

업종별 주가지수의 카오스 검정 및 비선형예측

白 雄 基*

<요 약>

'80년대 중반 들어 주가지수 예측모형으로 애용되던 시계열 예측모형에 대한 근본적인 의문이 제기되었다. 이것은 기존 예측모형이 선형 데이터 생성과정을 기본가정으로 채택하고 있지만 진정한 데이터 생성과정은 비선형일 수도 있다는 점에서 출발한다. 주가지수의 변동을 유발하는 경제의 기본구조가 비선형임에도 불구하고 이를 선형모형으로 접근한다면 주가의 움직임을 제대로 설명할 수 없을 뿐만 아니라 이러한 설정오류는 모형의 신뢰성을 크게 손상시킨다. 이와 같은 점에 착안하여 본 연구는 업종별 주가지수의 비선형 검정을 통해 주가가 어떠한 형태의 경제구조에서 생성되었는지 여러 가지 방법으로 검정한다. 10개 업종지수의 검정결과 보험업을 제외한 대부분의 업종지수가 카오스 끌개를 보유하고 있다는 증거가 포착되었다. 표본외 예측을 위해서 국지적 가중회귀법을 채택하였는데 예측결과 모형에 따라 6~7개 업종에서 통상최소자승법보다 예측력 우위를 보였다.

I. 서 론

주가지수 예측을 위한 전통적인 분석방법은 주가지수를 심리적 또는 기술적 지표로 설명하려는 시도와 시장의 기본요인으로 설명하려는 시도로 대별될 수 있다. 전자의 접근법은 주가 예측력의 우위에도 불구하고 자산가격의 변화에 대한 자기실현적 예측에 근거를 두었기 때문에 합리적 분석을 결여하고 있다는 비판을 받은 반면 후자는 우리나라의 주가변화를 경제여건의 변화 및 시장기본요인의 변화로 상당부분 설명할 수 있기 때문에 설득력을 얻고 있으나 예측력면에서 기술적 분석에 뒤떨어진다는 단점이 있다.

* 상명대학교 경제학과 조교수

** 초고를 읽고 귀중한 논평을 주신 익명의 심사위원과 연구조교로 수고한 한양대학교 신승원군에게 감사드립니다. 또한 본 연구에 필요한 자료를 제공해 주시고 격려를 아끼지 않으신 장은경제연구소의 민병균소장님에게도 감사드립니다. 그러나 본고에 남아있는 미비점들은 전적으로 필자의 책임임을 밝혀 둡니다.

기술적 분석은 주식거래에서 가장 보편적으로 사용되고 있는 예측방법임에도 불구하고 주가의 임의보행(random walk) 가설을 기각하기 어려웠던 90년대 이전에는 그 유용성을 입증할 수 없었다. 그러나 최근 Brock, Lakonishock, LeBaron(1992)의 연구로 주식거래에 있어 기술적 분석이 유용할 수 있다는 사실이 밝혀지고 주가의 임의보행 가설을 기각하는 연구 결과들이 발표되자 주가지수를 모형화하여 예측력을 높이려는 시도가 더욱 활발해졌다. 우리나라에서도 이근영(1995)은 동일한 방법을 적용함으로써 기술적 분석의 실용성이 이미 입증한 바 있다.

주식가격의 예측모형도 지난 20여 년 간 크게 발전되었다. 80년대 중반까지는 주가예측을 위한 단일시계열 모형 혹은 벡터자기회귀모형(VAR) 등이 활발하게 응용되었으나 80년대 후반에는 이와 같은 예측모형에 대한 근본적인 의문이 제기되었다. 근본적인 의문점은 기존 예측모형이 주식가격을 만들어 내는 데이터 생성과정을 선형이라고 가정하고 있는 반면 실제의 데이터 생성과정은 비선형일 수도 있다는 사실에서 출발한다.

선형모형은 복잡한 현실경제를 국지적으로 근사시키는 데 유용한 수단이 될 뿐만 아니라 비선형모형에 비하여 구조가 훨씬 단순하기 때문에 주가예측 모형으로 애용되어 왔다. 그러나 주가지수의 변동을 유발하는 현실 경제구조가 비선형이라면 현실경제를 선형모형으로 접근하는 데 한계가 있을 수밖에 없고, 이러한 설정오류는 모형의 신뢰성을 크게 손상시킬 것이다.

이와 관련하여 재무관리 분야에서는 비선형모형의 일종인 카오스모형에 관한 관심이 고조되었다.¹⁾ 수많은 비선형모형 가운데 카오스모형이 관심을 끌게 된 것은 카오스가 가지고 있는 특성 때문이다. 카오스는 비선형적 특성 때문에 육안에는 확률과정과 동일하게 관찰되지만 실제로는 확률적이 아닌 결정적 구조를 가진다. 따라서 주가지수를 선형모형화하기 이전에 우선 데이터 생성과정이 카오스 구조를 가지고 있는지 혹은 확률적 선형구조를 가지고 있는 지부터 조사하는 것이 올바른 모형작성과 예측력 향상을 위해 매우 중요하다.²⁾

1) 카오스모형과 비선형모형은 혼용되기도 하지만 카오스는 비선형모형의 일종일 뿐이다. 카오스의 일종인 대형 탱트맵은 선형독립성을 보이지만 비선형종속성을 가지고 있다. 이와 같은 점에서 비선형종속성은 카오스의 특성이라고 할 수 있다. 그러나 GARCH 모형과 같은 확률적 모형도 비선형종속성을 보유하고 있다. 본 연구는 비선형종속성을 보유하고 있는 여러 가지 모형중에서 카오스에 초점을 맞춘다. 최근 산업별 주식수익률을 대상으로 Hurst의 R/S분석을 적용하여 시계열종속성을 조사한 우리나라의 연구로는 김규영(1996) 등이 있다.

2) 지금까지 자산수익률에 관한 비선형 연구는 카오스모형 이외에도 GARCH (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) 모형과 같은 조건부 이분산 확률모형에 집중되었다. 주가의 비선형 GARCH 모형에 관한 연구는 Brock, Hsieh, LeBaron(1991) 참조.

카오스적인 자료생성과정으로부터 만들어진 데이터의 모형화는 주로 비모수적 방법이 사용되었다. 예를 들면 오류역전파(error backpropagation)모형과 회귀신경망(recurrent neural network)모형 등의 다양한 모형이 주가예측을 위해 사용된 바 있으며 예측력 면에서도 기존 시계열 모형에 비견되는 것으로 분석되었다.³⁾ 특히 오류역전파 모형은 입력과 출력 요소만 결정되면 쉽게 다양한 예측 모형으로 변환될 수 있고 신경망 아키텍처의 선정에 따라 예측력 향상이 기대되기 때문에 앞으로도 크게 발전될 가능성이 많다. 또한 이상빈·최우석(1995)은 주가의 카오스적 행태를 조사한 후 국지적 가중회귀(LWR: Locally Weighted Regression)모형을 원용하여 종합주가지수 예측을 시도했으나 주가 자신의 시차변수를 설명변수로 채택하지 않음으로써 모형의 동태적 카오스 행태를 반영하는 데는 미흡했다고 평가할 수 있다.

본고는 II장에서 카오스의 정의와 검정법을 개관한 후, III장에서 업종별 주가지수의 검정을 통해 카오스 여부를 계량적으로 검정한다. 이를 위해 허스트지수(Hurst Exponent), BDS 통계량, 리아푸노프지수(Lyapunov Exponent) 등을 계측한다.⁴⁾ 카오스 검정 결과에 따라 IV장에서는 카오스에 대해 비교적 높은 예측력을 보이는 국지적 가중회귀분석법(LWR)을 선택하여 표본의 예측을 실시함으로써 모형의 예측오차를 계산하여 통상최소자승법(OLS)의 예측오차와 비교한다. 마지막으로 V장에서는 결론을 내린다.

II. Chaos 개관

1963년 Lorenz에 의해 기상예측을 위한 컴퓨터 시뮬레이션 과정에서 발견된 카오스는 고전물리학에서 설명할 수 없었던 자연현상들을 설명할 수 있게 되었다. 그동안 확률적 현상으로만 여겼던 현상들에 대하여 카오스이론은 새로운 가능성 부여하였다.

카오스란 결정적 게임에도 불구하고 지극히 복잡하고 불규칙하면서 불안정한 행태를 보여준다는 특징을 지닌다. 카오스는 초기치에 민감한 특성이 있기 때문에 장기 예측이 불가능하다. 따라서 카오스의 예측은 초기치에 의존하는 결정적 인과성이 남아 있는 임계시간 이전의 시간대에서만 가능하다. 일반적으로 불안정성이 낮은 계

3) 우리나라의 종합주가지수예측을 위한 신경망 모형으로는 한재민·성시중(1995)의 오류역전파모형, 유태우·최원석·홍성범(1996)과 한인구·박종엽(1995)의 인공신경망모형 등이 있다.

4) 세부적 검정내용은 Frank and Stengos(1988), Brock and Baek(1991), Baek and Brock(1992), Baek(1993), Peters(1989), Malliaris and Philippatos(1993) 참조.

와 높은 정밀도의 관측이 가능한 계의 경우는 보다 긴 시간에 걸친 예측이 가능하지만, 불안정성이 높은 계나 낮은 정확도의 관측만 가능한 계는 단기 예측밖에는 허용되지 않는다.

카오스는 결정적 과정을 가지고 있는데 육안 혹은 기존의 검정방법으로는 임의보행과 구별이 용이하지 않으며, 카오스로부터 만들어진 시계열 자료는 서로 인접한 관측치들이 시간이 흐르면서 근접하지 못하고 오히려 발산하는 특성을 보인다(Brock (1986)). 이는 관측치를 생성해 내는 카오스 모형의 결정적인 동태구조 누락 때문이다.

1. 카오스의 정의

카오스를 수학적으로 정의하면 다음과 같다. 실변수 함수 f 가 있다고 하자. 임의의 점 x_0 를 출발점이라고 한다면 이번 기와 다음 기에는 함수 f 와 f^2 (단, $f^2 = f[f(x)] = f \cdot f(x)$)로부터 궤적을 얻는다. 따라서 시간의 흐름에 따라 관측치

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0) \quad (1)$$

가 만들어진다. 식 (1)에서 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 카오스라면 다음의 세 가지 조건을 만족시킨다.

(i) f 는 실수 공간 \mathbb{R} 위에서 조밀(dense)한 주기점들을 가진다.

주기점이란 $x=f^n(x)$ 을 만족하면 n 이 존재하는 경우이다. 그러나 $m < n$ 인 어떤 m 에 대해서도 $x \neq f^m(x)$ 이어야 한다. 조밀성이란 원래의 모집합을 모두 채울 수 있는 부분 집합 개념으로 실수에 대한 유리수 집합이 이에 해당된다. 조밀성을 해석학적으로 표현하자면 $u \in S$ 이고 $u < v$ 라고 할 때에 $u < p < v$ 를 만족하는 점 p 가 S 의 부분집합인 Q 의 원소로 존재한다. 이는 카오스에 대한 정규조건(regularity condition)이 된다.

(ii) f 가 위상학적으로 전이가능(topologically transitive)하다.

위상학적으로 전이가능하다는 것은 실수상의 어떠한 두 개의 개집합 U 와 V 에 대해서도 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ 를 만족시키는 양의 정수 k 가 반드시 존재한다는 조건이다. 즉, 서로 다른 근방(neighbor)들은 시간흐름에 따라 f 를 반복 적용함에 따라 반드시 겹치는 부분이 나타나야 한다. 이 조건은 끌개(attractor)가 서로 분리되지 않도록 제약하

는 역할을 수행한다. 따라서 이 조건이 만족된다면 끌개 전체는 서로 연결되어 있다고 볼 수 있다. 실수영역에서 조밀한 궤적이 존재한다면 이것은 정의상 위상학적으로 전이가능하다고 말할 수 있다.

