

研究論文

점용접에 의하여 판재로 보강된 균열판의 수직응력에 의한 응력세기계수

이 강 용* · 김 옥 환**

Stress Intensity Factor for the Cracked Sheet Subjected to Normal Stress and Reinforced with a Plate by Spot Welding

Kang Yong Lee* and Ok Whan Kim**

Key Words : Spot Welding(점용접), Stress Intensity Factor(응력세기계수), Displacement Compatibility Condition(변위적합조건), Reinforcement Plate(보강판), Reinforcement Effect(보강효과), Stiffness Ratio(강성비)

Abstract

The stress intensity factor has been calculated for the cracked plate subjected to remote normal stress and reinforced with a plate by symmetric spot welding. The solution was based on displacement compatibility condition between the cracked sheet and the reinforcement plate. It is shown that the results from the derived equation for stress intensity factor were agreed with previous solutions. The reinforcement effect gets better as a joining spot is closer to the crack tip and the other joining spots become nearer to the crack surface.

1. 서 론

지난 1960-1970년대에 많은 비행구조물이 시험 또는 운행 중에 파손되었는데, 이는 구조물 부재에 결함이나 균열이 전혀 없는 것으로 가정하는 안전수명피로해석(safe life fatigue analysis)에 근거한 설계로 인한 것으로 판명되었다¹⁾. 이에 따라 1970년대 중반 이후로, 비행구조물 뿐만 아니라 산

업 여러 분야에서는 구조물 부재 내에 이미 균열이나 결함이 있다고 가정하여 구조물의 피로수명을 해석함으로써 설계하는 손상허용설계(damage tolerance design)를 채택하였다²⁻⁴⁾. 보강된 판에 존재하는 균열의 거동에 대한 관심이 증가됨에 따라 이에 대한 연구가 많이 이루어져 오고 있다.

Greif와 Sanders⁵⁾는 보강띠(stringer)로 보강된 균열판에 대하여 적분방정식법으로 응력을 해석하였으며, Poe⁶⁾는 먼 거리에 균일한 수직응력을 받

* 비회원, 연세대학교 기계공학과

** 정회원, 천안공업전문대학 용접기술과

는 균열판에 무한 개의 보강띠를 리벳접합하여 보강시킨 것에 대하여, 변위적합조건으로 응력세기계수(SIF, stress intensity factor)를 구하였다. Nishimura⁷⁾는 무한 길이의 보강띠 유한 개를 리벳으로 균열판에 부착시킨 경우에 대하여, 보강띠가 손상되지 않은 경우, 보강띠에 균열이 있는 경우 및 보강띠가 끊어진 경우 등에 대하여 응력세기계수를 이론적으로 구하였다. 그 이외에도 보강띠로 보강한 경우에 대하여 여러 연구가 이루어졌다⁸⁻¹¹⁾.

한편, 직사각형 또는 원형 모양의 보강조각(patch)을 균열선단 주위에 부착시켜 보강한 경우에 대하여 유한요소법¹²⁻¹⁴⁾과 경계요소법^{15,16)} 등으로 SIF를 구하였다.

제트기의 얇은 판재에 균열이 발생하면 보강판으로 균열을 덮고 점용점으로 부착하여 보강시키는 수리 방법을 채택하는데, 이러한 구조물에 대한 이론적인 연구가 되어 있지 않아 적당한 점용점의 위치와 개수를 작업자의 경험에 의존하고 있는 실정이다¹⁷⁾. 따라서, 본 연구에서는 점용점에 의하여 판재로 보강한 무한 균열판이 먼 거리에서 균열에 수직 방향으로 균일한 수직응력을 받는 경우에 대한 응력세기계수를 이론적으로 구하고자 한다.

2. 이 론

2.1 접합점에 발생하는 보강력

Fig. 1과 같이 먼 거리에서 균열면에 수직 방향으로 균일한 수직응력 σ_0 를 받는 넓은 균열판에 보강판을 부착시켜 균열에 대하여 상하 좌우 대칭으로 점용점(spot welding) 한 경우를 생각한다.

균열판과 보강 판은 모두 얇은 균질무한평판으로, 2차원 평면응력상태이며, 점용점에 의한 잔류응력은 없고, 접합점에 발생하는 보강력은 두개의 평판 모두 두께에 걸쳐 균일하게 작용한다고 가정하며, 변형에 의하여 접합점에 발생하는 모멘트는 무시한다.

Fig. 2는 Fig. 1의 자유물체도이다. Fig. 2의 a)와 b)에서 볼 때 각각의 판에서는 균열의 중심을 지나는 축에 대하여 대칭인 접합점에 발생하는 보

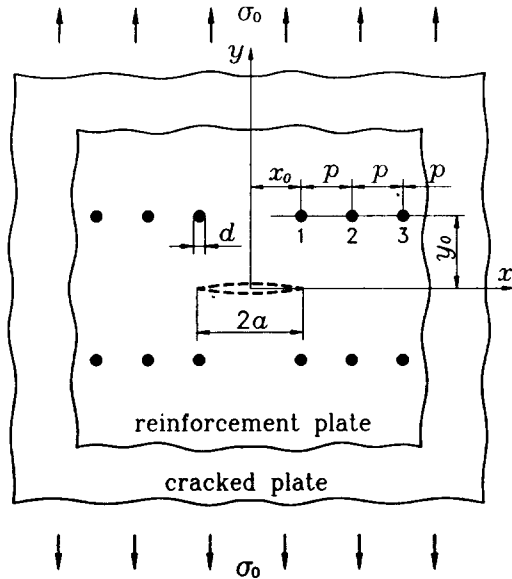


Fig. 1 Reinforced cracked plate subjected to remote uniform normal stress.

