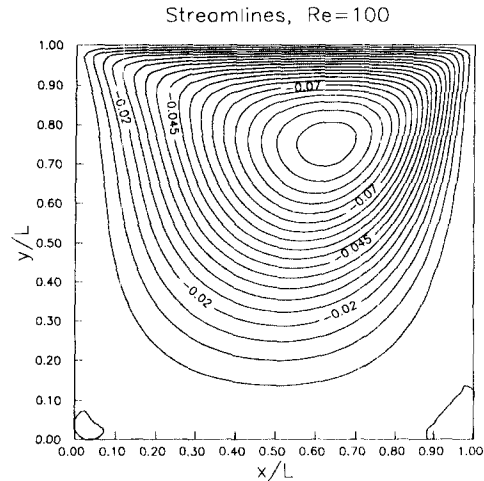


Fig. 7 Streamlines calculated by the error correction method for the test problem

streamline의 한 예를 Fig. 7에 나타내고 있다.

Fig. 8과 Fig. 9에는 중심선 상의 x 및 y 방향의 속도분포를 보이고 있다. 33×33 격자를 사용하였을 때의 수정된 속도와 129×129 격자를 사용하였을 때의 속도⁽¹⁰⁾를 비교하여 보았다. Fig. 8과 Fig. 9는 본 연구에서 제안된 방식이 속도분포를 예측하는데 효과적으로 사용되고 있음을 보여주고 있다. 본 방식의 효과를 보다 명확하게 나타내기 위하여 Fig. 10과 Fig. 11에, 32×32 격자를 사용하여 계산한 속도분포의 오차를 중심선 상에서 나타내었다. 이 경우에는 실제적으로 엄밀해를 구하는 것은 불가능하여 실제의 엄밀한 오차는 알 수가 없으며, 그림에서의 오차는 129×129 격자를 사용하여 구한 결과⁽¹⁰⁾를 참값(즉, 보다 정확한 값)으로 가정하여 계산된 것으로 엄밀한 의미에서의 오차는 구분되어져야 하나 본 논문에서는 편의상 사용하였다. 그림에서 기본지배방정식의 해에 대한 오차(error) 및 오차지배방정식으로부터 구한 오차들(e_u, e_v)과

이를 이용하여 수정된(corrected) 속도의 오차를 나타내었다. Fig. 10과 Fig. 11에서 보듯이 계산된 오차(e_u, e_v)는 보다 정확히 계산된 값과의 차이를 상당히 잘 예측하고 있다. 그들은 같은 크기 정도(same order of magnitude)를 가지고 있어, 열유체 유동에서와 같이 해의 오차를 도저히 예측할 수 없는 경우에는 기본방정식만을 사용하여 구한 수치해의 오차의 크기 정도를 판단하는 하나의 수단으로 사용될 수 있다. 또한 오차지배방정식에서 계산된 오차를 사용하여 기본방정식의 결과를 수정함으로써 얻은 해는 보다 정확함을 보여주고 있다.

5. 결 론

비압축성 유체유동에 사용될 수 있는 개념인 오차수정(defect correction) 방식을 기존의 알고리즘에 적용하는 방법을 제안하였다. 먼저, 열전도문제를 통하여 오차수정법의 장점을 예시하였으며 오차

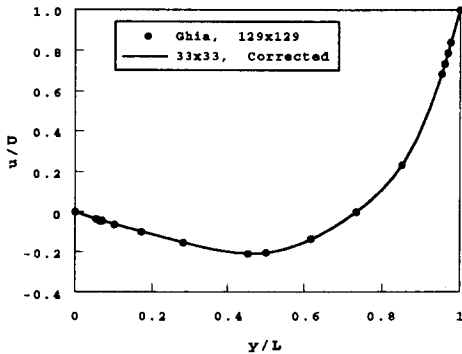


Fig. 8 u-velocity along vertical line through geometric center of the cavity domain