(iii) 함수 f 는 초기조건 민감성 (sensitive dependence on initial conditions)을 가진다.⁵⁾

함수 f 가 초기조건 민감성이 있다면 f 로부터 만들어진 서로 인접한 두 궤적은 동행하지 않고 시간이 감에 따라 두 궤적의 괴리가 기하급수적으로 벌어진다. 따라서 한 궤적은 다른 궤적을 예측하는 데 아무런 도움을 주지 못하며 통상 나비효과 (butterfly effect)로 불리운다.⁶⁾

2. 카오스 검정방법

(1) R/S 분석과 허스트(Hurst)지수

R/S분석은 허스트가 시간이 흐름에 따라 평균기준으로 저수지의 물의 양이 어떻게 변하는가를 측정하는 데서 비롯되었다. 즉, 매년 유입되는 강수량은 유동적이기 때문에 정확한 양을 알 수 없고, 방출량은 인위적으로 운용되고 있으므로 적절한 저수량 정책의 효과는 평균적 방출량(M_N)에 대한 유입량(e_u)의 누적편차로써 측정될 수 있다. 이 측정값을 표준화하기 위하여 관측치의 표준편차로 나누어주는데 이러한 방법을 재조정범위(Rescaled Range: R/S)분석이라고 한다. 평균으로부터의 누적편차는 다음과 같이 계산된다.⁷⁾

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_N) \quad (2)$$

$X_{t,N}$ = N기간중 누적편차

e_u = u 기의 유입량

M_N = N 기간중 e_u 의 평균

5) 이 조건은 카오스의 홀마크로서 리아푸노프지수의 이론적 근거가 된다.

6) 주기배가 바이퍼케이션(period-doubling bifurcation)은 카오스에 도달하는 과정중 하나이기 때문에 이 특성을 카오스의 특성에 포함시키는 학자들도 있다. 그러나 본절에서는 카오스 영역에서 나타나는 특성을 언급하기 위하여 바이퍼케이션은 제외하기로 한다.

7) R/S분석 및 허스트지수의 측정에 관한 자세한 논의는 Peters(1991, p.62 참조)

누적편차의 범위 R 은 N 기간중의 $X_{t,N}$ 의 최대값과 최소값의 차이로 구해 진다.

$$R = \text{Max}(X_{t,N}) - \text{Min}(X_{t,N}) \quad (3)$$

허스트는 누적편차를 관찰값의 표준편차 S 로 나누어 줌으로써 모형을 일반화하였다. 이러한 재조정범위는 시간이 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이며, 허스트는 다음과 같이 경험적으로 허스트지수 H 를 측정하였다.

$$R/S = (a \cdot N)^H \quad (4)$$

R/S = 재조정 범위

H = 허스트지수

a = 상수

실증분석시에는 식 (4)의 양변에 \log 를 취하고 회귀분석을 실시함으로써 허스트지수를 추정할 수 있다.

$$\log(R/S) = H \cdot \log(N) + a \quad (5)$$

허스트지수는 일반적으로 $0 < H < 1$ 의 값을 갖는다. 허스트지수 추정치가 0.5라면 시계열 자료는 장기적 종속성이 없는 상태인 임의보행과정을 따르기 때문에 예측이 불가능함을 의미한다. 즉, 누적편차의 범위가 시간의 제곱근에 비례해서 증가하는 경우이다.

그러나 허스트지수 H 의 추정치가 0.5보다 작으면 시계열은 추세회귀적 성향을 보인다. 이 경우에는 시계열의 전기 값이 상승했다면 이번 기의 값은 하락할 가능성이 높아진다고 볼 수 있다. 따라서 $0 < H < 0.5$ 라면 $H=0.5$ 인 경우보다 시계열 등락의 빈도수가 커진다. 반면 H 가 0.5보다 크다면 현재 값이 과거 값으로부터 양의 방향 즉, 추세를 강화시키는 방향으로 영향을 받기 때문에 현재의 추세가 지속될 가능성이 크다. 만약 전기 값이 상승했다면 이번 기의 값도 상승할 가능성이 크다는 의미가 된다. H 가 1에 가까울수록 추세는 강화되는 경향이 있다.⁸⁾

8) 효율적 시장 가설에 따르면 $H=0.5$ 가 되어야 할 것이다.

카오스로부터 생성된 시계열의 허스트지수 H 는 N 의 값이 작다면 추세강화적인 현상을 보이기 때문에 $H > 0.5$ 이지만 N 이 커진다면 현재의 시계열 값이 미래값을 예측하는데 도움이 되지 않기 때문에 0.5에 수렴한다. 따라서 N 이 증가함에 따라 H 값이 변하는 시점의 N 은 기억효과가 지속되는 기간을 의미한다.

(2) 리아푸노프(Lyapunov)지수

단 한 개의 양의 리아푸노프지수만 있으면 카오스가 있다고 할 수 있을 정도로 리아푸노프지수와 카오스는 매우 밀접한 관계에 있다. 리아푸노프지수란 끌개를 형성하는 계의 평균적 안정성을 측정하도록 고안되었다. 예를 들면 한 개의 고정점 끌개의 경우에 리아푸노프지수들은 고정점에서 평가된 Jacobian 행렬식의 특성해의 절대값이라고 할 수 있다. 따라서 리아푸노프지수는 특성해를 일반화시킨 넓은 개념이라고 간주할 수 있다.

리아푸노프지수는 계의 자유도 만큼 존재한다. 자유도 2를 갖는 계에 대해서 두 점의 시간경로는 서로 분리되거나 서로 합해진다. 만약 두 궤적이 항상 서로 근접하는 방향으로 움직인다면 리아푸노프지수는 음이며 계는 수렴한다. 그러나 최소한 하나의 양의 리아푸노프지수가 있다면 서로 근접한 두 개의 궤적은 시간이 감에 따라 분리된다. 음의 리아푸노프지수는 계를 축소시키고, 양의 리아푸노프지수는 계를 확장시킨다. 계를 확장시키고 혹은 축소시키는 상호연관 작용으로 말미암아 카오스에는 흔히 심한 굴곡과 주름이 형성된다.

카오스 끌개에서 근접한 점들의 시간경로는 지수증가율로 분리된다. 따라서 이러한 계의 실제 시간경로는 출발점이 조금만 달라져도 나중에는 크게 달라진다. 처음 출발당시의 미세한 차이는 시간이 조금만 흘러도 엄청난 차이를 초래한다. 따라서 결정적 계의 동태방정식을 정확하게 알고 있다 하더라도 정확한 장기예측을 하기란 불가능하다. 이는 미세한 오차나 현재 상태에 대한 조그만 불확실성도 장기예측 전망을 어렵게 한다.⁹⁾

리아푸노프지수의 수학적 정의는 다음과 같다. 벡터 X 에 대한 동력학계를

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{7}$$

9) logistic map $x_{t+1}=4x_t(1-x_t)$ 의 경우 초기치가 0.3인 때와 0.30000001인 때를 비교하면 $t=29$ 일 때 x 값은 각각 0.00975와 0.37753으로 크게 달라진다.

라고 하자. X 는 N 개의 요소를 가진 벡터이고 F 는 f_1, f_2, \dots, f_N 으로 구성되어 있다. X 가 경제상태라고 하면 동태방정식은 시간이 흐름에 따라 경제상태의 변동을 의미한다. 이제 식(7)을 만족하는 특별한 시간경로 X_t^* 를 선택하고 초기에 임의의 작은 양의 충격 D_0 를 가한다. $X_t = X_t^* + D_t$ 를 식(7)에 대입하고 D 를 전개하면

$$\frac{dD}{dt} = \left. \frac{(\partial F)}{(\partial X)} \right|_{X=X^*} \cdot D + O(D^2) \quad (8)$$

식(8)에서 $(\partial F)/(\partial X)|_{X=X^*}$ 은 시간에 따라 변하는 $N \times N$ Jacobian 행렬식이 되며 $O(D^2)$ 는 2차 이하의 작은 항들을 집계한 것이다. $O(D^2)$ 를 무시하면 선형동차방정식(linear homogeneous equation)을 얻는다. 이 선형동차방정식의 해는

$$D_t = M_t D_0 \quad (9)$$

의 형태를 가진다. 일반적인 조건하에서 D_0 가 주어져 있다면 다음 극한값이 존재한다.¹⁰⁾

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |D_t| \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

식(10)에서 λ_i 를 궤적 X_t^* 와 D_0 에 대한 리아푸노프지수라고 정의한다. 따라서 리아푸노프지수는 자유도만큼 존재하게 된다.

(3) 콜모고로프(Kolmogorov) 엔트로피

카오스는 시간이 흐름에 따라 정보를 발생시킨다. 여기서 정보를 발생시킨다는 뜻은 실증분석으로는 구분이 되지 않던 두 개의 시점이 시간이 흐름에 따라 궤적상의 구별이 가능해진다는 것을 의미한다. 궤적이 서로 구분 가능해지는 평균속도가 바로 콜모고로프 엔트로피로 정의되며, 정보창출의 평균속도의 의미를 지닌다. 리아푸노프지수가 여러 방향으로의 확장과 수축을 수량화한 개념이라면 콜모고로프 엔트로피는 모든 방향으로의 확장을 총량화한 개념이다.

10) 극한값의 존재 조건은 Oseledec(1968)에 의하여 처음 증명되었기 때문에 이것을 Oseledec의 정리라고도 한다.

콜모고로프 엔트로피와 리아푸노프지수간의 관계는 중요하다. 어떤 특정한 여건 하에서는 $K = \sum_i \text{positive } \lambda_i$ 이 성립하며, 이보다 약한 가정 하에서 K 는 양의 리아푸노프지수들의 합에 대한 하한값이 된다(Eckmann과 Ruelle(1985) 참조). Grassberger와 Procaccia(1983)은 상관적분으로 K_2 를 정의한 후 $K_2 \leq K$ 임을 밝혔다. 즉,

$$K_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{C^M(\epsilon)}{C^{M+1}(\epsilon)} \right] \quad (11)$$

K_2 지수는 리아푸노프지수보다 계산이 용이하기 때문에 애용되고 있으나 양의 리아푸노프지수의 합을 다소 과소평가 하는 단점이 있다.¹¹⁾ 엔트로피 계측시에 K_2 는 대략적인 콜모고로프 엔트로피 값을 주기 때문에 단순히 카오스 존재 여부를 검증하기 위한 목적이라면 K_2 를 사용해도 무방하다.

(4) 상관차원과 BDS 통계량

BDS 통계량은 Brock, Dechert, Scheinkman 세 사람에 의해 1987년도에 작성된 통계량으로 후에 LeBaron의 시뮬레이션 결과를 덧붙여서 출판되었다(Brock, Dechert, LeBaron, Scheinkman(1996) 참조). BDS 통계량은 카오스뿐만 아니라 일반적으로 IID(Identically and Independently Distributed) 과정에 대해서도 높은 기각력을 가지기 때문에 통상 카오스를 포함한 비선형성 검정의 보조수단으로 이용된다. BDS 통계량을 정의하기 위해서 먼저 매립과정, 상관적분 및 상관차원 개념을 정의하기로 한다.

① 매립과정(Embedding Process)

시계열 $\{a_t\}$ 로 m -차원에 매립화시키는 과정은 (a_t, \dots, a_{t+m-1}) 과 같이 단순히 관측치 m 개를 중첩시킴으로써 완료된다.¹²⁾ 매립과정이 중요한 이유는 m -차원에 매립화된 시계열의 관측치들은 원래의 데이터 생성과정의 상태변수와 1-1 대응관계에 있기 때문이다 (Takens 정리(1984)). Takens 정리로부터 원래의 상태벡터 $\{x_t\}$ 대신 $\{a_t^m\}$ 를 살펴봄으로써 $F(\cdot)$ 가 저차원의 카오스 끌개를 가지는지 검정할 수 있는 근거를 얻는다.

11) Scheinkman과 LeBaron(1989)은 norm 계산시 sup norm을 사용한다면 K_2 로부터 재미있는 해석을 내릴 수 있다고 보았다. K_2 를 계산하면, $S^M = C^M(\epsilon)/C^{M-1}(\epsilon)$ 을 얻게 된다. 그런데 S^M 의 의미는 두 점의 과거 궤적이 가까울 때 앞으로도 가까울 조건부 확률이다. 주어진 ϵ 에 대해서 $\{X_t\}$ 가 독립이라면 S^M 은 M 과는 독립이다. 그러나 과거 X_t 값들이 미래를 예측하는 데 도움이 된다면 S^M 은 M 에 대해서 증가함수가 된다. 따라서 M 의 증가에 따른 S^M 의 행태변화로부터 독립성을 검증할 수 있다.

12) 이것을 m -history라고 한다.