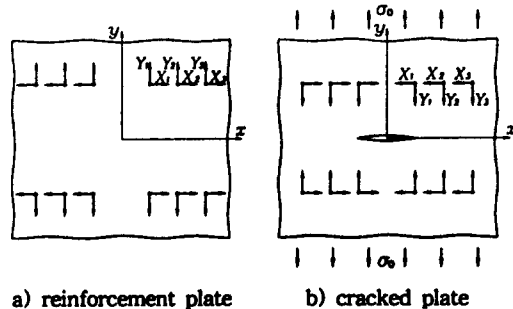


Fig. 2 Free body diagram of the reinforced cracked plate subjected to remote normal stress

강력은 그 절대값이 같다.

균열의 중앙에 좌표의 원점을 둔 균열판이 임의의 점 $z_0(=x_0, y_0)$ 에 x 와 y 방향으로 집중하중 X 와 Y 를 받는 경우에 대한 응력함수¹⁸⁾에 의하여 변위를 구한 후 이를 중첩함으로써, 균열에 대하여 상하 좌우 대칭으로 4점에 집중하중을 받는 균열판에 대한 변위의 식을 구하면 다음과 같다.

$$u_x = \frac{X}{4\pi\mu} \{H'(z, z_0) + L'(z, z_0)\}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{X}{4\pi\mu} \{I'(z, z_0) + M'(z, z_0)\} \\ u_y &= \frac{Y}{4\pi\mu} \{J'(z, z_0) + N'(z, z_0)\} \\ v_y &= \frac{Y}{4\pi\mu} \{K'(z, z_0) + O'(z, z_0)\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u_x, v_x 는 각각 집중하중 X 에 의한, 그리고 u_y, v_y 는 집중하중 Y 에 의한 x, y 방향의 변위이고 μ 는 전단계수, t 는 판두께이며, (z, z_0) 는 $(x, y; x_0, y_0)$ 를 나타내며

$$H' = \frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ \frac{\kappa}{2} \log \left| \frac{A_{32}A_{34}}{A_{12}A_{14}} \right| + \frac{\alpha_1^2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1^2}{A_{14}} - \frac{\alpha_3^2}{A_{32}} - \frac{\alpha_3^2}{A_{34}} \right\}$$

$$I' = \frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}} \right\}$$

$$J' = \frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}} \right\}$$

$$K' = \frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ \frac{\kappa}{2} \log \left| \frac{A_{14}A_{34}}{A_{12}A_{32}} \right| + \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} + \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} - \frac{\alpha_4^2}{A_{14}} - \frac{\alpha_4^2}{A_{34}} \right\} \quad (2)$$

여기서

$$\alpha_1 = x - x_0, \alpha_2 = y - y_0, \alpha_3 = x + x_0, \alpha_4 = y + y_0$$

$$A_{ij} = \alpha_i^2 + \alpha_j^2 \quad \begin{cases} i = 1, 3 \\ j = 2, 4 \end{cases}$$

$$\kappa = \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu), & \text{평면응력} \\ (3 - 4\nu), & \text{평면변형률} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{(\kappa+1)} \left\{ 2y y_0 \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - (T_1 + U_1) \frac{1}{r r_0} - (V_1 + W_1) \frac{r_0}{r} \right\} \\ &\quad + (\kappa - 1) \left\{ - \frac{\alpha_2^2}{A_{12}^2} + \frac{\alpha_2^2}{A_{32}^2} - \frac{\alpha_4^2}{A_{14}^2} + \frac{\alpha_4^2}{A_{34}^2} \right. \\ &\quad \left. + (R_1 + S_1) y_0 \frac{r}{r_0} + (P_1 + Q_1) y_0 \frac{r_0}{r} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} (\kappa - 1)^2 \log \left| \frac{D(-x_0, -y_0) G(-x_0, -y_0)}{B(x_0, -y_0) C(x_0, y_0)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{1}{(\kappa+1)} \left[- \frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}} \right. \\ &\quad \left. + 2y y_0 \left\{ 2 \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (T_2 + U_2) \frac{1}{r r_0} + (V_2 + W_2) \frac{r_0}{r} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{14}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{12}} - \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{32}} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\kappa + 1) (R_2 + S_2) y_0 \frac{r}{r_0} - (\kappa - 1) (P_2 + Q_2) y_0 \frac{r_0}{r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\kappa^2 - 1) (\theta_B + \theta_C - \theta_D - \theta_G) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N' &= \frac{1}{(\kappa+1)} \left[- \frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}} \right. \\ &\quad \left. + 2y y_0 \left\{ 2 \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{A_{12}^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{A_{14}^2} + \frac{\alpha_3\alpha_2}{A_{32}^2} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{A_{34}^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (T_2 - U_2) \frac{1}{r r_0} + (W_2 - V_2) \frac{r_0}{r} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{14}} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{12}} + \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{34}} - \frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{32}} \right) \\
& + (\kappa - 1) (S_2 - R_2) y_0 \frac{r}{r_0} + (\kappa + 1) (P_2 - Q_2) y \frac{r_0}{r} \\
& + \frac{1}{2} (\kappa^2 - 1) (\Theta_b - \Theta_c + \Theta_d - \Theta_e) \left. \right] \\
O' = & \frac{1}{(\kappa + 1)} \left[2y y_0 \left\{ -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} + (T_1 - U_1) \frac{1}{rr_0} + (W_1 - V_1) \frac{r_0}{r} \right\} \right. \\
& + (\kappa + 1) \left\{ \frac{\alpha_4^2}{A_{14}} + \frac{\alpha_4^2}{A_{34}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{12}} - \frac{\alpha_2^2}{A_{32}} \right. \\
& \left. + (S_1 - R_1) y_0 \frac{r}{r_0} + (P_1 - Q_1) \frac{yr_0}{r} \right\} \\
& + \frac{1}{4} (\kappa + 1)^2 \cdot \\
& \left. \log \left| \frac{C(x_0, y_0) G(-x_0, y_0)}{B(x_0, -y_0) D(-x_0, -y_0)} \right| \right]
\end{aligned}$$

