財務管理硏究 第十四卷 第一號(1997. 6), 51～73

非流動資産의 潛在價値와 最適 消費 및 投資決定
- 去來費用이 存在하는 경우 -

구 형 건* · 김 영 권**

<요 약>

본 연구는 거래비용이 최적 소비 및 투자결정에 미치는 영향을 다루고 있다. Constantinides (1986), Davis와 Norman(1990) 그리고 Shreve와 Soner(1994) 등은 위험이 없는 하나의 유동성 자산과 현금배당이 지급되지 않는 하나의 비유동성 자산이 존재하는 경우에 있어서 소비와 포트폴리오 선택문제를 연구한 바 있다. 본 연구는 이러한 기존연구들을 확장하여 다수의 유동자산과 현금배당이 지급되는 하나의 비유동성 자산이 존재하는 경우의 최적 소비 및 투자결정 문제를 다루고 있다. 투자자의 비유동성 자산에 대한 잠재가치(implicit value)평가와 소비 및 투자결정간의 관계식을 구하여 이를 적용해 본 결과, 투자자의 최적 소비 및 위험부담(risk taking) 수준은 일반적으로 그들의 포트폴리오상에 유동성 자산의 비율이 증가할수록 증가한다는 사실을 확인할 수 있었다. 또한 거래비용이 존재하는 경우에는 기업의 배당정책이 투자자의 최적 소비 및 투자결정에 중요한 영향을 미치는 것으로 확인되었다.

Ⅰ. 서 론

본 연구는 자산거래에 있어서 거래비용이 존재하는 현실적인 상황을 상정하여 이러한 거래비용의 존재가 투자자의 최적 소비와 투자결정에 어떻게 영향을 미치는지에 대해 살펴보고자 한다. 우리는 종종 개별 투자자들은 물론 전문적인 투자를 주된 업무로 하고 있는 투자신탁회사들도 그들의 재산 중 상당부분을 소규모 기업의 주식들에 투자하고 있는 것을 발견하게 된다. 그런데 대기업의 주식과 소기업의 주식은 거래비용상에 차이가 있다. Stoll과 Whaley(1983)의 연구에 의하면 일반적으로 소기업의 주식을 거래하는데 따르는 비용은 블루칩(blue-chip)과 같은 대규모 기업의 주식을

이 논문은 포항공대 연구비지원에 의하여 연구되었음.
* 포항공과대학교 교수
** 서강대 대학원 박사과정 수료

거래하는데 따르는 비용에 비해서 더 높다고 한다. Lamoureux와 Sanger(1989)의 연구에 의하면 NASDAQ시장에서 거래되고 있는 소기업 주식들의 매입-매도 스프레드(bid-ask spread)는 10%이상이며 심지어는 35%까지 되는 것으로 확인되고 있다.

본 연구에서는 최적 수준의 소비와 투자결정 문제는 그 투자자가 가지고 있는 재산 가운데 유동성 자산이 차지하는 비중에 의해 결정된다는 사실을 보이고자 한다. 다시 말하면 투자자의 총재산 보유액 가운데 비유동성 재산의 보유비율이 얼마나 되느냐에 의해 최적의 소비와 투자 수준이 결정된다는 사실을 밝히고자 하는 것이다. 이를 위해 먼저, 일반적으로 투자자의 재산 가운데 유동성 자산의 비율이 증가할수록 그 투자자의 최적소비수준이 증가할 뿐만 아니라 투자에 따른 최적 위험수준도 증가한다는 것을 증명하고자 하며, 또한 주식의 유동성이 적은 기업의 경우(소규모 기업) 배당정책이 그 기업의 주식투자여부 뿐만 아니라 다른 기업의 주식들에 대한 최적 소비와 투자수준를 결정하는데 중요한 영향을 미친다는 사실을 증명해 보이고자 한다. 즉 거래비용이 존재하는 경우 기업의 배당정책이 경제적으로 투자자에게 중요한 의미를 가진다는 것을 밝히고자 하는 것이다. 나아가 거래비용이 존재하는 경우, 비유동성 재산의 견적가격(quoted price)은 중요하지 않으며 대신에 투자자에 의해 평가되는 잠재가치가 중요하다는 것을 보이고자 한다. 견적가격(quoted price)은 거래비용이 큰 경우에는 별 의미가 없어지는데 그 이유는 투자자가 이 가격으로는 비유동성 자산을 거래할 수 없기 때문이다. 이런 상황하에서 투자자는 비유동성 자산의 잠재가치를 평가하게 되며 이런 잠재가치의 평가가 최적의 소비와 투자수준을 결정하는데 중요한 요소가 될 수 있다는 것이다.

Constantinides(1986), Davis와 Norman(1990) 그리고 Shreve와 Soner(1994) 등은 거래비용이 존재하는 경우를 가정하여 본 연구와 비슷한 유형의 소비와 투자 문제를 연구했다. 그러나 이들의 연구는 하나의 무위험 유동자산과 현금배당이 없는 하나의 비유동성 자산만이 존재하는 특별한 상황을 가정한 연구였다. 본 연구는 이러한 기존 연구를 확장하여 투자자에게 보다 폭넓은 투자기회가 주어지는 경우로서, 즉 다수의 유동성 자산과 현금배당이 주어지는 하나의 비유동성 자산이 존재하는 경우 투자자의 최적 소비와 투자결정 문제를 다루고 있다.

거래비용의 측면에서 볼 때 대기업의 주식은 유동성 자산으로, 소기업의 주식은 비유동성 자산으로 간주할 수 있다. 즉 비교적 잘 알려진 대규모 기업의 주식거래에 따른 비용은 소기업의 경우에 비해 상대적으로 작다고 할 수 있다. Stoll과 Whaley (1983)의 연구에 의하면 대기업 주식들의 평균 매입-매도 스프레드(bid-ask spread)는 그 주식가격의 약 0.69%에 불과한 것으로 확인되고 있다. 그러므로 이러한 주식들에

대한 전환수수료(turnaround commission)는 대규모 투자자들의 경우 0.2%이하가 되는 것이 보통이다. 심지어 금융선물계약(financial futures contract)에 대한 매입-매도 스프레드(bid-ask spread)와 수수료는 이 수치보다도 더 작다고 볼 수 있다. 그러므로 대기업의 주식과 금융선물자산들을 유동성 자산으로 고려하고, 소규모 기업의 주식을 비유동성 자산으로 고려하는 본 연구의 모형은 현대 재무시장을 보다 합리적으로 묘사해 주는 방법이 될 것이다.

Koo(1996)는 비유동성 자산의 잠재가치 평가에 대한 이론적 정립을 시도한 바 있으며, 또한 본 연구에서 다루는 모형의 원형(proto-type)을 그 예로서 언급한 바 있다. 선행연구가 비유동성 자산 일반에 대한 잠재가치 평가의 이론적 모형을 제시하는데 그 목적이 있었다면, 본 연구는 이 일반이론을 비례적인 거래비용을 가지는 자산이라는 구체적인 경우에 적용하여 보다 상세한 재무경제적인 의미를 도출하는데 그 목적이 있다. 즉 본 연구는 이론적으로는 보다 세부적인 최적 소비와 투자에 관한 특성을 도출하고 있으며, 이를 위한 수치적 해법을 소개하고 이 해법을 이용하여 구한 해(解)를 바탕으로 재무경제적인 의미와 직관을 유도해 내고자 하는 것이다. 이론과 수치적 해법을 조합한 이러한 접근은 파생금융상품을 다루는 분야에서는 많이 이루어지고 있지만, 자본시장과 투자에 관한 연구분야에는 비교적 새로운 접근방법으로서[1] 닫혀진 해(closed form solution)를 구할 수 없는 모형을 다루는데는 유용할 것으로 기대된다.