② 상관적분(Correlation Integral)

상관적분은 주어진 시계열 자료가 매립차원을 증가시킴에 따라 얼마나 조밀하게 매립공간을 채워 나가는지 측정하는 방법이다. 예를 들면 IID 확률변수를 취하고 매립차원 m 을 증가시키면 m -history로 구성된 관측치들은 매립공간을 골고루 채워 나갈 것으로 기대된다. 그러나 tent map 과정으로부터 생성된 관측치들은 m 이 2로 증가하면 금방 텐트구조를 나타내기 때문에 2차원 매립공간을 골고루 채울 수 없다. 이러한 개념은 다음과 같은 방법으로 정형화할 수 있다. 상관적분 $C(\epsilon, T)$ 는 다음과 같이 정의된다.¹³⁾

$$C(\epsilon, T) = \text{Number} [(t, s) | 1 \leq t < s \leq T \text{ and } \|a_t - a_s\| < \epsilon] / T^* = \sum_{1 \leq t < s \leq T} I(a_t, a_s; \epsilon) / T^*$$

여기서 Number는 조건을 만족시키는 쌍의 개수를 의미하며 T^* 는 표본크기 T 에 대하여 $T(T-1)/2$ 가 된다. 또한 norm은 sup norm을 사용하기로 하며 지시함수(indicator function) $I(\cdot)$ 는 조건 $\|a_t - a_s\| \leq \epsilon$ 이 만족되면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 가진다.

상관적분은 척도모수 ϵ 의 함수이며 ϵ 값이 변함에 따라 분포함수와 마찬가지로 0부터 1의 값을 취한다. 수학적으로는 관측된 표본으로부터 두 개의 서로 다른 값으로 모든 가능한 쌍을 만들었을 때 그 거리가 ϵ 보다 같거나 작은 (t, s) 쌍의 전체에 대한 비율을 의미한다. 표본의 크기가 T 이므로 생성가능한 관측쌍은 모두 $T(T-1)/2$, 즉 T^* 이고 두 값의 거리가 ϵ 보다 같거나 작은 쌍의 개수는 모두 $\sum_{1 \leq t < s \leq T} I(a_t, a_s; \epsilon)$ 이 된다. 척도모수 ϵ 의 크기를 증가시킴으로써 새로 포착되는 쌍의 개수를 계수하면 공간적 상관의 정도를 파악할 수 있다. 다음절에 다시 설명하겠으나 이와 같이 얻어진 공간상관계수를 상관차원(correlation dimension)이라고 하고 ϵ 을 1% 증가시켰을 때 새로이 추가되는 쌍의 증가율로 해석한다. 부연하자면 상관차원은 변수 $\{a_t\}$ 의 척도모수 ϵ 에 대한 탄성치가 된다. 이제 고차원에서의 상관적분을 정의하기로 한다. m -차원의 상관적분 $C^m(\epsilon, T)$ 는 다음과 같이 정의된다.¹⁴⁾

$$C^m(\epsilon, T) = \text{Number} [(t, s) | 1 \leq t < s \leq T \text{ and } \|a_t^m - a_s^m\| < \epsilon] / T^*$$

단, $a_t^m = (a_t, a_{t+1}, \dots, a_{t+m-1})$, $a_s^m = (a_s, a_{s+1}, \dots, a_{s+m-1})$, $\|y\| = \sup(|y_i|, i=1, \dots, m)$ 이고 $T^* = (T-m+1)(T-m)/2$ 이다.

13) 자명한 경우에 한하여 $C(\epsilon, T)$ 는 $C(\epsilon)$ 와 같이 표본크기 T 를 생략한다. 위의 상관적분 개념은 Brock과 Baek(1991)에 의해 고차원 공간으로 확대되었으며 Baek과 Brock(1992)에서 다변수 경우로 응용되었다.
 14) $C(\epsilon, T)$ 와 마찬가지로 $C^m(\epsilon, T)$ 도 자명한 경우에는 $C^m(\epsilon)$ 와 같이 T 를 생략한다.

매립차원이 1인 경우는 앞의 정의와 일치하지만 $m > 1$ 이고 변수 $\{a_t\}$ 가 IID분포를 갖는 확률변수일 경우는 다음의 두 가지 정리가 성립한다.¹⁵⁾

정리 : 일반적인 조건하에서 $C(a, m; \varepsilon, T)$ 는 표본크기 T 가 ∞ 에 접근함에 따라 극한치 $C(a, m; \varepsilon)$ 을 가진다. 즉, $\lim_{T \rightarrow \infty} C(a, m; \varepsilon, T) = C(a, m; \varepsilon) = \Pr\{\|a_t^m - a_s^m\| < \varepsilon\}$. 단, a_t^m 와 a_s^m 은 결합누적분포함수 $\Pr\{a_t^m < a_s^m\}$ 로부터 독립적으로 추출한 것임.

정리 : $\{a_t\}$ 가 IID인 경우 $C(a, m; \varepsilon) = [C(a, 1; \varepsilon)]^m$ 가 성립한다.

③ 쪽거리 차원(Fractal Dimension)과 상관차원(Correlation Dimension)

통상 차원은 우리가 관심 있는 벡터 공간의 basis를 구성하고 있는 원소의 개수를 의미한다. 예를 들면 R^n 은 n -차원이며, 직사각형은 2차원상에 있는 물체이다. 2차원상의 물체를 3차원에 놓으면 어떤 특정한 방향으로 물체가 매우 얇게 나타나는 특징을 보인다. 그러나 이러한 개념으로는 확실히 계산하지 못하는 것이 있다.

Mandelbrot는 1967년에 영국해안의 길이가 얼마인지 궁금하였다. 물론 영국 해안선의 길이는 백과사전에 기록되어 있을 것이다. Mandelbrot는 서로 인접하고 있는 두 나라의 국경선의 길이를 백과사전을 통해서 조사해 보았는데 재미있는 사실을 발견할 수 있었다. 일반적으로 작은 나라의 백과사전에 국경의 길이가 더 길게 기록되어 있었다. 왜 그런 현상이 발생했을까? 작은 나라에서는 더 짧은 자로 국경선을 측량하기 때문이 아닐까? 측량자의 길이를 반으로 축소시키면 국경선의 길이는 더욱 길게 나타난다. 극단적으로 측량자의 길이를 무한히 줄인다면 국경선의 길이는 얼마가 될 것인가? 이렇게 짧은 측량자로 우리나라 남해안의 길이를 측량한다면 그 길이는 무한대가 될 것이며 영국 해안선의 길이도 당연히 무한대라는 결론이 나올 것이다.

측량자의 기본 길이를 ε 이라고 하자. 측량자로 해안선 혹은 국경선의 길이를 측정한다고 할 때 ε 을 축소시킴에 따라 늘어나야 하는 측량자의 증가율을 확정적인 수 D 라고 하자. 일반적으로 D 는 정수가 아니다. D 는 수학의 Hausdorff 차원과 같은 개념이 되며, Mandelbrot는 정수가 아닌 차원을 강조하여 쪽거리 (fractal) 차원이라는 말을 탄생시켰다. 이러한 개념을 염두에 둔다면 복잡한 구조를 가진 것일수록 쪽거리 차원은 증가하게 될 것이다.

Grassberger와 Procaccia는 상관적분을 사용하여 쪽거리 차원을 근사적으로 추정할 수 있는 방법을 개발하였다. 구체적인 측정방법은 시계열 자료를 m -차원의 벡터로

15) 이 정리는 Brock and Dechert(1988), Brock, Dechert, LeBaron, Scheinkman(1996)에 증명되어 있다.

재구성한 다음, 매립차원을 점차 증가시키고 척도모수 ϵ 도 아주 작은 수부터 점차 증가시키면서 상관적분 $C^m(\epsilon)$ 의 변화를 측정한다. 이때 쪽거리 차원 D 는 다음과 같은 관계식에 의하여 측정된다.

$$\log(C^m(\epsilon)) = D \log(\epsilon) + \text{상수}$$

매립차원 m 을 증가시키에 따라 D 는 어떠한 값에 수렴하게 되는데 수렴된 상태의 D 값을 상관차원이라 하고 이보다 큰 정수 차원이 시계열 자료를 설명할 수 있는 최소한의 요소의 개수가 된다.

④ BDS 통계량

BDS 통계량 W_m 은 상관적분에 기초한 것인데 기술적으로는 일종의 공간계열 상관 계수라고 할 수 있으며 IID 귀무가설하에서 관측치 T 가 무한대로 수렴함에 따라 통계량 W_m 이 표준 정규분포 $N(0,1)$ 의 분포에 수렴한다.¹⁶⁾ BDS 통계량 W_m 은 다음과 같이 정의된다.

$m \geq 2$ 이고 $\{X_t\}$ 가 IID 분포를 갖는 확률변수라면

$$W_m(\epsilon) = T^{1/2}[C_{m,T}(\epsilon) - C_{1,T}(\epsilon)^m] \rightarrow N(0, V_m)$$

여기서 V_m 은 BDS 통계량의 분산으로

$$V_m = 4[K^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2m-2}] \text{ 이 된다. }^{17)}$$

단, $C = E[I(X_t, X_s; \epsilon)] = \int [F(X + \epsilon) - F(X - \epsilon)] dF(X)$ 이고

$$K = E[I(X_t, X_s; \epsilon)I(X_s, X_u; \epsilon)] = \int [F(X + \epsilon) - F(X - \epsilon)]^2 dF(X)$$

16) Brock and Sayers(1988)는 BDS 통계량을 미국의 경기지수 및 관련 변수들에 적용한 바 있다.

17) $C(X,1; \epsilon)$ 와 $K(X; \epsilon) = \frac{6}{T(T-1)(T-2)} \sum_{1 \leq t < s < u \leq T} I(X_t, X_s; \epsilon)I(X_s, X_u; \epsilon)$ 은 각각 C 와 K 의 일치 추정량이 되므로 공식 V_m 에 사용된 C 와 K 대신 $C(X,1; \epsilon)$ 와 $K(X; \epsilon)$ 를 사용하면 V_m 의 일치추정량 $V_m(\epsilon)$ 을 구할 수 있다.

시계열 $\{X_t\}$ 가 IID라는 귀무가설하에서 BDS 표준화된 통계량 $WS_m(\varepsilon)$ 를 얻을 수 있는 데 이는

$$WS_m(\varepsilon) = T^{1/2}[C_{m,T}(\varepsilon) - C_{1,T}(\varepsilon)^m]/V_m(\varepsilon)^{1/2} \quad (12)$$

으로 정의되며 표준정규분포를 극한분포로 가진다.

BDS 검정법이 시계열의 계열종속이 있는 경우 왜 유용한지는 직관적 설명이 가능하다. 먼저 $[0,1]$ 구간에서 균일분포를 갖는 확률변수 $\{r_t\}$ 의 충분히 큰 표본을 얻는다. 이를 $[0,1]$ 의 폐쇄구간에 채우면 어떤 특정한 부분구간이나 점에 밀집되어 있지 않고 그 구간을 고루 매우게 된다. 따라서 $\{r_t\}$ 의 차원은 적어도 1차원이 됨을 알 수 있다. 그 후 매립과정을 거쳐 2차원의 점 $\{(r_t, r_{t+1})\}$ 을 만들고 이를 2차원 공간 $[0,1]^2$ 에 채운다. 만약 $\{r_t\}$ 가 독립이라면 $\{(r_t, r_{t+1})\}$ 역시 $[0,1]^2$ 의 2차원 공간에 균일하게 분포되므로 $\{r_t\}$ 는 2차원이 된다. 매립차원을 그 이상으로 증가시키더라도 고차원공간의 $[0,1]^m$ 을 모두 매우게 되므로 우리는 완전독립인 확률변수 $\{r_t\}$ 의 차원은 무한대라고 할 수 있다.¹⁸⁾

그러나 $\{r_t\}$ 가 AR(1) 과정을 갖거나 그 외의 다른 형태의 계열종속과정을 가질 경우 매립차원을 늘려 나갈 때 독립인 확률변수에 비해서 고차원공간을 채우는 분산도의 정도가 떨어지며 ε 에 대해 $C(X,m;\varepsilon)$ 은 $C(X,1;\varepsilon)^m$ 으로부터 괴리가 발생한다. BDS 검정법은 이 괴리 현상을 포착하여 독립성 검정을 수행하게 된다.