$$r = \{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]\}^{1/4}$$

$$r_0 = \{[(x_0-a)^2 + y_0^2][(x_0+a)^2 + y_0^2]\}^{1/4}$$

$$\Delta(\xi, \eta) = \{\Delta_L(\xi, \eta)\}^2 + \{\Delta_U(\xi, \eta)\}^2$$

$$(\Delta = B, C, D, G, \xi = \pm x_0, \eta = \pm y_0)$$

$$\Delta_L(\xi, \eta) = x\xi - y\eta - \text{sign}(\xi) a^2 \\ + rr_0 \cos\{\theta + \text{sign}(\xi)\text{sign}(\eta)\theta_0\}$$

$$\Delta_U(\xi, \eta) = x\eta + y\xi + rr_0 \sin\{\theta + \text{sign}(\xi)\text{sign}(\eta)\theta_0\},$$

$$\text{sign}(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Theta_\Delta = \tan^{-1} \left(\frac{\Delta_U(\xi, \eta)}{\Delta_L(\xi, \eta)} \right) \quad (\Delta = B, C, D, G)$$

$$P_1 = \left(\frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) \cos\theta_p + \left(\frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) \sin\theta_p$$

$$Q_1 = \left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \cos\theta_m + \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \sin\theta_m$$

$$R_1 = \left(\frac{\alpha_4}{A_{14}} - \frac{\alpha_2}{A_{32}} \right) \cos\theta_p + \left(\frac{\alpha_3}{A_{32}} - \frac{\alpha_1}{A_{14}} \right) \sin\theta_p$$

$$S_1 = \left(\frac{\alpha_4}{A_{34}} - \frac{\alpha_2}{A_{12}} \right) \cos\theta_m + \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} - \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \sin\theta_m$$

$$T_1 = \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) (x_0 \cos\theta_p + y_0 \sin\theta_p) \\ + \left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) (y_0 \cos\theta_p - x_0 \sin\theta_p)$$

$$U_1 = \left(\frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) (y_0 \cos\theta_m + x_0 \sin\theta_m) \\ - \left(\frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) (x_0 \cos\theta_m - y_0 \sin\theta_m)$$

$$V_1 = \left(\frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} \right) \cos\theta_p \\ + 2 \left(\frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} \right) \sin\theta_p$$

$$W_1 = \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} \right) \cos\theta_m \\ + 2 \left(\frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} \right) \sin\theta_m$$

$$P_2 = \left(\frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) \cos\theta_p - \left(\frac{\alpha_4}{A_{14}} + \frac{\alpha_2}{A_{32}} \right) \sin\theta_p$$

$$Q_2 = \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \cos\theta_m - \left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \sin\theta_m$$

$$R_2 = \left(\frac{\alpha_3}{A_{32}} - \frac{\alpha_1}{A_{14}} \right) \cos\theta_p + \left(\frac{\alpha_2}{A_{32}} - \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) \sin\theta_p$$

$$S_2 = \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} - \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) \cos\theta_m + \left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} - \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) \sin\theta_m$$

$$T_2 = \left(\frac{\alpha_1}{A_{12}} + \frac{\alpha_3}{A_{34}} \right) (y_0 \cos\theta_p - x_0 \sin\theta_p)$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\alpha_2}{A_{12}} + \frac{\alpha_4}{A_{34}} \right) (x_0 \cos \theta_p + y_0 \sin \theta_p) \\
 U_2 = & \left(\frac{\alpha_2}{A_{32}} + \frac{\alpha_4}{A_{14}} \right) (x_0 \cos \theta_m - y_0 \sin \theta_m) \\
 & + \left(\frac{\alpha_1}{A_{14}} + \frac{\alpha_3}{A_{32}} \right) (y_0 \cos \theta_m + x_0 \sin \theta_m) \\
 V_2 = & 2 \left(\frac{\alpha_1 \alpha_4}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3 \alpha_2}{A_{32}^2} \right) \cos \theta_p \\
 & + \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_4^2}{A_{14}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{A_{32}^2} \right) \sin \theta_p \\
 W_2 = & 2 \left(\frac{\alpha_3 \alpha_4}{A_{34}^2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{A_{12}^2} \right) \cos \theta_m \\
 & - \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{A_{12}^2} - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_4^2}{A_{34}^2} \right) \sin \theta_m \\
 \theta = & \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x-a} + \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right) \\
 \theta_0 = & \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \frac{y_0}{x_0-a} + \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0+a} \right) \\
 \theta_p = & \theta + \theta_0, \quad \theta_m = \theta - \theta_0 \tag{3}
 \end{aligned}$$

여기서 a 는 균열길이의 반이며 ν 는 Poisson비이다.