유사한 영역의 연구로서 개인의 미래 노동소득을 비유동성 자산으로 고려하여 최적 소비와 투자결정 문제를 다루고 있는 Koo(1995, 1997)와 Duffie, Fleming, Soner 그리고 Zariphopoulou (1997)의 연구가 있다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. Ⅱ장에서는 소비와 투자문제를 설명하며, Ⅲ장에서는 투자자의 재산에 대한 최적 정책의 문제를 다루고자 한다. Ⅳ장에서는 수치적인 해법을 제시하고 마지막으로 Ⅴ장에서 결론을 맺고 있다. 보다 상세한 수치적 증명 및 기술적인 해법은 부록에서 제시하고 있다.

Ⅱ. 거래비용이 존재하는 경우의 소비와 투자 문제

본 연구의 주된 관심은 다수의 유동자산과 하나의 비유동성 자산을 소유하고 있는 투자자의 최적소비와 투자결정 문제이다. 이런 투자자의 목적은 다음과 같은 von

1) 거래 비용, 인적자원 등에 관한 수치적 접근방법을 이용한 연구는 Koo의 연구(1992, 1995) 참조.

Neumann - Morgenstern의 時分割 효용함수(time-separable utility function)를 극대화하는 데 있다.

$$U_t = E_t \int_t^{\infty} e^{-\delta s} v\,(c_s)\,d_s \tag{1}$$

여기서 Et 는 t 시점에서 이용가능한 정보하의 기대치(expectation)이며 v는 일정한 상대위험회피함수(constant relative risk aversion function)이다.

$$v(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-r}}{1-r} & \text{if } r \neq 1 \\ \log\ c & \text{if } r = 1 \end{cases} \tag{2}$$

비유동성 자산의 가격 Q(t)는 다음 식에 의해 전개된다[2].

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \nu_1 dt + \tau\, dB(t), \tag{3}$$

여기서 $\nu 1$과 τ은 양의 상수이며 B(t)는 Brownian motion이다. 비유동성 자산에 대하여는 일정한 비율($\nu 2$)로 현금배당이 지불된다. 즉 이 자산에 의해 지불되는 현금배당은 $\nu 2$ Q(t)dt이 된다. 그러므로 $\nu = \nu 1 + \nu 2$ 는 비유동성 자산에 대한 회계적 기대수익율로서 간주할 수 있다.

투자자에게는 어떠한 거래비용도 발생시키지 않고 매입, 매도할 수 있는 N+1개의 유동성 자산이 주어져 있다. 이들 자산은 무위험자산 1개와 나머지는 모두 위험있는 자산으로 구성되어 있다. 여기서 무위험자산의 수익률은 r로서 일정하다고 가정한다. 즉 무위험자산의 가격 P0(t)는 다음의 과정을 따른다.

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = rdt. \tag{4}$$

j번째 위험있는 유동성 자산의 가격 Pj(t)는 geometric Brownian motion를 따른다고 본다.

2) $Q(t)$는 매수가격(bid price) 또는 매도가격(ask price), 매수와 매도가격의 평균 중에 하나가 될 수 있다.

$$\frac{dP_j(t)}{P_j(t)} = \mu_j dt + \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk} dZ_k(t), \qquad k = 1, \ldots, N \tag{5}$$

여기서 μ_j와 σ_{jk} (k =1,...N)은 일정하며, $Z_1(t)$,....,$Z_N(t)$는 독립적인 Brownian motion 들로서 B(t)와 결합 정규분포를 갖는다. 모든 k(k=1,...,N)에 대하여 $Z_k(t)$와 B(t)간의 상관관계 ρ_k는 일정하다고 가정한다. 또한 메트릭스 $\Sigma=(\sigma_{ij})$는 non-singular 즉, 자본시장은 비유동성 자산이 없다면 완성시장(complete market)이 된다는 것을 가정한다.

본 연구에서 유용하게 사용할 matrix 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\pi = (\pi_{1,t}, \ldots, \pi_{N,t})^* \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)^* \quad \Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{N} \\ &Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_N(t))^* \quad 1 = (1, 1, \ldots, 1)^* \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)^* \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\pi_{j,t}$는 j번째 위험있는 유동성 자산에 투자한 금액[3]이며 *는 메트릭스의 전치(the transpose)를 의미한다.

비유동성 자산의 거래비용은 κ, λ로서 만약 투자자가 회계적 가치가 x인 비유동성 자산을 매각하게 되면 이 금액으로 단지 x(1-κ)만큼의 유동성 자산을 매입할 수 있으며, 투자자가 x(1+λ)가치의 유동성 자산을 매각하는 경우에는 이 금액으로 회계가치 x만큼의 비유동성 자산을 매입할 수 있다는 것이다.

본 연구에서 투자자들은 유동성 자산의 매각을 통해서만 소비행위를 위한 자금을 조달할 수 있다고 가정한다. 그러므로 비유동성 자산과 유동성 자산간의 구분이 중요한 의미를 갖는다고 할 수 있다.

여기서 투자자의 총유동자산 보유액을 L_t로 정의하고 비유동성 자산 보유액(보유 비유동자산의 액면가격)을 I_t로 정의하면 위의 가정들에 의하여 L_t와 I_t는 다음 식으로 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} dL_t &= (rL_t - c_t + \nu_2 I_t)dt + \pi_t^*(\mu - r1)dt \\ &\quad + \pi_t^* \Sigma dZ(t) - (1+\lambda)dM(t) + (1-\mu)dU(t) \\ dI_t &= \nu_1 I_t dt + \tau\, dB(t) + dM(t) - dU(t) \end{aligned} \tag{7}$$

3) 여기서 j=1,2,..., N에 대하여 c_t와 $\pi_{j,t}$에 대한 통상적인 적분조건을 가정한다. 가능한 소비와 투자 profiles의 수학적 정의는 부록에 제시되고 있다.

여기서 M(t)와 U(t)는 기간 [0, t]에 걸친 비유동성 자산에 대한 누적적인 매입과 매도를 의미한다.

투자자의 유동성 자산과 비유동성 자산상의 제약조건은 다음과 같다.

$$L_t + (1-\kappa) I_t \geq 0 \qquad I_t \geq 0 \quad \text{거의 모든 } t \geq 0\text{에 대해.} \tag{8}$$

즉 유동 자산과 비유동성 자산을 유동 자산으로 환산한 가치의 합은 음(-)이 되지 않는다는 것이다. 또한 투자자는 비유동성 자산을 공매(short selling)할 수 없다고 본다.