III. 카오스 검정결과

본 장에서는 II장 2절에서 논의한 검정방법중 R/S 분석 및 허스트지수, 리아푸노프지수, 상관차원, BDS 통계량 분석에 의해 1980년 1월부터 1996년 4월까지의 업종별 주가지수를 대상으로 카오스 존재 여부를 검정한다. 실증분석에 사용한 시계열자료는 음식료, 섬유·의복, 제지, 제약, 1차금속, 조립금속, 기계, 도소매, 은행, 증권, 화합물, 전기전자, 운수장비, 건설, 보험의 15개 업종의 월별주가지수로 종가기준의 일일주가지수의 월평균치이다.

18) BDS 검정법은 텐트맵과 같은 비선형 모형뿐만 아니라 선형종속모형에 대해서도 power를 보이기 때문에 BDS 실행 전에 적당한 linear filter를 사용하여 기본 선형구조를 제거함으로써 BDS가 비선형구조만 검정할 수 있도록 할 수 있다. 이러한 방법을 잔차검증법(residual based test)이라고 부른다.

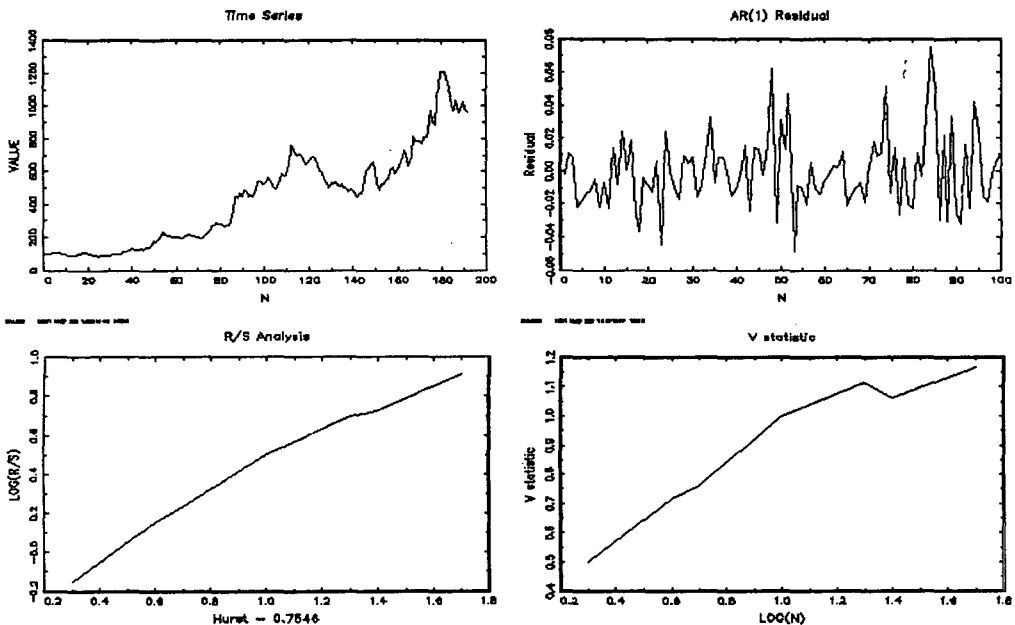
1. R/S 분석 및 허스트지수 결과

R/S 분석 및 허스트지수는 15개 업종분류중 V-statistic 추정 결과 선이 꺾이는 부분이 비교적 명확하게 나타나는 음식료, 섬유·의복, 제지, 제약, 1차 금속, 조립 금속, 기계, 도소매, 은행, 증권 등의 10개 업종에 대해서만 분석을 실시하였다. 검정에 사용된 입력자료는 원계열의 AR(1) 잔차를 사용하였다.¹⁹⁾ 허스트지수는 <표 1>과 같이 모두 0.5보다 크고 1보다 작게 추정되었기 때문에 10개 업종별 주가지수는 지속성이 강하며 비선형성 종속성의 존재를 암시하고 있다고 해석된다.

<표 1> 허스트지수 결과

구 분	음식료	섬유·의복	제지	제약	1차 금속	조립 금속	기계	도소매	은행	증권
허스트 지수	0.7546	0.7482	0.7286	0.7286	0.6914	0.7083	0.6805	0.7090	0.7147	0.6986

(그림 1) 음식료 업종지수, AR(1), 허스트지수, V-통계량



19) V-statistic은 $\log(R/S)$ 와 $\log(N)$ 의 그래프로부터 기울기 전환점을 더욱 잘 보기 위해 허스트가 개발한 것으로 $V_N = (R/S)/\sqrt{N}$ 로 정의된다. 만약 확률과정의 독립적이라면 \sqrt{N} 으로 나누어준 R/S는 평탄할 것이며, 지속성이 강하면 V_N 은 우상향, 회귀성이 강하면 V_N 은 우하향하는 기울기를 가진다. (Peters (1994), p.92 참조)

[그림 1]은 음식료업을 대상으로 업종주가지수, AR(1) 잔차, R/S분석과 허스트지수, V 통계량 등 네 가지 그림이 그려져 있다. 분석대상이 된 15개 업종중 화합물, 전기 전자, 운수장비, 건설, 보험 등의 분석에서는 V-통계량의 꺾인 점이 나타나지 않았기 때문에 구체적인 허스트지수를 측정하기 어려웠다.²⁰⁾

2. 리아푸노프지수 결과

카오스의 가장 중요한 특징은 “초기조건에 대한 민감성”이다. 이는 비선형계의 특징적 현상으로 Henon map, Lorenz map 등과 같은 연구를 통해서 이미 입증되었다. 비선형계의 초기조건 민감성은 이미 논의한 바 있는 리아푸노프지수로 측정할 수 있다. 이 지수는 상태공간에서 궤적이 얼마나 빨리 발산되는가를 측정한다.²¹⁾ 양의 리아푸노프지수는 상태공간에서 비선형계가 발산하고 있다는 사실을 알려주고, 음의 리아푸노프지수는 수렴 정도를 알려준다. 다른 관점에서 보면 양의 리아푸노프지수는 장래 예측력의 손실을 측정하는 것이라고도 해석할 수 있다. 음의 리아푸노프지수는 점들이 어떻게 서로 접근하는지를 측정하는데 한 점 끝개는 모두 음의 리아푸노프지수들로 구성될 때 나타난다.

비선형계에 대한 정확한 리아푸노프지수는 비선형방정식을 구할 수 없으므로 모든 자료에 대해 리아푸노프지수를 측정할 수는 없다. Wolf, Swift, Swinney, Vastano (1985)는 FORTRAN 프로그램을 이용하여 리아푸노프지수를 구하는 방법을 제시했다.²²⁾ 리아푸노프지수가 만약 0.03 이라면, 분석된 시계열 데이터는 1단위 시간이 지날 때마다 0.03의 초기값에 대한 성질을 잃어 가고 있다는 것이다. 따라서 1/0.03 단위시간이 지나면 초기값에 대한 성질을 모두 잃고 전혀 다른 새로운 국면에 접어들게 된다. 따라서, 본 연구에서 1달 단위의 주가지수 데이터 분석결과 리아푸노프지수가 0.1이면, 예측범위는 최대 10개월이라는 결론을 내릴 수 있게 된다.²³⁾ 실제로 리아푸노프지수는 입력 자료에 상관없이 항상 일정한 상수값을 가지지만 실제 자료는

20) 모든 업종에 대해 [그림 1]과 같은 그래프를 그려보았으나 지면관계상 음식료 업종지수에 관한 그래프만 논문에 포함시켰다.

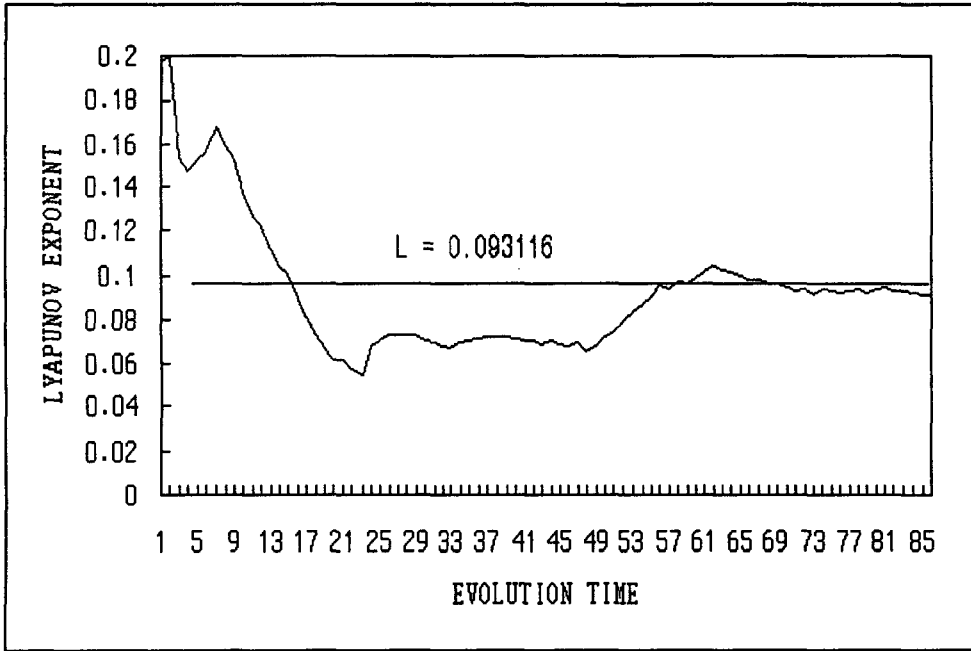
21) 즉, 시계열 데이터 초기값의 오차가 시간이 갈수록 얼마나 증폭되어 나타나는가를 측정하는 것으로 만약 오차의 진폭이 일정 수준을 넘어서게 되면, 그 이후 시간에 대한 예측은 불가능하게 된다.

22) 본 연구에서는 이 FORTRAN 프로그램을 Borland C++를 이용하여 전환한 프로그램을 이용하여 리아푸노프지수를 측정하였다.

23) 허스트지수를 사용하여도 예측범위에 관한 대략적인 추정을 할 수 있는데 [그림 1]의 음식료업종의 V-통계량이 꺾이는 시점이 약 1.3(=LOG(N))인 것으로 미루어 N=4.8개월이라고 할 수 있다. 따라서 리아푸노프지수에 의한 예측가능 범위가 허스트지수에 의한 기간보다는 길게 추정되었다.

많은 오차를 지니고 있으며 정확한 계의 성질을 파악하기 힘들기 때문에 리아푸노프 지수는 매개변수에 따라 다소의 변동이 있을 수 있다.

(그림 2) 음식료업종의 리아푸노프지수(0.093116)



<표 2> 리아푸노프지수 결과

구 분	음식료	섬유 의복	제지	제약	1차 금속	조립 금속	기계	도소매	은행	증권
리아푸노프 지수	0.093116	0.078391	0.08249	0.0553	0.08335	0.061378	0.047431	0.078334	0.098521	0.104488
예측가능 범위	10	12	12	18	12	16	21	12	10	10

위의 [그림 2]에는 음식료업종에 대한 리아푸노프지수가 그려져 있으며 <표 2>에는 <표 1>과 동일한 10개업종에 대한 리아푸노프지수 추정치와 그에 따른 예측가능 범위가 기록되어 있다.²⁴⁾ 10개업종에 대한 최대 리아푸노프지수 측정결과 전업종의

24) [그림 2]의 리아푸노프지수 L은 가장 큰 리아푸노프지수임. 리아푸노프지수계산시 매립차원, 근접성 평가를 위한 최대 및 최소거리, evolution time에 관한 기술적 논의는 Peters(1991)의 12장 참조.

지수가 양의 값을 취함으로써 카오스의 존재를 암시하고 있다. 그러나 리아푸노프지수값이 작아 통계적으로는 얼마나 유의한지 구체적으로 알 수 없었다.²⁵⁾ 리아푸노프지수의 크기는 증권, 은행, 음식료 순으로 측정되었기 때문에 예측가능한 범위도 증권, 은행, 음식료 순으로 길어진다고 결론지을 수 있다.

3. 상관차원 결과

음식료 업종을 비롯한 10개 업종의 Grassberger-Procaccia(GP) 도표 분석결과 대부분 업종의 상관차원이 <표 3>에 정리된 바와 같이 3~4로 나타났다.²⁶⁾ 이는 다음 장에서 제시할 예측모형에서 업종별 주가지수를 설명하기 위해서는 적어도 3~4개의 설명변수가 필요하다는 의미로 받아들일 수 있다. 또한 12차의 고차원 매립공간에서 측정된 상관차원이 3~4인 것으로 미루어 볼 때 측정된 매립차원의 추정치는 카오스 존재를 암시하고 있다고 볼 수 있다.