접합점에 발생하는 힘 X, Y 는 접합점의 지름에 걸쳐 분포되어 작용한다고 가정한다. 접합점의 지름 d 에 걸쳐 분포된 대칭 하중에 의한 균열판의 변위는 식 (1)을 이용하여 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 u_x = & \frac{X}{4\pi\mu t} \{H(z, z_0) + L(z, z_0)\} \\
 v_x = & \frac{X}{4\pi\mu t} \{I(z, z_0) + M(z, z_0)\} \\
 u_y = & \frac{Y}{4\pi\mu t} \{J(z, z_0) + N(z, z_0)\} \\
 v_y = & \frac{Y}{4\pi\mu t} \{K(z, z_0) + O(z, z_0)\} \tag{4}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{2}{(\kappa+1)d} \\
 & \left[\left\{ \frac{\kappa}{2} \left(\alpha_4 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2} \right| \right. \right. \\
 & - \left(\alpha_4 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2} \right| \\
 & + \left(\alpha_2 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2} \right| \\
 & \left. \left. - \left(\alpha_2 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{\alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2} \right| \right\} \\
 & + (\kappa-1) \left\{ \alpha_3 \left[\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_3 d}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right) \right] \right. \\
 & \left. - \alpha_1 \left[\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_1 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right) \right] \right\} \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{1}{(\kappa+1)d} \cdot \\
 & \left[\alpha_1 \log \left| \frac{\{\alpha_1^2 + (\alpha_2 + d/2)^2\} \{\alpha_1^2 + (\alpha_4 + d/2)^2\}}{\{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - d/2)^2\} \{\alpha_1^2 + (\alpha_4 - d/2)^2\}} \right| \right. \\
 & \left. - \alpha_3 \log \left| \frac{\{\alpha_3^2 + (\alpha_2 + d/2)^2\} \{\alpha_3^2 + (\alpha_4 + d/2)^2\}}{\{\alpha_3^2 + (\alpha_2 - d/2)^2\} \{\alpha_3^2 + (\alpha_4 - d/2)^2\}} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$J = \frac{1}{(\kappa+1)d} \left[\alpha_2 \log \left| \frac{\{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_2^2\} \{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2\}}{\{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2\} \{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2\}} \right| - \alpha_4 \log \left| \frac{\{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_4^2\} \{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_4^2\}}{\{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_4^2\} \{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_4^2\}} \right| \right]$$

$$K = \frac{2}{(\kappa+1)d} \cdot \left[\frac{\kappa}{2} \left\{ \left(\alpha_1 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_1 + d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| - \left(\alpha_1 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_1 - d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| + \left(\alpha_3 + \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_3 + d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| - \left(\alpha_3 - \frac{d}{2} \right) \log \left| \frac{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_4^2}{(\alpha_3 - d/2)^2 + \alpha_2^2} \right| \right\} + (\kappa-1) \left\{ \alpha_4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_4 d}{\alpha_1^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_4 d}{\alpha_3^2 + \alpha_4^2 - d^2/4} \right) \right) - \alpha_2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_2 d}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_2 d}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2 - d^2/4} \right) \right) \right\} \right]$$

$$\Phi = \frac{1}{d} \int_{y_0 - d/2}^{y_0 + d/2} \Phi'(x, y; x_0, \xi) d\xi, \quad \Phi = L, M$$

$$\Omega = \frac{1}{d} \int_{x_0 - d/2}^{x_0 + d/2} \Omega'(x, y; \xi, y_0) d\xi, \quad \Omega = N, O \quad (5)$$

식 (4)로부터 균열이 없는 무한 평판에 대칭분포 하중이 작용하는 것에 대한 x 와 y 방향의 변위 u_{nx} , u_{ny} 와 v_{nx} , v_{ny} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{nx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} H(z, z_0) \\ v_{nx} &= \frac{X}{4\pi\mu t} I(z, z_0) \\ u_{ny} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} J(z, z_0) \\ v_{ny} &= \frac{Y}{4\pi\mu t} K(z, z_0) \end{aligned} \quad (6)$$

균열이 있는 무한평판이 먼 거리에서 균열면에 수직방향으로 균일한 수직응력 σ_0 를 받는 경우, 변위는 다음과 같다¹⁹⁾.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_0}{4\mu} \mathbf{U}(z) \\ v &= \frac{\sigma_0}{4\mu} \mathbf{V}(z) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{\kappa r - (x^2 + y^2 - a^2)/r\} \cos\theta - (\kappa+1)x/2 \\ \mathbf{V} &= \{\kappa r - (x^2 + y^2 - a^2)/r\} \sin\theta - (\kappa-3)y/2 \end{aligned} \quad (8)$$

Fig. 1의 각 접합점에서는 다음과 같은 변위적합 조건 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} u_{pk} - u_{rk} &= 0 \\ v_{pk} - v_{rk} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 u_{pk} , u_{rk} 와 v_{pk} , v_{rk} 는 각각 균열판과 보강판의 접합점 k 에서의 x 와 y 방향 변위이다.