투자자의 가치함수 Vt는 실현가능한 소비와 투자기회를 가지고 달성할 수 있는 최대한의 가능한 효용가치로 정의된다. 따라서 가치함수는 V(Lt,It)로 표시할 수 있을 것이다. 즉 이 함수는 유동자산과 비유동자산의 함수가 된다.

본 연구에서의 가정은 다음과 같다.

<가정 1> : $\nu - \gamma - \tau \rho^* \Sigma^{-1} (\mu - r1) > 0$

즉 투자자는 거래비용이 없을 경우 정(positive)의 금액만큼 비유동성 자산을 보유한다는 것이다.

<가정 2> : 가치함수는 한계(finite)가 있다. 즉 $V < \infty$. [4)]

이상의 가정하에서 편도함수 VL, L2VLL, VI와 VII은 I >0인 경우에는 연속적(continuous)이며 다음과 같은 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)식이 성립한다[5)].

$$\delta V_t = \max \left[v(c_t) + \frac{E_t[dV]}{dt} \right], \tag{9}$$

위 식에서 부호 max는 (ct, πt) 그리고 (dM(t), dU(t))의 집합에 대하여 극대화를 취한 것이다.

---

4) 가치함수가 finite되기 위한 충분조건은 $\Upsilon > 1$ 또는 $\delta > (1-\Upsilon)[\gamma + 1/\Upsilon(\theta^* \theta + (\nu - \gamma - \tau \rho^* \theta)^2 / (\tau^2 (1-\rho' \rho))]$ 이다. 여기서 $\theta = \Sigma^{-1}(\mu - r1)$이다.

5) 이것은 Shreve와 Soner(1994) 연구의 Corollary 10.3을 변형하여 증명할 수 있다.

Ⅲ. 최적소비와 투자 규칙

본 장에서는 거래비용이 존재하는 경우 최적소비와 투자규칙을 살펴보고자 한다. 먼저 비유동성 자산의 거래에 대한 최적 규칙을 설명하고 다음으로 유동성 자산과 관련된 최적 소비와 투자문제를 설명하고자 한다[6].

1. 비유동자산 거래의 최적 규칙

거래비용을 갖는 소비와 투자결정 문제에 대한 解의 중요한 측면은 투자자가 비유동성 자산을 연속적으로 거래하지 않는다는 것이다. 즉 유동자산과 비유동성 자산간의 불균형이 충분히 클 때만이 거래가 이루어진다는 것이다. 이 節에서는 투자자가 비유동성 자산 보유액의 가치를 잠재적으로 평가하고 이 잠재가치가 거래비용의 지불을 타당하게 할 때만이 거래가 이루어진다는 것을 보이고자 한다[7].

비유동성 자산의 잠재적 상대가치 p는 다음과 같이 정의된다.

$$p \equiv \frac{V_I(L_t, I_t)}{V_L(L_t, I_t)} \ , \tag{10}$$

여기서 첨자는 편도함수를 나타낸다. 가치함수가 L과 I에서 1-γ의 정도에 대하여 동질적(homogeneous)이라고 본다. 그러므로 p는 다음의 비율함수로 간주할 수 있다.

$$z_t \equiv \frac{L_t}{L_t + I_t} \tag{11}$$

이것을 여기서는 유동성 비율(liquidity ratio)이라 부르기로 한다. 사실 z의 증가는 투자자의 자산 보유액 가운데 유동성의 증가로서 간주할 수 있다. 거래비용이 있는

6) 여기서는 유동자산에 대한 최적 소비규칙과 최적 투자규칙을 분리해서 설명하고자 한다. 이는 설명의 편의를 위한 것으로 두 의사결정이 독립적으로 일어나기 때문은 아니다. 비유동자산의 거래에 대한 의사결정은 소비와 유동자산 투자에 관한 의사결정에 의해 좌우되며 그 역도 마찬가지다. 그러나 소비와 유동자산 투자에 관한 최적 의사결정은 동질적 가치함수(homogeneous value function) $V(L,I)$에 의해 요약될 수 있으며, 소비와 유동자산 투자에 대한 최적규칙을 언급하지 않고서도 비유동자산 거래에 대한 최적 규칙의 특성을 설명할 수 있다.

7) 본 연구 모형에서 비유동자산 거래규칙은 Magill과 Constantinides (1976), Constantinides (1986), Davis와 Norman(1990) 그리고 Shreve와 Soner(1994) 등의 연구에서의 거래규칙과 질적으로 동일하다.

경우의 소비와 투자문제를 연구하기 위해 Davis와 Norman (1990)이 이러한 잠재적 상대가치의 개념을 처음으로 사용했다. 이후 Dumas(1992)는 실질 환율(real exchange rates)의 역동성(dynamics)을 연구하기 위해 이를 사용한 적이 있다.

거래비용이 없을 때 p는 항상 1과 동일하다. 그러나 거래비용이 있게 되면 p는 시간에 따라 변하게 된다. 왜냐하면 두가지 유형의 재산 즉 유동성 자산과 비유동성 자산이 불완전한 대체물(imperfect substitutes)이기 때문이다. 그렇다면 투자자의 잠재적 총재산(implicit total wealth) Wt 는 다음과 같이 정의된다.

$$W_t \equiv L_t + p(z_t)I_t \tag{12}$$

이 잠재적 총재산의 크기는 소비와 유동자산 투자에 관한 의사결정에서 매우 중요하다(다음 절의 명제 3을 참조). 관찰이 불가능한 잠재적 총재산과는 대조적으로 관찰가능한 변수인 Lt + It 는 본 연구에서 회계적 총재산(accounting total wealth)으로 부르기로 한다.

다음의 명제는 p가 유동성 비율 z의 단조함수(monotone function)라는 사실을 보이고 있다.

명제 1 : 잠재적 상대가격은 z의 단조증가함수이다. 즉,

$$p'(z) \geq 0$$

(증명 : 부록 참조)

즉, 비유동성 자산의 잠재가치는 투자자의 자산 보유액이 증가할수록 증가한다. 투자자는 이 잠재가치가 비유동성 자산을 매각함으로써 얻을 수 있는 유동자산의 가치와 동일할 때, 즉 p(z)= 1-κ 일 때 비유동성 자산을 매각하고, 이 잠재가치가 비유동성 자산의 구입을 위해 포기해야만 하는 유동자산의 가치, 즉 p= 1+λ와 동일할 때 비유동성 자산을 매입하게 된다. 그리고 1-κ < p(z) < 1+λ일 때는 투자자는 비유동성 자산을 거래하지 않게 된다.

그러므로 p의 단조성(monotonicity)은 만약 투자자가 비유동성 자산의 일부를 매입 또는 매각하고자 하는 경우에는 다음과 같은 두가지 유동성 비율, 즉 a와 b가 존재하게 된다는 것을 의미한다.

$$
\begin{aligned}
p(z) &= 1-\kappa && \text{if} \quad z \le a \\
1-\kappa < p(z) &< 1+\lambda && \text{if} \quad a < z < b \\
p(z) &= 1+\lambda && \text{if} \quad z \ge b.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

이 때 최적 거래규칙은 다음과 같다[8].