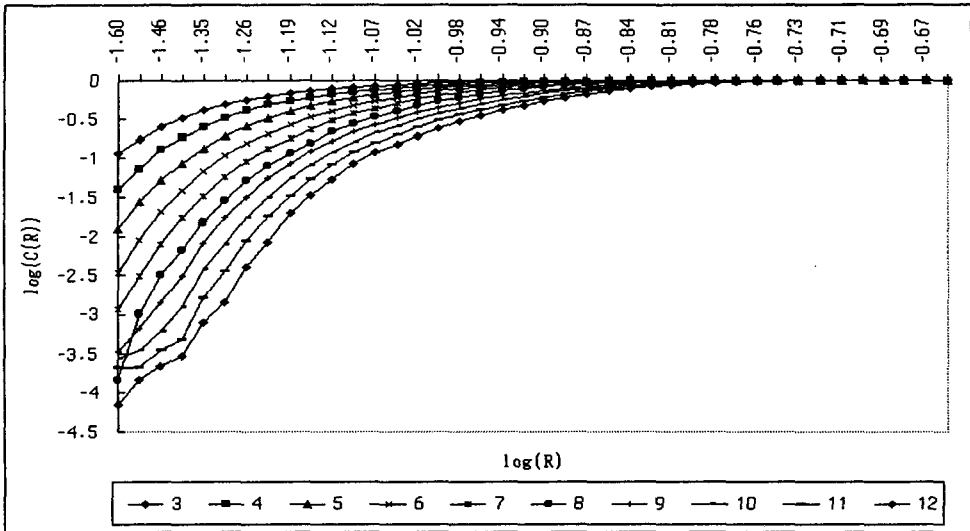
<표 3> 상관차원 결과

구 분	음식료	섬유의복	제지	제약	1차 금속	조립 금속	기계	도소매	은행	증권
상관차원	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4

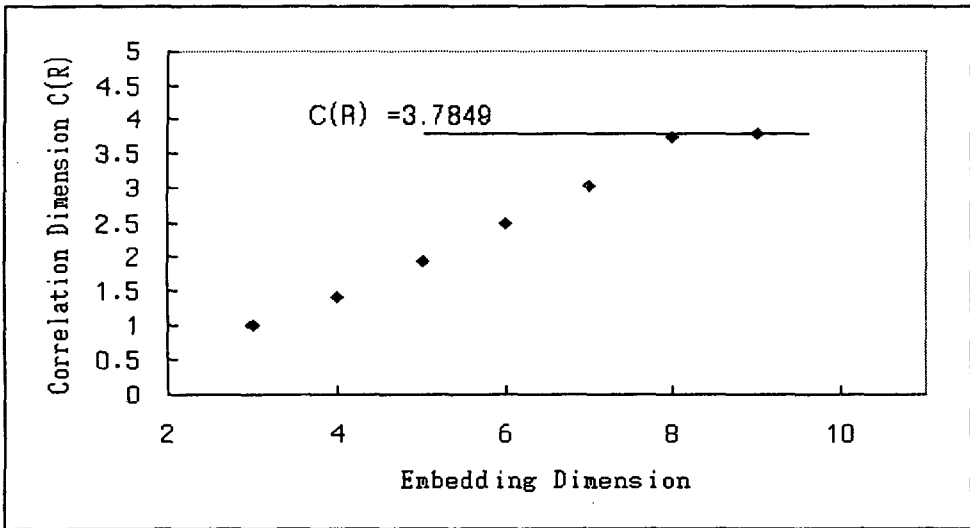
아래 [그림 3]에는 음식료업종의 GP도표가 그려져 있으며 [그림 4]는 상관차원이 어떤 값에 수렴하는지 조사하기 위해서 매립차원에 대응되는 상관차원의 값을 나타낸 그림이다.

25) 최근 Whang and Linton(1996)에 의해 리아푸노프지수 분산의 구체적인 공식이 제시되었다.
 26) GP 도표는 매립차원을 3부터 12까지 까지 증가시키면서 상관적분을 주어진 척도모수 ϵ 에 대해 측정한 다음 $\log(Cm(\epsilon))$ 을 $\log(\epsilon)$ 에 대해서 그린 그림이다. [그림 4]는 상관차원이 어떤 값에 수렴하는지 알아보기 위한 상관차원과 그에 대응하는 매립차원의 관계도이다. 상관차원을 정확하게 추정하기 위해서는 주가지수로부터 추세를 제거한 이후의 잔차가 필요하지만 추세의 존재는 상관차원을 상향 이동시키는 경향이 있기 때문에 본 연구에서는 대략적인 추정치를 얻기 위해 추세제거 이전의 자료로 상관차원을 계산해 보았다. 추정결과가 3~4로 나왔기 때문에 추세제거 이후의 결과는 이 보다 작을 것으로 판단된다. 추세제거를 시도하지 않은 또 다른 이유는 원자료가 어떠한 종류의 추세를 가지고 있는지 잘 모르는 상황에서 적합하지 않은 추세제거방법이 오히려 추정결과를 더욱 크게 왜곡시킬 가능성도 존재하기 때문이다.

(그림 3) 음식료 GP 도표



(그림 4) 음식료 상관차원 수렴도



4. BDS 통계량 결과

많은 자료들이 카오스를 비롯한 다양한 형태의 비선형성을 포함하고 있을 가능성에도 불구하고 비선형성이 발생하게 된 원인에 관해서는 아직 구체적으로 밝혀지지 않고 있다. 90년대에 들어 비모수적 분석기법의 발달에 힘입어 Baek과 Brock(1992)은

기존의 BDS 검정법을 다변량변수로 확대·발전시켰다. 그들의 연구결과를 원용하면 비선형성의 원인이 자체 변수 때문인지 혹은 타변수와의 관계 때문인지도 알아낼 수 있다. 다변량변수 검정법은 Baek(1993)에서 더욱 발전되어 비선형적인 인과관계를 검정할 수 있게 되었고 이 방법은 백웅기(1991)에서 통화·생산·물가의 세 변수에 적용된 바 있으며 김영빈(1996)은 이 방법을 주식시장에 적용하였다. 이와 같은 검정방법 외에도 Scheinkman과 LeBaron(1989)은 shuffle test를 보완적으로 사용하여 카오스를 검증하였다.²⁷⁾

<표 4>에는 15개 업종의 주가지수 수익률에 대한 BDS 검정결과를 기록하였다.²⁸⁾ 이 검정을 위해 모든 업종지수에 대해 매립차원을 2부터 15까지, ϵ 을 0.8부터 0.8⁹까지 변동시켜 보았다. 이 중 매립차원 $m=2, 5, 10, 13$ 과 $\epsilon=0.8^5, 0.8^7$ 에 대한 검정결과를 보고하였다.²⁹⁾ 검정결과 은행, 증권, 보험을 제외한 12개 업종은 대부분 IID 귀무가설을 기각함으로써 수익률이 어떠한 종류의 비선형구조를 가지고 있을 가능성이 높게 되었다.

지금까지의 검정결과를 종합해 볼 때 BDS 통계량 분석과 허스트지수, 리아푸노프 지수 및 상관차원 분석결과가 정확하게 일치한다고는 볼 수 없다. 왜냐하면 각 검정방법마다 해당 모수와 표본크기에 따라 귀무가설에 대한 기각력이 다르기 때문이라고 볼 수 있다. 따라서 여러 검정결과를 보완적으로 사용한다면 비선형성의 존재 여부에 관해 좀 더 정확한 결론을 내릴 수 있다. 즉 음식료, 섬유·의복, 제지, 제약, 1차 금속, 조립금속, 기계, 도소매 등 8개 업종지수는 카오스와 같은 비선형구조를 가지고 있을 가능성이 매우 높다고 판단할 수 있다. 그러나 화합물, 전기전자, 운수장비, 건설업의 경우는 BDS 통계량 분석을 통해 비선형성의 존재를, 은행과 증권업은 허스트지수, 리아푸노프지수, 상관차원 분석을 통해 카오스 끌개의 존재가능성을 시사하고 있다. 다만 보험업지수의 경우는 어떠한 종류의 비선형성도 보이지 못했다.

27) 카오스이론의 경제적 적용은 Day(1982)에 의해서 본격적으로 시작되었는데 그는 Li와 Yorke(1975)의 정리를 이용해서 주기 3을 갖는 동태방정식을 유도함으로써 카오스의 존재 가능성을 입증하였다. 일반적인 시계열 분석법으로는 카오스과정이 랜덤과정과 구별할 수 없다고 이미 밝혀졌기 때문에 (Bunow와 Weiss(1979) 참조) Day의 논문은 학계의 큰 관심을 불러 일으켰다. 난해한 카오스이론의 수리적 분석은 초창기에는 주로 Collet와 Eckmann(1980), Guckenheimer와 Holmes(1980), Takens(1984)에 크게 의존하였다.

28) BDS 검정은 원계열에 선형필터를 사용하여 선형구조를 제거한 후 사용하는 것이 바람직하지만 본 연구에서는 월별주가지수수익률의 상관계수가 거의 0에 가깝다고 가정하여 수익률 자료를 그대로 사용하였다. 또한 표본크기에 따른 size와 power를 고려하여 Monte Carlo 시뮬레이션 결과로 얻어진 분포를 사용하여 검정해야 하지만 여기서는 점근분포를 사용한 검정법을 적용하였다. 보다 엄밀한 검정을 위해서는 Brock, Hsieh, LeBaron(1991)의 size corrected 분포를 사용해야 함.

29) 척도모수 ϵ 이 너무 큰 경우에는 비선형성을 포착하지 못하지만 ϵ 이 너무 작아도 ϵ -근방에 포함되는 관측치들의 수가 너무 작기 때문에 신뢰성이 떨어진다. 표본수에 따른 ϵ 의 선택문제는 Brock, Hsieh, LeBaron(1991) 참조.

〈표 5〉 업종별 BDS 통계량(WS_m)

업종	m=2		m=5		m=10		m=13	
	$\epsilon=0.8^2$	$\epsilon=0.8'$	$\epsilon=0.8^2$	$\epsilon=0.8'$	$\epsilon=0.8^2$	$\epsilon=0.8'$	$\epsilon=0.8^2$	$\epsilon=0.8'$
음식료	3.35	5.50	3.93	1.03	6.44	4.92	9.74	1.55
섬유의복	1.85	1.85	1.71	1.98	1.86	2.94	2.13	4.10
제지	1.81	2.16	1.66	2.49	1.75	4.34	1.95	6.97
화합물	2.71	4.07	2.95	6.89	4.35	2.75	6.11	7.99
제약	2.81	3.37	2.91	5.06	3.86	1.51	4.95	3.59
1차금속	2.73	2.93	3.26	4.97	5.96	2.05	9.74	5.76
조립금속	6.49	1.26	9.45	3.00	2.53	2.71	5.46	1.38
기계	4.29	6.74	5.26	1.33	1.02	8.33	1.74	3.36
전기전자	1.81	2.34	1.62	2.72	1.63	4.73	1.74	7.39
운수장비	1.57	2.09	1.36	2.30	1.30	3.48	1.36	5.03
건설	2.06	2.40	2.04	3.11	2.63	7.54	3.35	1.47
도소매	2.62	3.51	3.01	6.31	4.72	2.86	6.92	8.90
은행	1.49	1.55	1.28	1.55	1.30	2.00	1.39	2.55
증권	1.45	1.49	1.30	1.42	1.34	1.66	1.45	1.99
보험	1.37	1.42	1.18	1.26	1.11	1.28	1.13	1.40

IV. LWR에 의한 업종별 주가지수 예측

Ⅲ장에서는 허스트지수, 리아푸노프지수, 상관차원, BDS 통계량 등의 분석을 통해서 10개 업종에서 카오스 끌개가 존재할 가능성에 대해 타진해 보았다. 만약 시계열 자료가 카오스 끌개를 가지고 있을 경우에 예측력 향상방법에 관한 연구가 지난 10여 년 간 꾸준히 진전되었다.