Fig. 2의 접합점 k 에서의 x , y 방향 변위는 식 (4), 식 (6)과 식 (7)의 중첩에 의하여 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 u_{rk} &= \frac{1}{4\pi\mu_r t_r} \sum_{l=1}^N \{X_l H_{kl}^r + Y_l J_{kl}^r\} \\
 v_{rk} &= \frac{1}{4\pi\mu_r t_r} \sum_{l=1}^N \{X_l I_{kl}^r + Y_l K_{kl}^r\} \\
 u_{pk} &= \frac{\sigma_0}{4\mu_p} \mathbf{U}_k - \frac{1}{4\pi\mu_p t_p} \\
 &\quad \sum_{l=1}^N \{X_l (H_{kl}^p + L_{kl}^p) + Y_l (J_{kl}^p + N_{kl}^p)\} \\
 v_{pk} &= \frac{\sigma_0}{4\mu_p} \mathbf{V}_k - \frac{1}{4\pi\mu_p t_p} \cdot \\
 &\quad \sum_{l=1}^N \{X_l (I_{kl}^p + M_{kl}^p) + Y_l (K_{kl}^p + O_{kl}^p)\} \\
 &\quad (k, l = 1, 2, \dots, N) \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서 H_{kl}^r 은 보강판의 $H(z_k, z_l)$ 를 나타내고 다른 유사 기호도 유사한 의미를 갖는다.

식 (10)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$[C] \{F\} = \pi\sigma_0 \{U\} \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 [C] &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{kl} & \mathbf{B}^{kl} \\ \mathbf{D}^{kl} & \mathbf{E}^{kl} \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_l \\ \bar{Y}_l \end{Bmatrix}, \\
 \{U\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{Bmatrix} \quad (k, l = 1, 2, \dots, N) \quad (12)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{kl} &= \frac{1}{\gamma} H_{kl}^r + H_{kl}^p + L_{kl}^p \\
 \mathbf{B}^{kl} &= \frac{1}{\gamma} J_{kl}^r + J_{kl}^p + N_{kl}^p \\
 \mathbf{D}^{kl} &= \frac{1}{\gamma} I_{kl}^r + I_{kl}^p + M_{kl}^p \\
 \mathbf{E}^{kl} &= \frac{1}{\gamma} K_{kl}^r + K_{kl}^p + O_{kl}^p \\
 \bar{X}_l &= X_l / t_p, \quad \bar{Y}_l = Y_l / t_p \\
 \gamma &= \mu_r t_r / \mu_p t_p \quad (13)
 \end{aligned}$$

2. 1 응력세기계수

균열의 중앙에 원점을 둔 직교좌표에 대하여 상하좌우로 대칭인 점 z_0 에 대칭의 집중하중 X, Y 를 각각 x, y 방향으로 받는 무한평판에서 균열선단에 발생하는 응력세기계수는 다음 식으로 나타내어진다.²⁰⁾

$$\begin{aligned}
 K_{lx} &= X/t \sqrt{a/\pi} \mathbf{S}_x'(z_0) \\
 K_{ly} &= Y/t \sqrt{a/\pi} \mathbf{S}_y'(z_0) \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_x' &= -\frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ (\kappa-1) \frac{\cos\theta_0}{r_0} - \frac{2y_0}{r_0^3} \cdot \right. \\
 &\quad \left. (x_0 \sin 3\theta_0 - y_0 \cos 3\theta_0) \right\} \\
 \mathbf{S}_y' &= \frac{2}{(\kappa+1)} \left\{ (\kappa+1) \frac{\sin\theta_0}{r_0} - \frac{2y_0}{r_0^3} \cdot \right. \\
 &\quad \left. (x_0 \cos 3\theta_0 + y_0 \sin 3\theta_0) \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

K_{lx}, K_{ly} 는 각각 집중하중 X, Y 에 의하여 발생하는 모드 I 응력세기계수이다.

길이 d 에 걸쳐 균일하게 분포된 하중이 대칭으로 작용할 경우의 응력세기계수는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}
 K_{lx} &= X/t \sqrt{a/\pi} \mathbf{S}_x(z_0) \\
 K_{ly} &= Y/t \sqrt{a/\pi} \mathbf{S}_y(z_0) \quad (16)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_x &= \frac{1}{d} \int_{y_0-d/2}^{y_0+d/2} \mathbf{S}_x'(x_0, \xi) d\xi \\
 \mathbf{S}_y &= \frac{1}{d} \int_{x_0-d/2}^{x_0+d/2} \mathbf{S}_y'(\xi, y_0) d\xi \quad (17)
 \end{aligned}$$

Fig. 2 b)와 같이 각 상한에 두개 이상의 접합점

으로 보강된 균열판의 응력세기계수는 중첩에 의하여 다음과 같다.

$$K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi a} - \sqrt{a/\pi} [\mathbf{S}] \{ \mathbf{F} \} \quad (18)$$

여기서

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}_x^l \mathbf{S}_y^l] \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (19)$$

여기서 \mathbf{S}_x^l 는 균열판의 $\mathbf{S}_x(z_l)$ 를 의미한다.