유동성 비율 z가 b이상으로 상승하면 z를 b로 다시 끌어내리기 위해 비유동성 자산을 매입하고, 유동성 비율 z가 a이하로 떨어지면 z를 a로 끌어올리기 위해 비유동성 자산을 매각한다. 그리고 유동성 비율 z가 a와 b사이에 존재하면 비유동성 자산은 거래되지 않는다.

즉 총재산 가운데 유동성 자산 보유액이 너무 큰 경우 투자자는 이 유동성을 줄이기 위해 비유동성 자산을 매입하게 된다. 그리고 유동성 자산 보유액이 너무 작은 경우 투자자는 유동성을 증가시키기 위해 비유동성 자산을 매각한다는 것이다.

2. 최적 소비와 투자규칙의 특성

최적 소비와 투자규칙은 다음의 명제로 알 수 있다.

명제 2 : (1) 최적 소비는 다음의 형태를 취한다.

$$
c_t = \begin{cases} q^{\frac{-1}{\gamma}} W_t & \text{if } \gamma \neq 1 \\ \delta W_t & \text{if } \gamma = 1 \end{cases}
$$

여기서 Wt는 식 (12)에 의해 정의되는 잠재적 총재산의 가치이며, $\gamma \neq 1$인 경우 q는 아래와 같이 정의되어 진다.

$$
q \equiv \frac{(1-\gamma)V(L_t, I_t)}{W_t^{1-\gamma}}
$$

8) 이 규칙의 최적성(optimality)은 Shreve와 Soner(1994) 연구의 Theorem 9.2을 변형하여 증명할 수 있다. 또한 a, b<1이므로 Sreve와 Soner(1994)의 논문 6, 8, 11장에서의 결과를 확장하여 (13)이 타당하다는 것을 증명할 수 있다.

(2) 유동성 자산에 대한 최적투자는 다음 형태를 취한다.

$$\pi_t = \frac{1}{\gamma + p'(z_t)(1-z_t)^2}(\sum\sum*)^{-1}(\mu - r1)W_t$$

$$- \frac{\gamma p(z_t)I_t - p'(z_t)(1-z_t)^2 L}{\gamma + p'(z_t)(1-z_t)^2}$$

(증명 : 부록 참조)

명제 2의 (1)은 최적소비는 잠재적 총재산가치의 일부분(fraction)이라는 것을 의미한다(최적소비의 잠재적 총재산에 대한 비율은 γ=1인 경우는 일정하며, $\gamma \neq$1인 경우는 시간에 따라 변함). 즉 최적 소비수준을 결정할 때 투자자는 단지 유동성 자산만을 고려하는 것이 아니라 비유동성 자산도 함께 고려한다는 것이다.

명제 2의 (2)는 유동성 자산에 대한 최적 투자는 역시 잠재적 총재산의 가치에 의해 좌우된다는 것을 말해준다. 명제 2의 (2)식에서 첫번째 항은 평균-분산 효율적 포트폴리오상의 투자를 말하며, 두번째 항은 비유동성 자산의 위험을 헷지하는 투자를 의미한다. 이 두 항에서 편도함수 $p'(z)$의 역할에 주목할 필요가 있는데, 분모의 $\gamma + p'(z)(1-z)2$를 고려해 볼 때 $p'(z)$는 투자자의 위험회피를 증가시키며 두번째 항의 분자항에서 $-p'(z)(1-z)2L$을 고려해 볼 때 헷지 포트폴리오에 대한 투자를 감소시키는 역할을 한다고 볼 수 있다.

투자자의 최적 의사결정에 있어서 잠재적 총재산의 가치는 중요하다고 할 수 있다. 그러나 이것은 다른 사람들에게는 관찰 불가능한 것이다. 다음의 명제에서 관찰가능한 하나의 변수인 회계적 총재산(accounting total wealth)에 대한 최적 소비와 투자 규칙을 언급하고자 한다.

명제 3 : (1) 회계적 총재산가치 $It + Lt$에 대한 최적 소비의 비율은 γ=1이거나 또는 λ=0일 때는 단조 증가(monotone increasing)한다.

(2) 회계적 총재산가치에서 평균-분산 효율적 포트폴리오(=(∑∑*)-1(μ -$r1$))상의 최적 투자비율은 비유동성 자산을 매각할 때보다도 비유동성 자산을 매입할 때가 엄격히 더 크다.

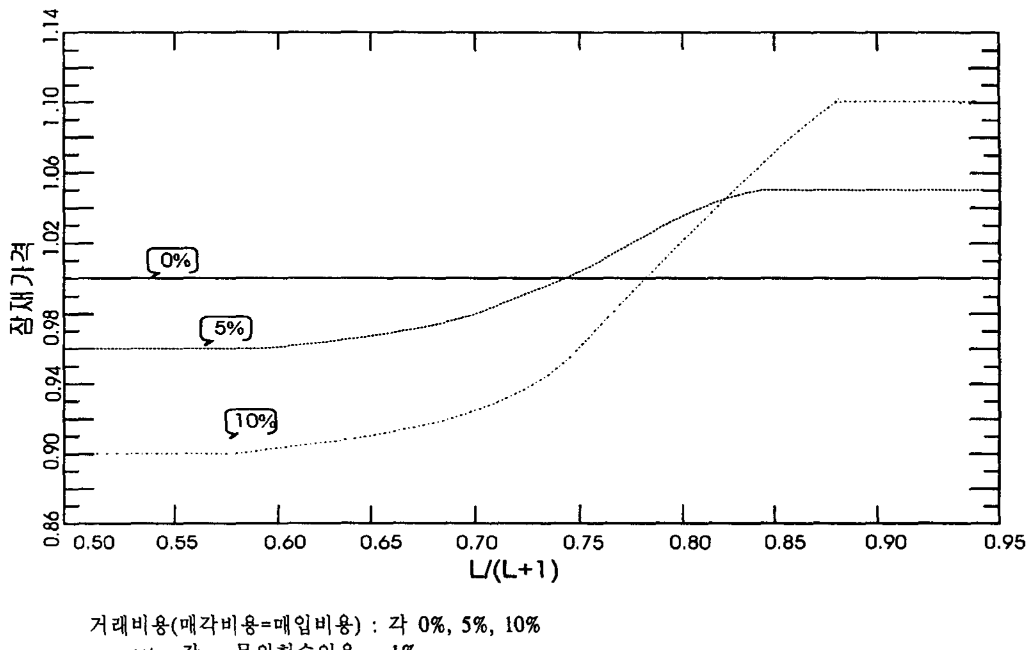
(증명 : 부록 참조)

명제 3의 (1)은 $\gamma=1$이거나 또는 $\lambda=0$[9]일 때는 최적 소비는 유동성 자산 보유액이 증가할 때 증가한다는 것을 말해 준다. 평균-분산 효율적 포트폴리오상의 투자정도는 투자자가 유동성 자산에서 초래되는 위험을 기꺼이 택할 수 있는 크기에 의해 결정된다. 명제 3의 (2)는 유동성 투자에서 최적 위험수준은 투자자가 비유동성 자산을 매각했을 경우(즉 보유자산의 유동성이 작을 때)보다는 비유동자산을 매입했을(즉 보유자산의 유동성이 클 때) 경우가 더 높다는 것을 말해 준다.