주요 예측방법으로는 비모수적 추정방법의 일종인 최근방(NN; Nearest Neighbor) 추정법, 국지적 가중회귀(LWR) 및 반비모수(SNP: Semiparametric) 방법이 있다. 본고에서는 LWR을 적용할 예정인데 외국에서 이 방법을 적용한 예로는 Diebold and Nason(1990)의 환율연구 및 Hsieh(1991)의 주식이가격연구가 있으며 우리나라에서는 이상빈·최우석(1995)의 종합주가지수에의 적용이 있다.³⁰⁾ Diebold and Nason(1990)은

30) 본고의 접근방식은 카오스 동태성을 예측모형내에 반영하기 위해 시차변수를 설명변수로 채택하였다. 이 점에서 이상빈·최우석의 LWR과 모형구성이 근본적으로 다르다고 볼 수 있다.

표본외 예측을 환율에 대해서 실시했는데 그 결과가 별로 좋지 못했으며 이상빈·최우석(1995)은 표본내 예측 결과만 살펴보았는데 OLS에 비해 상당히 개선된 결과를 얻었다.³¹⁾

1. LWR 추정방법

본절에서는 LWR를 약술하기로 한다.³²⁾ 비모수적 예측에 사용되는 조건부 기대치는 다음 식과 같다.

$$E(y|x) = \int yf(y|x)dy = \int y[f(y, x)/f(x)]dy \tag{13}$$

이 식에서 f는 확률분포함수이다. 표본에서 값을 계산할 때는 결합분포와 한계분포의 비모수 추정치를 대입하면 된다. 통상 동태모형에서 조건벡터 x는 설명변수 y의 시차변수로 구성되기 때문에 식 (14)와 같이 조건 벡터를 쓸 수 있다.

$$x_t = \{y_{t-1}, \dots, y_{t-p}\} \tag{14}$$

설명변수가 식(14)와 같다고 한다면, 비선형 자기회귀함수는

$$y_t = g(y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) + \varepsilon_t \tag{15}$$

으로 표현할 수 있다. 오차항 ε 은 설명변수에 대하여 독립이다. 즉,

$$E(\varepsilon_t | y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = 0 \quad t = 1, \dots, T \tag{16}$$

이 성립한다. 따라서 식(13)을 다시 적으면 다음 식이 된다.

31) Diebold and Nason(1990)은 LWR 적용시 일반적으로 표본내 예측력이 향상된 것처럼 보이는 것은 overparametrization 때문일 것으로 지적하고 있다.

32) LWR에 관한 자세한 논의는 Cleveland(1979), Cleveland and Devlin(1988) Cleveland, Devlin, Grosse(1988)를 참조.

$$\begin{aligned}
 E(y_{t+1} | y_t, \dots, y_{t-p+1}) &= \int y_{t+1} f(y_{t+1} | y_t, \dots, y_{t-p+1}) dy_{t+1} \\
 &= \int y_{t+1} [f(y_{t+1}, y_t, \dots, y_{t-p+1}) / f(y_t, \dots, y_{t-p+1})] dy_{t+1}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

회귀함수 추정치는 NN 등의 비모수적 기법에 의해 계산이 가능하며 추정치의 일치성도 확립된다. 본 연구에서 사용하고자 하는 LWR도 일종의 NN방법이다. 이제 주어진 x^* 에서 구체적인 추정치를 계산해 보자. p -차원 공간상에 있는 점 x^* 에서 가중합수를 사용하여 $g(x)$ 를 추정한다면 식(18)과 같이 추정치 $\hat{g}(x^*)$ 가 얻어진다.

$$\hat{g}(x^*) = \sum_{t=1}^T w_{k_T}(x_t) y_t
 \tag{18}$$

x_t 가 x^* 의 k_T 번째 근방 안에 있을 경우에는 $w_{k_T}(x_t) = 1/k_T$, 그 이외의 점에서는 0의 가중치가 부여된다.

LWR의 기본 구조는 x^* 에서 k_T 개의 근방점을 잡고 그에 대응하는 y 의 함수로 회귀 표면을 적합화시킨다. LWR이 NN과 근본적으로 다른 점은 $\hat{g}(x^*)$ 가 y 의 단순평균이 아니라는 것이다. LWR이 NN과 일치하는 경우는 설명변수가 상수 한 개만 있을 경우 뿐이다. 점 x 에 대응하는 LWR의 추정치 $\hat{g}(x^*)$ 를 계산하기 위해서는 평활계수 ξ 의 값을 먼저 결정해야 한다.³³⁾ 이를 위해 우선 평활계수 ξ 를 사용하여 우선 회귀분석에 사용할 근방점의 개수 $k_T = \text{int}(\xi T)$ 를 찾는다. 여기서 $\text{int}(\cdot)$ 는 integer의 약어로 ξT 에 가장 가까운 정수로 반올림함을 의미한다. 이제 모든 관측치를 점 x^* 로부터 가장 가까운 순서로 재배열하여 $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*\}$ 로 명명한다.³⁴⁾ 따라서 x_1^* 은 x^* 로부터 가장 가까운 점이 된다. $\lambda(a,b)$ 를 유클리드 거리라고 한다면, x^* 로부터 k_T 번째 있는 점까지의 거리는 식(19)로 표시된다.

$$\lambda(x^*, x_{k_T}^*) = \left[\sum_{j=1}^{k_T} (x_{k_T}^* - x_j^*)^2 \right]^{1/2}
 \tag{19}$$

33) 평활계수 ξ 는 일반적으로 $0 < \xi \leq 1$ 의 값을 가지나, 환율예측을 위해 Diebold and Nason(1990)은 ξ 의 값을 10까지 연장하였다. 그들은 가중합수가 3입방함수 형식을 지닐 경우 OLS 추정치는 ξ 가 10인 경우와 유사함을 찾아내었다.

34) 거리는 모두 Euclidean measure를 사용한다.

이제 함수기호 $\lambda(\cdot)$ 를 사용하여 근방점들에 대한 가중함수는 다음 식과 같이 정의한다.

$$v_t(x_t, x^*, x_{k_T}^*) = C[\lambda(x_t, x^*) / \lambda(x^*, x_{k_T}^*)] \quad (20)$$

단, $C(\cdot)$ 는 3입방 함수로 식(21)과 같다.

$$C(u) = (1-u^3)^3 \quad \text{for } u < 1 ; \quad C(u) = 0 \quad \text{otherwise} \quad (21)$$

x^* 에서 회귀평면의 값을 계산하면,

$$\hat{y}^* = \hat{g}(x^*) = x^{*'} \beta \quad (22)$$

가 되는데, 회귀계수 β 는 식(23)을 만족한다.

$$\beta = \operatorname{argmin} \left[\sum_{t=1}^T v_t(y_t - x_t' \beta)^2 \right] \quad (23)$$

실제로 LWR을 시행할 때 가장 어려운 문제가 되는 것은 ξ 값을 결정하는 문제이다. 왜냐하면 LWR의 추정치 β 도 ξ 에 따라 달라지기 때문이다.

2. 평활계수 ξ 의 결정과 M-plot

(1) M-plot

M-plot은 평활상수 ξ 를 결정하고 국지적 선형 혹은 국지적 2차함수중의 하나를 선택하는 도구이다. $\hat{g}_{k, \xi}(x)$ 는 특별한 ξ 값에 대한 국지적 회귀추정치라고 하자. 단, $k=1$ 인 경우는 국지적 선형 적합, $k=2$ 인 경우는 국지적 2차함수 적합이다. $L_{k, \xi}$ 는 오퍼레이터 행렬로서 k 와 ξ 에 의존한다. $\hat{g}_{k, \xi}(x)$ 의 평균자승오차(MSE; Mean Square Error)를 σ^2 로 나누면,

$$M_{k,\xi} = \frac{E \sum_{i=1}^n (\hat{g}_{k,\xi}(x_i) - g(x_i))^2}{\sigma^2} \quad (24)$$

$M_{k,\xi}$ 는 편의와 분산으로 구성된다. 즉,

$$M_{k,\xi} = B_{k,\xi} + D_{k,\xi} \quad (25)$$

여기서 $B_{k,\xi} = \frac{\sum_{i=1}^n (E \hat{g}_{k,\xi}(x_i) - g(x_i))^2}{\sigma^2}$ 는 편의항이고

$$D_{k,\xi} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{var}(\hat{g}_{k,\xi}(x_i))}{\sigma^2} = \text{tr} L_{k,\xi} L'_{k,\xi}$$

은 분산항이다. $RSS_{k,\xi}$ 를 $\hat{g}_{k,\xi}(x)$

의 잔차자승합 (residual sum of squares)이라고 하자. 그것의 기대값을 σ^2 으로 나누면

$$\sigma^{-2} E \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_{k,\xi}(x_i))^2 = \text{tr}(I - L_{k,\xi})(I - L_{k,\xi})' + B_{k,\xi} \quad (26)$$

σ^2 의 값을 알았더라면 다음 식에 의하여 $M_{k,\xi}$ 를 추정할 수 있었을 것이다.

$$\frac{RSS_{k,f}}{\sigma^2} = \text{tr}(I - L_{k,f})(I - L_{k,f})' + \text{tr} L_{k,f} L'_{k,f} \quad (27)$$

실제로 우리는 σ^2 을 알지 못한다. 따라서 편의가 작다고 생각되는 국지적 적합으로부터 σ^2 의 추정치를 얻는다. 이것은 추정치 $\hat{\sigma}_{k,h}^2$ 를 사용함을 의미하고 h 는 ξ 의 값으로 통상 0.2부터 0.4 사이의 작은 수이다. 따라서 $M_{k,\xi}$ 의 최종 추정치는

$$\hat{M}_{k,\xi} = \frac{RSS_{k,\xi}}{\hat{\sigma}_{k,h}^2} = \text{tr}(I - L_{k,\xi})(I - L_{k,\xi})' + \text{tr} L_{k,\xi} L'_{k,\xi} \quad (28)$$

오른편의 두 항은 편의추정치 $\hat{B}_{k,\xi}$ 이고 마지막 항은 분산추정치 $D_{k,\xi}$ 이다. 선택된 ξ 와 k 의 값에 대해서 편의가 무시할 만하다면 표준적 δ -method를 사용할 때

$$E \widehat{M}_{k, \xi} \approx D_{k, \xi} \tag{29}$$

M-plot은 h보다 큰 ξ 의 여러 가지 값에 대응하는 $\widehat{M}_{k, \xi}$ 를 $D_{k, \xi}$ 축에 대해 그린 그림으로 bias가 없는 경우의 $\widehat{M}_{k, \xi}$ 에 관한 분포적 정보도 포함되어 있다. $k=1$ 혹은 $k=2$ 의 경우에 그릴 수 있다. 이 plot은 k 와 ξ 가 변할 때 분산과 편의에 관한 trade-off 관계를 보여준다. 특히, 고정된 k 에 대해 ξ 가 증가하거나, 고정된 ξ 에 대해 k 가 감소한다면 편의는 증가하고 분산은 감소한다. 점근적 분포를 이용하여 우리는 편의가 없다는 가정 하에서 $\widehat{M}_{k, \xi}$ 의 분포를 보일 수 있다. 이는 각각의 ξ 값에 대한 귀무가설 분포이다. 이것은 분포적 특성을 보여주는 M-plot에 구간을 더함으로써 얻어진다.

M-plot은 k 와 ξ 를 선택하는 데 매우 유용하다. M-plot의 유도와 사용법은 선형회귀식에서 독립변수들의 부분집합을 선택하는 Cp 과정과 매우 흡사하다. M-plot의 중요성은 그것이 MSE를 분산과 편의로 구성되어 있음을 보여준다는 점이다. 어떤 경우에 우리는 낮은 편의를 원하기도 하지만 다른 경우에는 낮은 분산을 원하기도 한다. $\widehat{M}_{k, \xi}$ 를 최소화하는 k 와 ξ 를 선택하기 위해서만 M-plot을 사용하는 것은 빈약한 사용법이다.

(2) 동등한 자유도

$D_{k, \xi}$ 는 $\widehat{g}_{k, \xi}$ 의 ‘동등한 자유도’ (equivalent degrees of freedom)이다. 이 이름은 모수적 최소자승법에 있어서 적합된 값의 분산의 합이 $\sigma^2 \times (\text{적합변수} + 1)$ 인 경우와 비슷하기 때문에 유래되었다. 이것은 적합식의 자유도이다. 국지적 가중회귀의 경우에 ξ 가 증가하거나 k 가 2에서 1로 바뀌면 $D_{k, \xi}$ 는 감소한다. 따라서 데이터를 설명하기 위해 동등한 자유도를 사용한다.