식(11)을 식(18)에 대입하면 다음의 결과식을 얻는다.

$$\frac{K_1}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = 1 - [\mathbf{S}] [\mathbf{C}]^{-1} \{ \mathbf{U} \} \quad (20)$$

3. 검토 및 고찰

3.1 이론의 검증

본 이론의 타당성을 검증하기 위하여 Fig. 3과 같은 Poe⁶⁾의 모델을 $w = p = d$ 이며 균열의 상하에 무한개의 접합점이 균열과 평행하게 1행(row)으로 배치된 경우에 대해서 응력세기계수를 비교 검토한다.

Table 1은 이와 같은 조건에 대하여 본 이론에 의한 응력세기계수(SIF)와 Poe의 이론에 의한 값

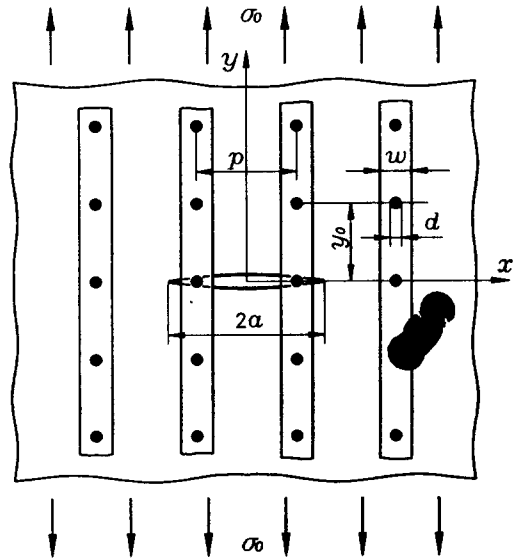


Fig. 3 Cracked plate reinforced with stringers⁶⁾.

을, 균열에서 접합점까지의 거리 y_0 와 피치 $p (= d = w)$ 에 따라 비교하였다. 결과에 의하면, 본 이론에 의한 값은 Poe의 이론에 의한 값보다 0.3~4% 적은 값을 갖는데 이러한 차이는 주로 Poe의 모델에서 보강판이 w 길이마다 분할된 것이기인하는 것으로 사료된다.

Fig. 4는 균열과 접합점 거리 y_0 와, 보강판과 균열판의 강성비(stiffness ratio) γ 에 따르는 응력세기계수의 값을 Poe의 결과와 비교한 것이다. 여기

Table 1. Comparison between the present and the previous solutions⁶⁾.

y_0/a	$K_1/\sigma_0 \sqrt{\pi a}$								
	$p/a = 0.1$			$p/a = 0.2$			$p/a = 0.3$		
	Poe ⁶⁾	present	difference (%)	Poe ⁶⁾	present	difference (%)	Poe ⁶⁾	present	difference (%)
0.2	0.1529	0.1525	-0.26	0.1531	0.1516	-1.00	0.1602	0.1555	-2.93
0.3	0.1868	0.1860	-0.43	0.1852	0.1852	-0.48	0.1873	0.1858	-0.80
0.4	0.2152	0.2136	-0.44	0.2140	0.2126	-0.65	0.2139	0.2124	-0.70
0.5	0.2395	0.2373	-0.92	0.2383	0.2359	-1.01	0.2378	0.2355	-1.00
0.7	0.2812	0.2768	-1.56	0.2793	0.2746	-1.68	0.2786	0.2739	-1.69
	$p/a = 0.5$			$p/a = 0.7$			$p/a = 0.9$		
0.8	0.2952	0.2895	-1.93	0.2949	0.2899	-1.70	0.3008	0.2886	-4.06
1.0	0.3247	0.3172	-2.31	0.3242	0.3171	-2.20	0.3255	0.3166	-2.73
1.2	0.3483	0.3398	-2.44	0.3476	0.3395	-2.33	0.3477	0.3392	-2.44
1.5	0.3750	0.3662	-2.35	0.3741	0.3656	-2.27	0.3736	0.3653	-2.22
2.0	0.4027	0.3958	-1.71	0.4023	0.3948	-1.86	0.4016	0.3943	-1.82

서도 역시 본 이론에 의한 값이 Poe의 이론에 의한 값보다 0.3~4% 적은 값을 갖는다.

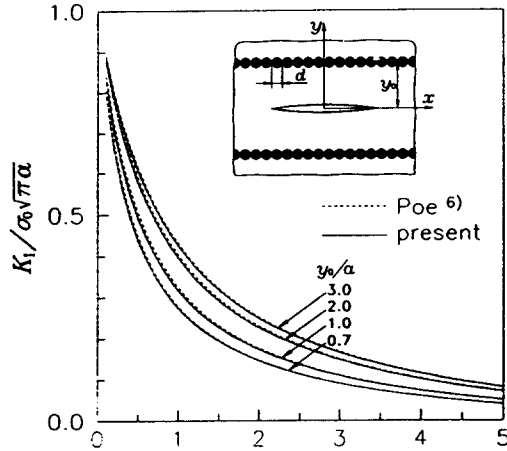


Fig. 4 Normalized mode I SIF as a function of stiffness ratio γ ($p/a = 0.7$, $d = p = w$).

3.2 고찰

이하의 계산에서는 $\gamma = 1$, $\nu = 0.3$, $d/a = 0.2$ 를 사용하였다.