Ⅳ. 數値的 解法

이 章에서는 수치적인 解法을 소개하고자 한다. 解를 얻기 위한 자세한 수치적 방법은 부록에서 설명하고 있다.

〔그림 1〕 비유동성 자산의 잠재가치



거래비용(매각비용=매입비용) : 각 0%, 5%, 10%
parameter 값 : 무위험수익율 = 1%
유동위험자산 수익률의 평균 = 7%
유동위험자산 수익률의 표준편차 = 20%
비유동자산 수익률의 평균 = 14%
비유동자산 수익률의 표준편차 = 35%
두자산간의 상관관계 = 0.7
비유동자산의 배당수익률 = 0%

9) 만약 비유동자산의 가격 Q(t)가 ask price이고 거래수수료를 무시한다면, $\lambda=0$이다.

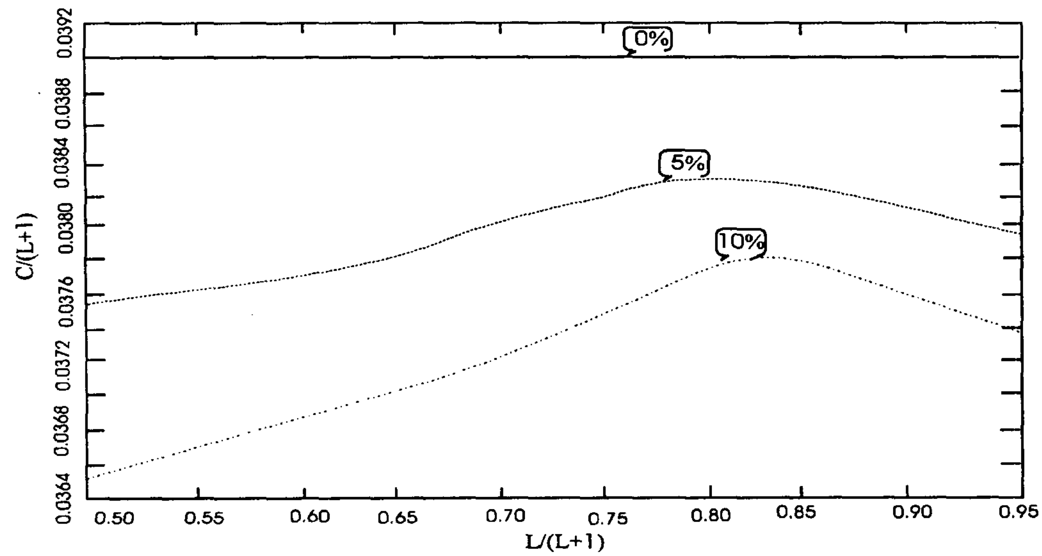
[그림 1]은 두가지 유동자산, 즉 하나의 무위험 유동자산과 하나의 위험 유동자산이 존재하는 경우에 대한 잠재적 상대가치(implicit relative prices)를 나타내고 있다.

모수의 값들은 다음과 같다. 즉 유동성 위험자산의 평균 μ와 수익률의 표준편차 σ가 각각 0.07과 0.20의 값을 갖고 비유동성 자산의 평균수익률 $\nu 1$과 표준편차 τ가 각각 0.14와 0.35의 값을 가지며, 비유동성 자산의 배당지급율 $\nu 2$가 0, 유동성 위험자산과 비유동성자산 가격간의 상관관계 ρ가 0.7, 무위험 수익률 r은 0.01이고 상대 위험 회피계수 Υ가 3의 값을 취하는 경우이다.

[그림 1]은 잠재적 상대가격은 유동성 비율(=L/(L+I))이 증가할 때 증가함을 보여준다. 또한 이 그림에서는 거래가 이루어지지 않는 구간을 알 수 있다. 이 구간은 거래비용 $\kappa=\lambda$=5%이면 [0.597, 0.841]이며, $\kappa=\lambda$=10%이면 [0.573, 0.871]이 된다. 거래비용이 없을 때 최적 유동성 비율은 0.698이 되며 이는 거래가 이루어지지 않는 구간에 속해 있다.

[그림 2-1]은 회계적 총재산가치에 대한 소비의 비율을 나타낸다. 모수의 값은 [그림 1]에서의 값과 동일하다. 거래비용이 증가할 때 이 비율이 감소하는 것을 알 수 있다. 거래비용이 증가함에 따라 소비와 투자를 위해 쉽게 사용될 수 있는 유동성 재산을 유지할 필요성은 더 많다. 따라서 유동성 재산을 유지하고자 하는 이러한 동기의 결과로서 소비는 감소하게 된다.

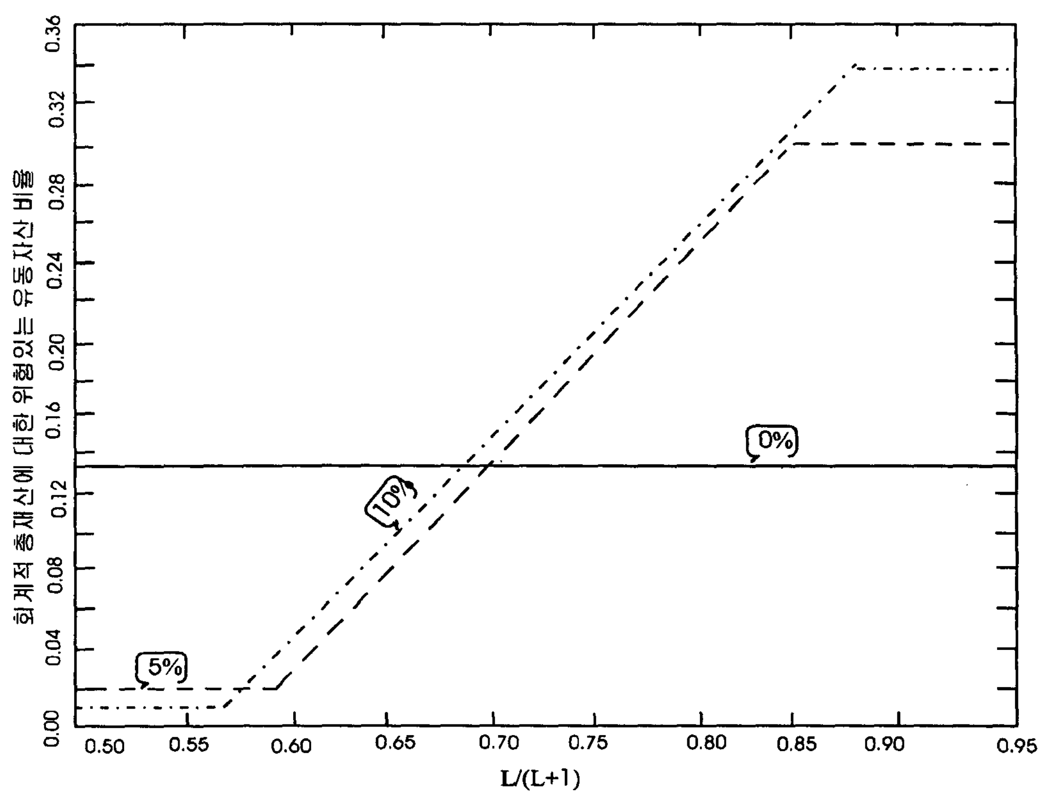
〔그림2-1〕 회계적 총재산에 대한 소비비율



거래비용(매각비용=매입비용) : 각 0%, 5%, 10%
parameter 값 : [그림 1]과 동일

[그림 2-2]는 회계적 총재산에 대한 위험있는 유동성 자산 보유액의 비율을 나타낸다. 이 그림은 유동성 비율이 증가할 때 위험있는 유동성 자산의 보유액은 증가한다는 것을 보여준다. 자산 보유액 가운데 유동성이 증가할 때 투자자의 최적 위험부담(risk taking) 수준은 증가하게 된다. 그러므로 투자자는 위험있는 유동성 자산 보유액을 증가시킨다. 위험있는 유동성 자산 보유액이 회계적 총재산의 34%만큼 높을 수도 있고 거래비용(즉 κ와 λ)이 10%면 회계적 총재산의 1%수준으로 낮아질 수도 있다. 반면에 거래비용이 없는 경우는 이 비율이 13%로 일정하다.