다음 두 가지 특별경우가 $D_{k, \xi}$ 에 대한 직관을 제시한다. 첫째, 일정한 거리를 두고 있는 한 개의 설명변수를 가정하자. 단순화를 위해 그 값이 1부터 n 이라고 하자. $k=1$ 이고 가중함수는 균일(uniform)함수라고 한다면

$$W(u) = 1 \quad 0 \leq u \leq 1 \tag{30}$$

그렇다면

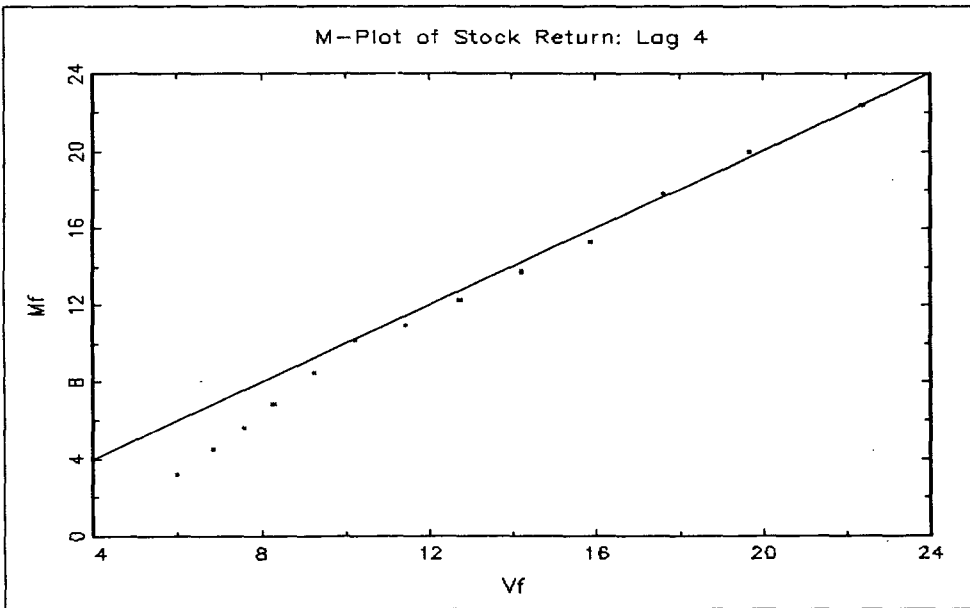
$$D_{1,\xi} = 1 + \xi^{-1} \tag{31}$$

ξ 가 1에 가까울수록 $D_{1,\xi}$ 는 2로 감소한다. $\xi=1$ 과 균일분포에 대해 $\xi=1$ 은 선형최소자승에 해당한다. 두번째 경우는 W 가 tricube 함수인 점을 제외하고는 첫번째와 동일하다. 너무 작지 않은 n 에 대해서

$$D_{1,\xi} \approx (5 + 13\xi^{-1})/8 \tag{32}$$

고정된 ξ 에 대해 균일분포의 경우보다는 더욱 큰 동등한 자유도를 가진다. ξ 가 두가중함수에 대해 동일하다면 근방크기(neighborhood size)는 같다. 그러나 균일분포는 모든 점에 같은 가중치를 두는 반면 tricube는 x 로부터 멀어질수록 낮은 가중치를 둔다. 따라서 고정된 ξ 에 대해서 tricube는 평활을 덜하며 따라서 더욱 많은 동등한 자유도를 사용한다.

(그림 5) 종합주가지수 수익률의 M-Plot
(시차변수 4개 포함)



종합주가지수에 대해서 평활상수 ξ 를 선택하기 위해 M-plot을 그리면 [그림 5]와 같다. 점선으로 표시된 직선은 편의가 없는 경우에 분산으로만 구성된 M-plot이며 점들은 오른쪽부터 왼쪽까지 ξ 이 0.4부터 1.0까지 증가할 때 나타나는 M-plot이다. 본 연구에서 평활상수는 가장 작은 MSE를 주는 1.0으로 선택했다. Diebold and Nason (1990)의 연구에서도 많은 경우에 $\xi=1.0$ 에서 MSE가 최소화되는 것으로 나타났다.³⁵⁾

3. LWR의 추정결과

LWR를 1980년 1월부터 1995년 4월까지의 기간중 음식료업을 비롯한 10개 업종별 주가지수에 적용하여 1995년 5월부터 1996년 4월까지 1년간에 걸친 표본외 예측을 실시하였다. 예측방법은 현재 시점에서 다음 달의 수익률을 예측하고, 다음 달의 실적치를 사용하여 다시 그 다음 달을 예측하는 방식을 사용하였다. 예측대상은 해당 업종의 주가지수이기 때문에 LWR에 의해 직접 예측된 수익률을 업종지수로 환산하였다. LWR의 예측오차를 통상최소자승법(OLS)의 예측오차와 비교함으로써 예측력 향상을 검증하였다.³⁶⁾

〈표 5〉 LWR, OLS의 예측오차-시차변수만 사용

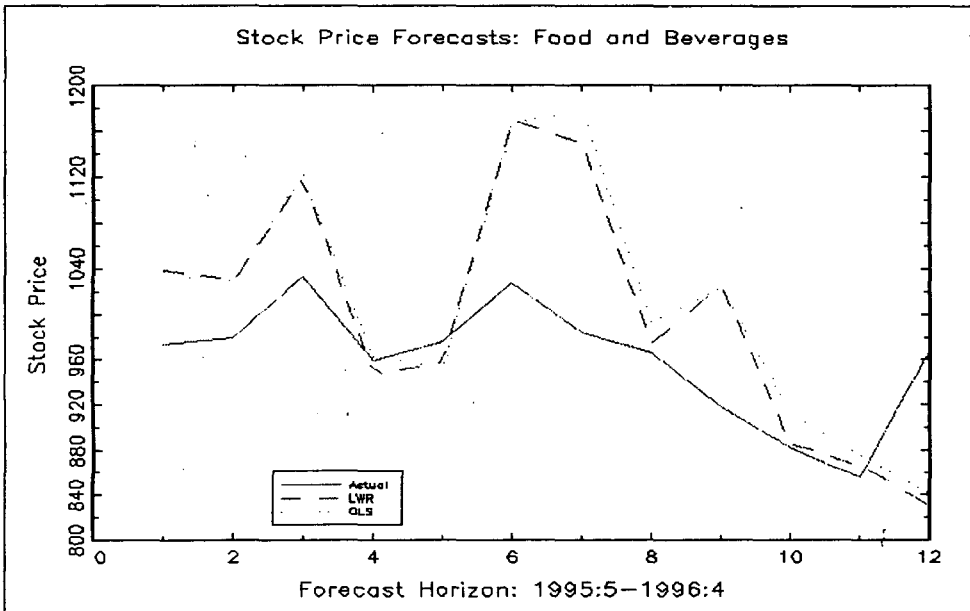
구분	음식료	섬유의복	제지	제약	1차 금속	조립 금속	기계	도소매	은행	증권	
MARD%	LWR	8.40	5.61	8.40	7.07	5.17	9.33	6.20	7.33	6.12	11.62
	OLS	10.37	5.60	10.37	7.17	5.53	10.95	6.99	7.67	5.89	9.93
MAD	LWR	96.36	56.44	96.30	96.11	64.53	135.11	54.78	41.44	35.74	240.67
	OLS	119.88	56.51	119.88	97.41	69.07	157.37	62.21	43.12	34.44	208.35

35) 본 연구에서는 평활계수 선택의 기준을 최소 MSE에 두고 $\xi=1.0$ 으로 고정시켰다. ξ 을 변동시키면서 LWR의 예측결과를 계산할 수 있으나 이에 따른 예측력 변화의 연구는 향후 과제로 남기기로 한다.

36) 실증분석시 사용자료에 outlier가 존재할 경우 Cleveland(1979)가 제안한 iterated locally-weighted regression을 사용할 수도 있다. 그러나 본 연구에서는 outlier의 수가 크게 많지 않다고 간주하여 Cleveland, Devlin, Grosse(1988), Diebold and Nason(1990), Hsieh(1991) 등에서 사용된 weighting 함수를 사용하여 LWR을 수행하였다.

LWR과 OLS예측모형에 사용된 설명변수는 피설명변수의 1~4차까지의 시차변수를 사용하였으며 예측력판단은 MAD와 MARD(%)를 기준으로 하였다. (예측오차 <표 5> 참조.)³⁷⁾ 또한 [그림 6]에는 일례로 음식료업종의 업종지수 표본의 예측치를 표시하였다.

(그림 7) 음식료 업종지수 예측치-시차변수만 사용



MARD% 와 MAD 예측오차의 결과를 살펴보면 업종지수 예측에서 섬유·의복, 은행 및 증권업을 제외한 7개 업종에서는 LWR이 OLS보다 우월하다고 평가할 수 있다. 다음에는 예측모형을 다소 수정하여 설명변수에 통화량과 금리를 설명변수로 추가하였을 때 나타나는 예측오차의 변화를 살펴보자.

통화량과 금리는 주식시장의 변화에 가장 밀접하게 연관되어 있는 거시경제변수이기 때문에 주가지수의 예측력 향상에 큰 도움이 될 것으로 기대된다. MARD% 예측오차 기준으로 본 <표 6>의 예측오차를 시차변수만 있는 경우의 <표 5>와 비교하면, 통화량 및 금리를 설명변수에 추가했을 때 LWR에 의한 예측오차는 음식료,

37) [그림 6]에서 실선은 실적치, LWR 예측치는 굵은 점선, OLS 예측치는 가는 점선으로 각각 표시되었다. MAD=Mean Absolute Deviation ($\sum |Xf-Xa|/N$); MARD(%)=Mean Absolute Relative % Deviation($\sum |(Xf-Xa)/Xa|/N \times 100$). 오차비교를 위해 RMSE(Root Mean Squared Error)와 RMSE(%)도 적용해 보았으나 MAD, MARD(%)와 큰 차이를 발견할 수 없었다.

조립금속의 경우에 축소되었으나 다른 업종의 경우는 오히려 증폭되거나 큰 변화가 없었다. 이상의 두 예측모형의 비교로부터 우리는 설명변수 숫자의 증가가 향상된 예측력을 항상 보장하지는 못한다는 사실을 알 수 있다. 이는 시차설명변수를 제외한 기타 설명변수와 피설명변수의 관계가 표본외 예측의 경우에는 표본내의 상관관계와 크게 달라질 수 있으며, 이는 예측오차의 새로운 발생원인이 될 수도 있다는 점을 시사한다.

통화량, 금리 등의 설명변수가 추가된 모형에서 LWR과 OLS의 예측오차를 비교한다면, LWR에 의한 예측오차는 섬유·의복, 1차금속, 조립금속, 도소매, 은행 및 증권업 등 6개업종에서는 OLS보다 작았으나 나머지 4개업종의 경우에는 OLS가 더 작은 예측오차를 보였다.³⁸⁾

〈표 6〉 LWR, OLS의 예측력 결과-통화량, 금리 포함

구 분		음식료	섬유 의복	제지	제약	1차 금속	조립 금속	기계	도소매	은행	증권
MARD%	LWR	6.94	6.55	9.30	8.08	5.87	8.61	6.84	7.73	11.00	27.94
	OLS	6.54	9.60	8.19	7.61	6.99	9.27	6.11	8.01	11.85	39.46
MAD	LWR	66.76	66.44	104.73	108.48	74.34	125.23	61.23	43.85	62.12	559.06
	OLS	63.00	97.68	89.67	102.76	89.08	133.20	54.19	45.26	66.76	791.41

그렇다면 LWR의 예측력은 왜 모든 업종에 걸쳐 OLS에 비해 우월하지 못하나? LWR에 의한 예측력 향상이 기대에 미치지 못하는 이유는 크게 두 가지 측면에서 생각해 볼 수 있다. 첫째는 표본 수의 부족으로 인하여 LWR에 의하여 카오스적 비선형 구조가 충분히 파악되지 못한 경우다. 카오스적 구조가 잘 나타나 있지 않은 경우는 LWR이 OLS에 비해 큰 예측력 우위를 보이기 힘들다. 둘째는 실제 데이터 구조가 선형이기 때문에 LWR의 예측력 우위가 잘 나타나지 않을 수 있다. 선형구조를 가진 데이터는 OLS의 예측오차가 가장 작다는 사실이 알려져 있다. 따라서 진정한 데이터 생성과정이 선형인지 혹은 비선형인지를 검정하기 위해서는 자료의 관측치 수가 많아야 한다.