Fig. 5는 접합점 행의 수 m 과 접합점 열(column)의 수 n 이 각각 1인 경우, 접합점의 위치에 따른 응력세기계수를 보여준다. 그림에서 y_0 가 작을수록, 그리고 접합점이 균열선단에 가까울수록 응력세기계수가 낮음을 알 수 있다. 따라서 보강 효과가 커진다고 할 수 있다.

Fig. 6은 $m=1$, $n=2$ 일 경우 접합점 간의 거리 p 와 접합점의 x 거리 x_0 를 같게 한 상태에서 x_0 에 따른 응력세기계수를 보여준다. 그림에서 y_0 가 작을수록, 그리고 접합점의 하나가 균열선단에 가까이 있고 나머지 접합점이 균열선단 안쪽에 있을 때 보강효과가 큼을 알 수 있다.

Fig. 7은 $m=1$ 일 경우 접합점의 개수 n 의 증가에 따른 응력세기계수를 보여준다. 역시 y_0 가 작을수록 보강효과가 크며 균열선단 밖에 있는 접합점은 응력세기계수에 큰 영향을 주지 않으므로 보강 효과에 별 영향을 미치지 못한다고 할 수 있다.

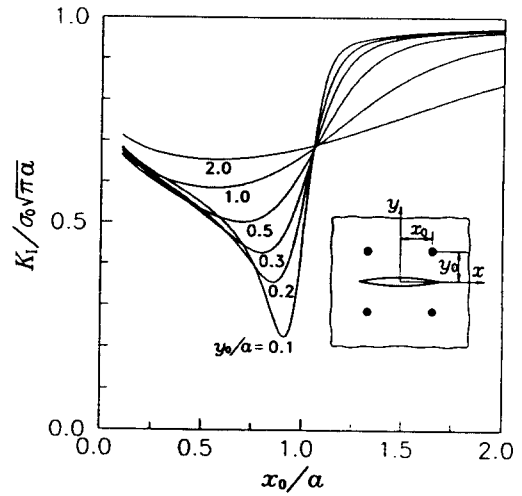


Fig. 5 Normalized mode I SIF as a function of the spot position in case of $n=1$ ($m=1$, $d/a=0.2$).

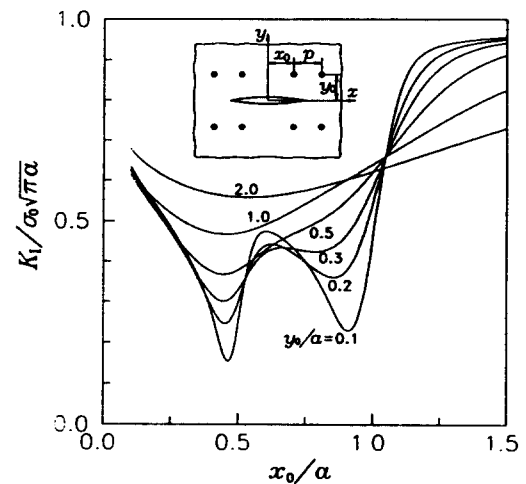


Fig. 6 Normalized mode I SIF as a function of the spot position in case of $n=2$ ($m=1$, $p=x_0$).

Fig. 8은 $n=2$ 일 경우 m 의 증가에 따라 보강효과가 커지나 한계 행수가 있음을 보인다.

Fig. 9는 $n=1$ 일 경우 접합점의 지름이 보강효과에 미치는 영향을 보여주며 접합점의 지름이 클수록 보강효과가 큼을 알 수 있다.

4. 결론

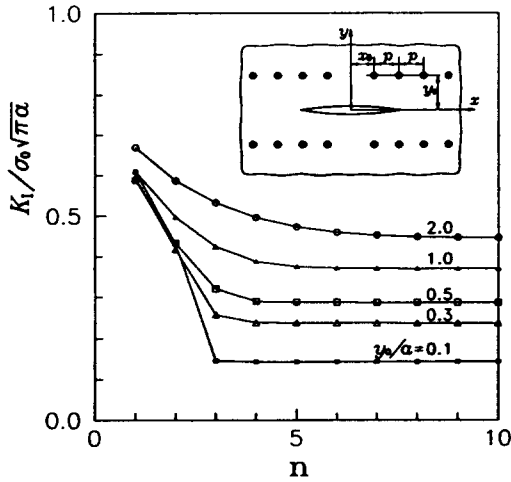


Fig. 7 Normalized mode I SIF as a function of the number of joining spots ($m=1, p/a=0.3, x_0=p$).

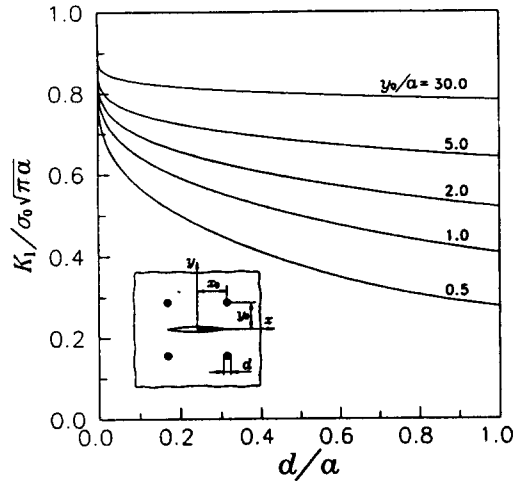


Fig. 9 Normalized mode I SIF as a function of the joining spot diameter ($x_0/a=0.7$).