〔그림 2-2〕 회계적 총재산에 대한 위험있는 유동자산의 비율



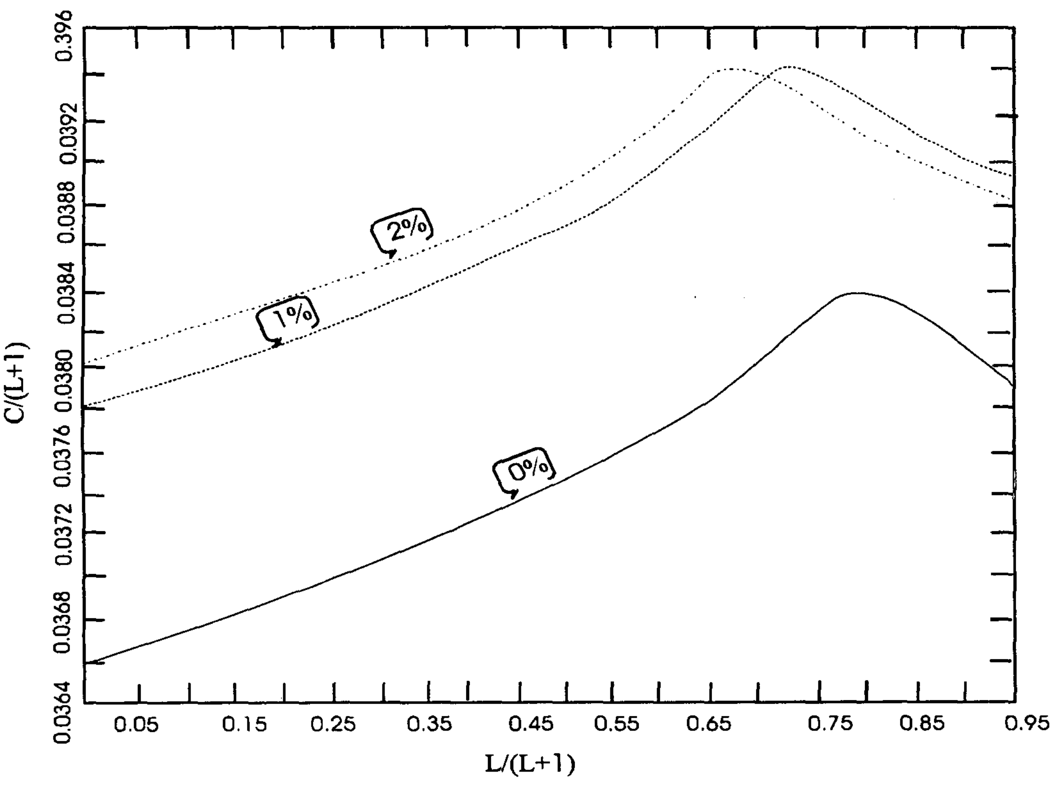
거래비용(매각비용=매입비용) : 각 0%, 5%, 10%
parameter 값 : [그림 1]과 동일

[그림 3-1]과 [그림 3-2]는 배당지급율이 상이한 비유동성 자산의 경우에 있어서 최적소비와 위험있는 유동자산에의 투자를 나타내고 있다. 그림에서는 배당지급율이 0%, 1%, 2% 인 경우를 보여주고 있다. 비유동성 자산(즉 $\nu 1 + \nu 2$)의 회계적 기대수

익율은 14%라고 가정하고 있다. 거래비용(κ와 λ)이 5%이고 나머지 모수값들은 [그림 1]에서와 동일하다. 첫째, 배당지급율이 증가할 때 거래가 없는 비거래 구간은 왼쪽으로 이동한다. 배당지급율이 0%일 때 비거래 구간은 [0.597, 0.841]이며 배당지급율이 1%일 때는 [0.490, 0.743]이 되고 배당지급율이 2%일 때는 [0.425, 0.683]이 된다. 즉 배당지급율이 증가할수록 동일한 수준의 유동성 비율을 유지하기 위해 투자자는 그의 자산 보유액 중에서 유동성을 증가시킨다. 그러므로 비거래 구간은 유동성 비율이 감소하는 방향으로 이동한다.

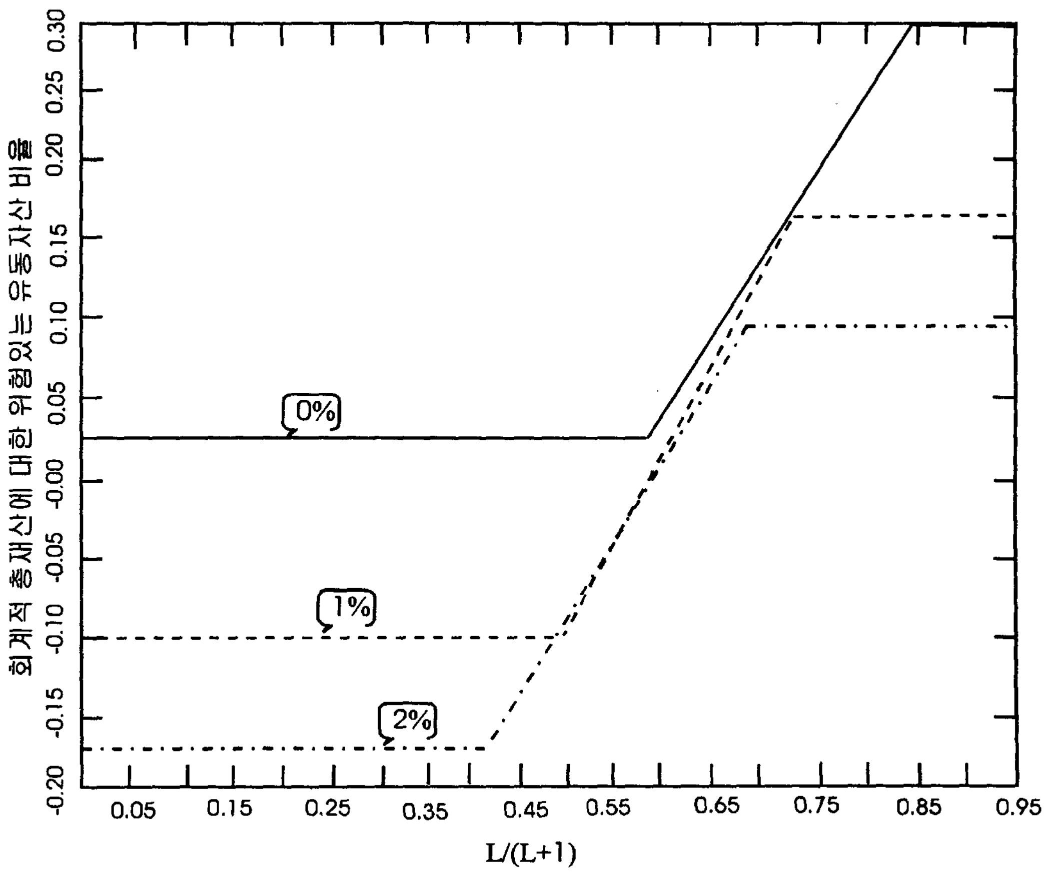
[그림 3-1]은 배당지급율이 증가할 때 일반적으로 최적 소비는 증가한다는 사실을 보이고 있다. 즉 배당은 소비를 위한 자금을 제공하며 따라서 최적 소비는 배당지급율이 증가할 때 증가하는 경향이 있다.