38) 예측오차의 기준으로 MARD%와 MAD를 사용하였으나 주가지수는 항상 변화하므로 업종지수에 대해서 상대평가한 MARD%가 MAD보다는 객관적인 기준이 된다고 볼 수 있다.

VI. 결 론

본 연구에서는 15개의 업종별 주가지수를 사용하여 해당 자료가 카오스적 특성을 보이는지 조사하였다. 자료 전반에 걸쳐 BDS 통계량, 허스트지수, 상관차원, 리아푸노프지수 등을 측정된 결과 9개 업종에서 카오스적 증거가 발견되었다. 업종별 주가지수의 표본의 예측을 위하여 LWR 및 OLS를 적용한 결과 LWR이 6~7개 업종에서 OLS보다 우수한 예측력을 보였다. 그러나 예측오차의 차이로 볼 때 LWR이 OLS에 비해 커다란 예측력의 향상을 가져왔다고 평가하기는 어렵다. 이는 Diebold and Nason(1990)도 동일한 결과를 보이고 있다.

LWR이 OLS에 비해 획기적인 예측력 개선을 보이기 힘든 이유로는 첫째, 표본내 예측력 향상을 위해 과도한 시차변수 혹은 설명변수의 사용으로 예측모형이 과다모수화 되었을 가능성이 있기 때문이다.³⁹⁾ 둘째, 자료 관측치 수의 절대적인 부족으로 카오스 구조를 회귀분석 모형에 충분히 반영하기 어렵기 때문이다. Frank and Stengos(1993)는 자료의 선택구간 증가에 따라 NN 예측력 향상을 위한 자료의 수가 매우 빠른 속도로 증가해야 함을 시뮬레이션 방식에 의하여 보인 바 있다. 따라서 주가지수의 경우도 월별보다는 일일자료와 같이 선택구간이 짧은 자료가 더 적합할 것으로 보인다. 끝으로 자료생성과정이 비선형이 아닌데도 불구하고 비선형으로 오인하고 LWR을 사용했을 경우이다. 그러나 주식시장의 경우에는 잦은 정책변경, 예상치 못했던 증시 관련 소식이 비선형성을 유발시킬 수 있음을 고려할 때 우리나라 주식가격은 선형보다 비선형 모형이 더욱 타당성을 가질 것으로 생각되며 이러한 사실은 허스트지수 추정치를 살펴볼 때 입증될 수 있다.

본 연구를 통해 얻은 마지막 결론은 표본의 예측의 경우 설명변수의 추가가 반드시 예측력 개선을 보장하지는 못한다는 사실이다. 이는 표본내 예측의 경우와는 달리 외생변수의 돌발적인 변화가 표본내의 평균적인 상관관계와 크게 달라질 가능성이 얼마든지 있기 때문이다. 현실적으로 우리나라와 같이 금리, 통화량이 정책당국에 의해 수시로 변경되는 상황하에서는 주가지수와 금리 혹은 주가지수와 통화량간의 장기적 상관관계가 단기적으로 성립하지 않는 경우가 종종 발생하고 있다.

카오스와 같은 비선형 동태모형은 경제학뿐만 아니라 재무관리학에도 활발하게 적용되고 있다. Scheinkman과 LeBaron(1989)이 주식시장의 수익률을 이용하여 주가가 저차원적인 카오스 모형으로부터 생성되었을 가능성이 높다고 처음 밝혔을 때 학계의

39) 과다모수화는 표본의 예측오차를 심화시키는 경향이 있다.

대단한 반응을 불러 일으켰다. 그러나 Brock- Baek(1991)에 의해 Scheinkman-LeBaron 추정치의 통계적 신뢰성에 의문이 제기되자 학자들의 관심은 카오스보다는 비선형 확률모형으로 쏠리게 되었다. 예를 들면 Tong(1990)이 제시한 Threshold Autoregressive Process(TAR)와 같은 비선형 시계열모형을 가지고 비선형성에 접근하려는 시도가 있었다. 그러나 TAR 모형의 추정방식이 복잡하고 다변량변수모형의 경우에는 지극히 난해하기 때문에 지금까지 적용된 범위는 그리 넓지 않다고 볼 수 있다.⁴⁰⁾

카오스에 관한 국내 연구활동은 해외 연구에 비하면 미약하지만 최근 들어 활기를 띠고 있다. 80년대 후반부터의 대표적인 해외연구로는 *Journal of Economic Theory* (1986년도 10월호)는 Chaos 경제학을 특집호로 다루었으며 Grandmont(1986)은 이를 재출판하였다. 또한 Benhabib(1992), Day와 Chen(1993), Medio(1992), Mullineux와 Dickinson(1993), Jarsulic(1993), Creedy와 Martin(1994), Day(1994), Parker와 Stacey(1994), Deboeck(1994), 1984년 창설된 미국 Sante Fe Institute 연구보고서 등 최근 들어 이 분야의 출판물이 급증하고 있는 추세에 있다.⁴¹⁾ 이와 같은 추세를 감안할 때 우리나라에서도 주가선물시장의 출범과 함께 예측력의 신장을 위하여 이 분야의 연구가 급증할 전망이다. 본 연구는 향후 일일 종합주가지수 또는 일일 업종지수 등 관측치 수가 많으면서도 집계정도(aggregate level)가 심하지 않은 자료를 예측대상자료로 삼아 LWR, SNP 등의 비모수적 방법 및 흔히 사용되는 이동평균식의 단순 trading rule에 의한 예측치와의 예측력을 비교할 계획이다.

40) 비선형 모형의 발굴과 적용을 위해 *Journal of Applied Econometrics* 는 1992년 12월호에 『비선형 동태 경제학과 계량경제학』이라는 제목의 특별호를 발행하기도 하였다.

41) 최근에는 이 분야의 전문 학술지인 *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* (SNDE)가 창간되었으며 평균 2~3년 정도 걸리는 경제학 논문의 심사 및 출판에 걸리는 시간을 단축시키기 위해 Internet상의 학술지로 존재하고 있다.

참 고 문 헌

- 김영빈, “거래량은 주가에 선행하는가?” 재무관리논총, 제3권 제1호, 1996, 301-327.
- 김영규, “주식가격의 장기적 종속성에 관한 연구” 재무관리연구, 제13권 제1호, 1996, 101-114.
- 백웅기, “통화·생산·물가의 비선형 인과관계 검정”, 한국개발연구, 제13권 제4호, 1991, 117-140.
- 유태우·최원석·홍성범, 인공지능경망을 이용한 종합주가지수 예측, 장은경제연구소, 1996.
- 이근영, “기술적 거래방법을 이용한 주식수익률 분석”, 금융연구, 9권 1호, 1995, 39-64.
- 이상빈, 최우석, “한국주식시장에서의 비모수 회귀분석법을 이용한 카오스적 끌개에 관한 연구”, 한국 전문가 시스템학회 추계학술대회 논문집, 1995.
- 한인구, 박종엽, “인공지능경망을 이용한 종합주가지수 예측”, 한국 전문가 시스템학회 추계학술대회 논문집, 1995.
- 한재민, 성시중, “백프로퍼게이션 모델을 이용한 종합주가지수 예측”, 한국 전문가 시스템학회 추계학술대회 논문집, 1995.
- Baek, E., “A Nonparametric Test for Nonlinear Granger Causality: Bivariate Model,” *Journal of Korean Econometric Society* 4, (1993) 89-105.
- Baek, E. and W. Brock, “A Nonparametric Test for Independence of a Multivariate Time Series, *Statistica Sinica* 2, (January 1992) 137-156.
- Brock, Lakonishock, LeBaron, “Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns”, *Journal of Finance* 47, (1992), 1731-1764.
- Benhabib, J., *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press: Princeton, 1992.
- Brock, W., “The Distinguishing Random and Deterministic System: Abridged Version”, *Journal of Economic Theory* 40, (1986), 168-195.
- Brock, W. and E. Baek, “Some Theory of Statistical Inference for Nonlinear Science”, *Review of Economic Studies*, (1991), 697-716.
- Brock, W. and W. Dechert, “A General Class of Specification Tests: The Scalar Case”, *Proceedings of the Business and Economic Statistics of the American Statistical Association*, (1988), 70-79.

- Brock, W., W. Dechert, B. LeBaron, and J. Scheinkman, "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension," *Econometric Review* 5, (1996), 197-235.
- Brock, W., D. Hsieh, and B. LeBaron, *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The MIT Press: Cambridge, 1991.
- Brock, W. and C. Sayers, "Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?", *Journal of Monetary Economics* 22, (1988), 71-90.
- Bunow, B. and G.H. Weiss, "How Chaotic is Chaos? Chaotic and Other 'Noise' Dynamics in the Frequency Domain", *Mathematical Biosciences* 479, (1979), 221-237.
- Cleveland, W., "Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots", *Journal of the American Statistical Association* 74, (1979), 829-36.
- Cleveland, W. and S. Devlin, "Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting", *Journal of the American Statistical Association* 83, (1988), 596-610.
- Cleveland, W., S. Devlin, and E. Grosse, "Regression by Local Fitting", *Journal of Econometrics* 37, (1988), 87-114.
- Collet P. and J.P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauser, 1980.
- Creedy, J. and V. Martin, *Chaos and Non-linear Models in Economics: Theory and Application*, Edward Elgar, 1994.
- Day, R., "Irregular Growth Cycles", *American Economic Review* 72, (1982), 406-414.
- Day, R., *Complex Economic Dynamics*, Vol. 1, *An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*, The MIT Press: Cambridge, 1994.
- Day, R. and P. Chen, *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*, Oxford University Press: Oxford, 1993.
- Deboeck, G., *Trading on the Edge: Neural, Genetic, and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets*, Wiley, 1994.
- Diebold, F. and J. Nason, "Nonparametric Exchange Rate Prediction?", *Journal of International Economics* 28, (1990), 315-32.
- Eckmann, J.P. and D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors," *Review of Modern Physics* 57, (1985), 617-56.

- Frank, M. and T. Stengos, "Chaotic Dynamics in Economic Time-Series," *Journal of Economic Surveys* 2, (1988), 103-133.
- Grandmont, J., *Nonlinear Economic Dynamics*, Academic Press: New York, 1986.
- Grassberger, P. and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov entropy form a chaotic signal," *Physical Review A* 28, (1983), 2591-2593.
- Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation Vector Fields*, Springer-Verlag: New York, 1980.
- Hsieh, D., "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets", *The Journal of Finance* 46, (December 1991), 1839-1877.
- Jarsulic, M., *Non-linear Dynamics in Economic Theory*, An Elgar Reference Collection, 1993:
- Li, T. and J. Yorke, "Period Three implies Chaos", *American Mathematical Monthly* 82, (1975), 985-992.
- Malliaris, A. and G. Philippatos, "Random Walk vs. Chaotic Dynamics in Financial Economics", in *Nonlinear Dynamics in Economics and Social Sciences Proceedings*, (Gori F., L. Geronazzo and M. Galeotti eds.), Springer-Verlag: Berlin, 1993.
- Medio, A., 1992, *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge.
- Mullineux, A., D. Dickinson, W. Peng, *Business Cycles*, Blackwell: Oxford, 1993.
- Oseledec, V., "A Multivariate Ergodic Theorem: Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems", *Transactions Moscow Mathematical Society* 19, (1968), 197-231.
- Parker, D. and R. Stacey, *Chaos, Management and Economics: The Implications of Non-Linear Thinking*, Institute of Economic Affairs, 1994.
- Peters, E., "Fractal Structure in the Capital Markets", *Financial Analysts Journal*, (July/August 1989).
- Peters, E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, Wiley, New York, 1994.
- Peters, E., *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment & Economics*, Wiley, New York, 1994.
- Scheinkman J. and B. LeBaron, "Nonlinear Dynamics and Stock Returns," *Journal of Business* 62, (1989), 311-37.

- Takens, F., "On the Numerical Determination of the Dimension of an Attractor", in *Dynamical Systems and Bifurcations*, Lecture Notes in Mathematics, 1125, Springer-Verlag: Berlin, 1984.
- Tong, H., *Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford University Press: Oxford, 1990.
- Whang, Y. and O. Linton, "The Limiting Behavior of Kernel Estimates of the Lyapunov Exponent for Stochastic Time Series," The Korean Econometric Society, Proceedings (November 1996), 369-399.
- Wolf, A., J. Swift, H. Swinney, J. Vastano, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D* 16, (1985), 285-317.