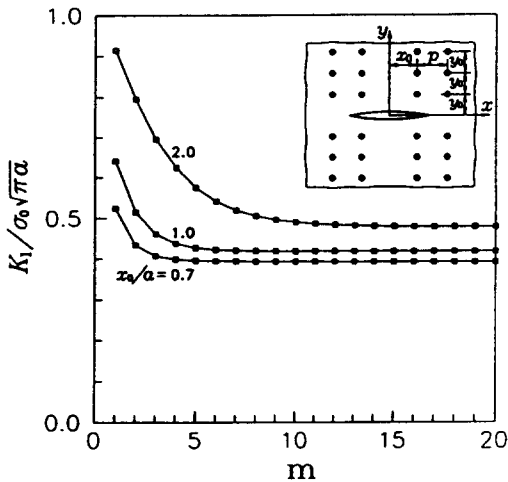


Fig. 8 Normalized mode I SIF as a function of m ($n=2, y_0/a=1.0, p=x_0$).

균열을 덮은 보강판은, 균열에 대하여 상하좌우 대칭인 임의의 위치에 점용접으로 부착하여 보강시킨 넓은 균열판이 먼 거리에서 균일한 수직응력을 받을 때 균열에 발생하는 응력세기계수를 구하는 이론적 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 점용접으로 판재를 부착하여 보강한 균열판

이 수직응력을 받는 경우에 대한 응력세기계수의 식을 유도하였으며 유도된 식은 기존의 이론에 의하여 검증한 결과 타당한 거동을 보인다.

2. 접합점의 위치는 모든 접합점들이 균열면에 가까울수록, 그리고 그 중 한 점이 균열선단에 가까울수록 보강효과가 크다.

3. 접합점이 균열면에 가까운 경우 균열선단 밖으로 접합점을 증가시켜도 보강에는 큰 효과가 없다.

참 고 문 헌

1. J. B. Chang and J. L. Rudd : Damage tolerance of metallic structures, ASTM STP 842, (1984), pp. 1-2
2. MIL-STD-1530A, Aircraft structural integrity program, Airplane Requirements, USAF, (1975)
3. MIL-A-83444, Damage tolerance design requirements for aircraft structures, USAF, (1974)
4. Advisory Circular, AC 25. 571-1A, Damage tolerance and fatigue evaluation of structure, FAA, (1986)

5. R. Greif and J. L. Sanders, Jr. : The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 32, No. 1, (1965), pp. 59-66
6. C. C. Poe, Jr. : Stress-intensity factor for a cracked sheet with riveted and uniformly spaced stringers, NASA TR R-358, (1971)
7. T. Nishimura : Stress intensity factors for a cracked stiffened sheet with cracked stiffeners, Trans. ASME, J. Engng Mat. and Tech. Vol. 113, (1991), pp. 119-124
8. T. Swift : Fracture analysis of adhesively bonded cracked panels, Trans. ASME, J. Engng Mat. and Tech., Vol. 100, (1978), pp. 10-15
9. R. Chandra, M. V. V. Murthy, T. S. Ramamurthy and A. K. Rao : Analytical estimation of stress intensity factors in patched cracked plates, Engng Fracture Mech., Vol. 21, No. 3, (1985), pp. 479-494
10. G. Dowrick, D. J. Cartwright and D. P. Rooke : Boundary effects for reinforced cracked sheet using the boundary element method, Theor. Appl. Fracture Mech., Vol. 12, (1990), pp. 251-260
11. J. R. Yeh : Fracture analysis of a stiffened orthotropic sheet, Engng Fracture Mech., Vol. 46, No. 5, (1993), pp. 857-866
12. R. Jones, R. J. Callinan and K. C. Aggarwal : Analysis of bonded repairs to damaged fiber composite structures, Engng Fracture Mech., Vol. 17, No. 1, (1983), pp. 37-46
13. R. Chandra and K. Guruprasad : Numerical estimation of stress intensity factors in patched cracked plates, Engng Fracture Mech., Vol. 27, No. 5, (1987), pp. 559-569
14. G. C. Sih and T. B. Hong : Integrity of edge-debonded patch on cracked panel, Theor. Appl. Fracture Mech., Vol. 12, (1989), pp. 121-139
15. J. Q. Tarn and K. L. Shek : Analysis of cracked plates with a bonded patch, Engng Fracture Mech., Vol. 40, No. 6, (1991), pp. 1055-1065
16. A. Young, D. P. Rooke and D. J. Cartwright : Analysis of patched and stiffened cracked panels using the boundary element method, Int. J. Solids Struct., Vol. 29, No. 17, (1992), pp. 2201-2216
17. MIL-HDBK-5C, Metallurgical joints, USAF, 1976
18. F. Erdogan : On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads, Proc. 4th. US. Nat. Congr. of Appl. Mech. ASME, Vol. 1, (1962), pp. 547-553
19. A. P. Parker : The mechanics of fracture and fatigue, E. & F. N. SPON LTD., (1981), pp. 12-14
20. 石田 誠 : き裂の 弾性解析と 應力擴大係數, 培風館 出版社, (1976)