〔그림 3-1〕 회계적 총재산가치에 대한 소비비율



비유동자산의 배당수익률 : 0%, 1%, 2%
거래비용 : 5%
기타 parameter 값 : [그림 1]과 동일

〔그림 3-2〕 회계적 총재산에 대한 위험있는 유동자산 보유비율



비유동자산의 배당수익률 : 0%, 1%, 2%
거래비용 : 5%
기타 parameter 값 : [그림 1]과 동일

[그림 3-2]는 배당지급율이 증가할 때 위험있는 유동성 자산에 대한 투자는 일반적으로 감소한다는 것을 보이고 있다. 즉 배당지급율이 증가할 때 비유동성 자산의 보유액은 평균적으로 증가하고, 따라서 투자자의 추가적인 위험부담은 감소한다. 배당지급율이 0이 아니고 유동성 비율이 작을 경우는 심지어 투자자가 위험있는 유동성 자산을 공매(short sale)한다는 사실을 알 수 있다. 이 경우에 투자자는 비유동성 자산의 대량 보유에 대한 헷지로써 위험있는 유동 자산을 이용한다.

V. 결 론

본 연구에서는 투자자가 재산 일부로서 비유동성 자산을 가지고 있을 경우 최적 소비와 투자규칙을 살펴보았다. 비유동성 자산의 거래는 거래량에 따라 비례적으로 거래비용을 발생시킨다. 본 연구의 결과 투자자의 최적 소비와 투자수준는 투자자의 총재산 보유액 가운데 비유동성 자산액의 비중에 의해 결정된다는 사실을 살펴보았다. 즉 재산보유액 중에서 유동성이 증가하면 일반적으로 최적 소비와 위험부담 수준은 증가한다는 것을 알 수 있었다.

또한 본 연구에서는 이에 대한 수치인 해법을 제시했다. 특히 수치인 해법을 통해 배당지급율의 증가는 일반적으로 소비와 비유동성 자산의 보유액을 증가시키며 위험있는 유동 자산에 대한 투자를 감소시킨다는 사실을 알 수 있었다. 투자자는 배당지급율이 충분히 클 경우 비유동성 자산의 위험을 헷지하기 위해 심지어 위험있는 유동성 자산을 공매하게 된다. 이러한 사실로부터 우리는 거래비용이 존재하는 경우 기업의 배당정책이 경제적으로 중요한 의미를 가지게 된다는 것을 알 수 있다.

본 연구에서의 방법론과 결과는 거래가 없는, 즉 비거래(non-tradability) 자산이 존재하는 경우에 투자자의 최적 소비와 투자결정 문제를 다룬 Koo(1997)의 연구와 비슷하다. 따라서 우리는 거래비용이 존재하든지 또는 거래가 불가능하든지간에 자산의 비유동성은 투자자의 최적 소비 및 투자결정에 비슷한 영향을 미치는 것으로 해석할 수 있다.

〈부 록〉

1. 가능한 소비와 포트폴리오 Profiles:

B(t), W1(t), W2(t), . . .,WN(t)에 기초한 확율공간은 (Ω, $\mathcal{F}$, P)로 정의한다. 여기서 Ω는 모든 가능한 상황(states)의 집합이며, $\mathcal{F}$는 시그마 필터(sigma filter)이고, P는 확율값을 의미한다.

허용가능한 소비범위(profile) (cs)s≥t는 다음을 만족시키는 연속적인 $\mathcal{F}$ 과정으로 표현된다.

$$c_s \geq 0 \quad \text{a.s.} \quad s \geq t, \quad \text{and} \quad \int_t^u c_s ds < \infty \quad \text{a.s.} \quad u \geq t \tag{A.1}$$

허용가능한 포트폴리오는 다음을 만족하는 N개의 연속적인 $\mathcal{F}$ 과정 (π 1,s)s≥t, . . .,(π N,s)s≥t 으로 구성된다.

$$\int_t^u \pi_{i,s}^2 \, ds < \infty \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, N, \text{a.s.} \quad u \geq t. \tag{A.2}$$

가능한 소비와 포트폴리오 범위(profile)는 허용가능한 소비 범위와 포트폴리오 범위로 구성되는 순서쌍 ((ct),(π t))이 되며, 이것은 식 (7)에 의해 얻어지는 Lt와 It가 식 (8)의 제약조건을 만족시킬 수 있도록 하는 두 개의 비감소 연속적 $\mathcal{F}$ (two non-decreasing progressively $\mathcal{F}$ measurable processes)인 M(t), U(t)를 가지고 있다.

(명제 1의 증명) : 여기서는 $\gamma \neq 1$인 경우에 대해서만 증명하며 $\gamma=1$인 경우에 대한 증명은 비슷한 방법으로 할 수 있을 것이다.

이 명제는 오목한 가치함수(concave value function)를 따를 것이다. 즉 효용함수가 오목(concave)하고 실현 가능한 소비와 포트폴리오 집합이 오목하기 때문에 가치함수도 오목하게 된다(자세한 내용은 Shreve와 Soner(1994)의 연구를 참조바람).

이제 가치함수의 오목성(concavity)을 가지고 잠재적 상대가치가 단조성(monotonicity)을 갖는다는 사실을 보일 수 있다. ω(x) ≡ V(x,1)로 정의하면 우리는

$$V(L, I) = w(x) I^{1-\gamma} \tag{A.3}$$

와

$$V_L(L, I) = w'(x)I^{-\gamma}, \quad V_I(L, I) = (1-\gamma)w(x)I^{-\gamma} - w'(x)xI^{-\gamma}. \quad \text{(A.4)}$$

을 얻을 수 있다. 여기서 x = L / I이다. 그러므로

$$p = \frac{V_I}{V_L} = (1-\gamma)\frac{w(x)}{w'(x)} - x \quad \text{(A.5)}$$

이며

$$w'(x) = (1-\gamma)\frac{w(x)}{x+p} = q(x+P)^{-\gamma} \quad \text{(A.6)}$$

이다. 여기서 q는

$$q \equiv \frac{(1-\gamma)w(x)}{(x+p)^{1-\gamma}}$$

로 정의된다.