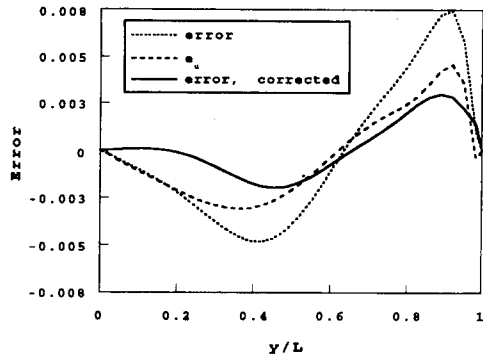


Fig. 10 u-velocity error along vertical line through geometric center of the cavity domain

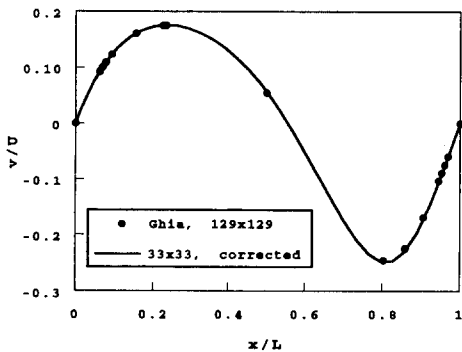


Fig. 9 v-velocity along horizontal line through geometric center of the cavity domain

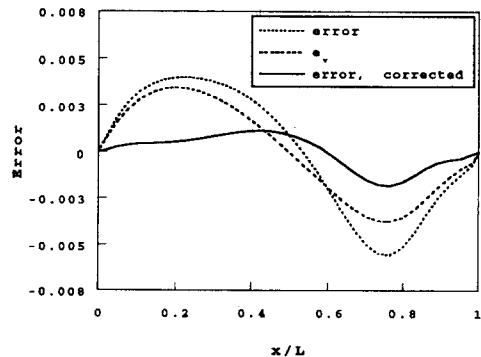


Fig. 11 v-velocity error along horizontal line through geometric center of the cavity domain

방정식으로부터 구한 오차의 수치해가 기본지배방정식으로 구한 오차를 잘 예측하고 있음을 나타내었다. 그리고, 오차수정법을 연속방정식, 운동량방정식들과 연계하여 오차지배방정식을 구한 후, 기존의 알고리즘에 응용하여 유체유동에 적용할 수 있는 방안을 제시하였다. 예시적인 유체유동의 경우에 이 방식을 적용하여 본 결과, 보다 정확한 해를 구할 수 있었으며, 오차지배방정식으로부터 구한 오차의 수치해는 기본방정식만을 사용하였을 경우의 오차의 크기 정도를 판단하는 수단으로 사용될 수 있음을 나타내었다.

후 기

이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었으므로 이에 감사의 뜻을 표한다.

참고문헌

- (1) Harlow, F. H. and Welch, J. E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2182~2189.
- (2) Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1972, "Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787~1806.
- (3) Van Doormaal, J. P. and Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow," *Numer. Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147~163.
- (4) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (5) Issa, R. I., 1985, "Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting," *J. of Compu. Physics*, Vol. 62, pp. 40~65.
- (6) Auzinger, W., 1987, "Defect Correction for Nonlinear Elliptic Equations," *Numer. Math.* Vol. 51, pp. 199~208.
- (7) Hanson, P. M. and Walsh, J. E., 1984, "Asymptotic Theory of the Global Error and Some Techniques of Error Estimations," *Numer. Math.* Vol. 45, pp. 51~74
- (8) Zadunaisky, P. E., 1976, "On the Estimation of Errors Propagated in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations" *Defect Correction Methods - Theory and Applications*, Springer-Verlag
- (9) 권오봉, 1993, "비압축성 유체유동 및 열전달 해석을 위한 수치적 방법," '93년 추계학술대회 논문집 (II), 대한기계학회, pp. 15~19.
- (10) Ghia, U., Ghia, K. N. and C. T. Shin, "High- Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method," *J. Compu. Fluids Phys.*, Vol. 48, pp. 387~411.