식 (A.4),(A.5) 그리고 (A.6)를 이용하여 우리는 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
V_L &= q(L+pI)^{-\gamma} \\
V_{LL} &= -q(L+pI)^{-\gamma-1}(\gamma + (1-z)^2 p'(z)) \\
V_I &= pq(L+pI)^{-\gamma} \\
V_{II} &= -q(L+pI)^{-\gamma-1}(\gamma p^2 + z^2 p'(z)) \\
V_{LI} &= -q(L+pI)^{-\gamma-1}(\gamma p - z(1-z)p'(z)).
\end{aligned} \quad \text{(A.7)}$$

여기서 z는 유동성 비율 L / (L+I)을 의미한다.

식 (A.7)과 가치함수 V의 오목성(concavity)으로부터 다음 식이 성립하게 된다.

$$V_{LL}\, V_{II} - V_{LI}^2 = q^2(L+I)^{-2}(L+pI)^{-2\gamma} p'(z) \geq 0. \quad \text{(A.8)}$$

식 (A.8)의 마지막의 부등식에서 우리는 p'(z)≥0이 됨을 알 수 있다.

(명제 2의 증명) : 여기서는 $\gamma \neq 1$인 경우에 대해서만 증명하며 $\gamma = 1$인 경우에 대한 증명은 비슷한 방법으로 증명할 수 있을 것이다.

일반화된 Ito formula (Harrison(1985)연구의 4.7장 참조)로부터 우리는 HJB식(식(9))을

$$\begin{aligned}\max\Big[\ & v(c_t)+\frac{1}{2}\pi_t^*(\Sigma\Sigma^*)\pi_t V_{LL}+\frac{1}{2}\tau^2 I^2 V_{II} \\ & +\pi_t^*\Sigma^*\rho I_t V_{LI}+(\tau L_t+\nu_2 I_t-c_t)V_L \\ & +\pi_t^*(\mu-r1)V_L+\nu_1 I_t V_I-\delta V\ \Big] \\ & +(V_I-(1+\lambda)V_L)dM(t)+((1-\kappa)V_L-V_I)dU(t)\ =\ 0,\end{aligned} \tag{A.9}$$

와 같이 쓸 수 있다.

$(V_I-(1+\lambda)V_L)dM(t)$와 $((1-\kappa)V_L-V_I)dU(t)$항들이 투자자가 3.1장에서의 거래규칙을 따른다면 모두 0이 된다.

식 (A.9)의 왼편을 (c_t, π_t)에 대해 극대화하면 최적 소비와 투자 규칙을 위한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} c_t &= V_L^{-\frac{1}{\gamma}} \\ \pi_t &= -\frac{V_L}{V_{LL}}(\Sigma\Sigma^*)^{-1}(\mu-r1)-\frac{I_t V_{LI}}{V_{LL}}(\Sigma^*)^{-1}\tau\rho \end{aligned} \tag{A.10}$$

식 (A.7)과 (A.10)은 명제 2를 의미한다((A.10)에서 소비와 유동성 투자를 위한 최적의 규칙은 Shreve와 Soner(1994)연구의 정리 9.2에 대한 증명을 확장시킴으로써 증명할 수 있을 것이다).

(명제 3의 증명) : (1) $\gamma=1$을 가정하자. 그러면 명제 3의 (1)은 명제 2의 (1)과 $p(z)$가 z의 단조증가함수(monotone increasing function)라는 사실이 성립한다.

이제 $\gamma \neq 1$이라고 가정하자. 식(A.4)를 이용하여 식 $q(z)=[(1-\gamma)V(L,I)/(L+p(z)I)]^{1-\gamma}$의 좌, 우변에 로그 도함수를 취하면 다음과 같은 식이 성립함을 알 수 있다.

$$q'(z)\ =\ -\frac{(1-\gamma)(1-z)p'(z)}{z+(1-z)p(z)}\,. \tag{A.11}$$

회계적 총재산에 대한 최적 소비 비율을 r(zt)로 표시하면

$$r(z_t) \equiv \frac{c_t}{L_t + I_t} \tag{A.12}$$

이 된다. 그러면 명제 2(1)과 식 (A.11)은 다음을 의미하게 된다.

$$\begin{aligned} r'(z) &= \frac{1-\gamma}{\gamma} q(z)^{-\frac{1}{\gamma}} p'(z)(1-z) + q(z)^{-\frac{1}{\gamma}} [1 + (1-z)p'(z) - p(z)] \\ &= q(z)^{-\frac{1}{\gamma}} [\frac{1}{\gamma}(1-z)p'(z) + 1 - p(z)]. \end{aligned} \tag{A.13}$$

우리는 p'(z) ≥0이며 만약 λ=0이면 p(z)≤1이라는 사실을 알고 있다. 또한 (8)의 제약조건 때문에 1-z = I/(L+I)≥0이며 z+(1-z)p = (L+pI)/(L+I)≥0라는 것을 안다. 그러므로 만약 λ=0라면 p(z)≤1이므로 r'(z)≥0가 성립하게 된다.

(2) smooth pasting conditions에 의해, 잠재적 상대가치의 도함수는 z≤a와 z≥b에 대해 0이 된다(smooth pasting conditions에 대한 설명은 Dixit(1993)의 연구를 참조). 따라서 이러한 사실로부터 명제 2의 (2)는 비유동성 자산을 매입할 때는 p(z) = 1+λ가 되며, 비유동성 자산을 매각할 때는 p(z) = 1-κ가 성립하게 된다.

2. 수치적 방법 :

여기서는 γ≠1인 경우의 수치적 방법을 설명하고자 한다. 비슷한 방법으로 γ=1인 경우도 설명할 수 있을 것이다.

HJB의 식 (A.9)은 p(z)에 대해 다음의 식이 성립한다:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\rho^*\rho - 1)\, r^2\, z^2\, u^2 \\ &+ [\frac{\gamma}{1-\gamma} q^{-\frac{1}{\gamma}} (z + (1-z)p)^2 + (rz + (1-z)\nu_2)(z + (1-z)p) \\ &+ \nu_1(1-z)p(z + (1-z)p) + \frac{\gamma}{2} r^2 (z^2 - (1-z)^2 p^2) - \frac{\delta}{1-\gamma}(z + (1-z) \\ &+ \gamma(\Psi - \rho^*\rho r^2) z(z + (1-z)p)]\, u \\ &+ \frac{\gamma^2}{2}(\Pi - 2\Psi + \rho^*\rho r^2)^2 (z + (1-z)p)^2 = 0, \end{aligned} \tag{A.14}$$

여기서 u= γ +p'(z)(1-z)2 이며

$$\Psi = (u - r1)^{*}(\Sigma^{*})^{-1}\rho r$$

$$\Pi = (u - r1)^{*}(\Sigma\Sigma^{*})^{-1}(u - r1).$$

수치적 방법은 미분방정식 (A.11)과 (A.14)의 system를 Runge-Kutta방법으로 해결하는 것이다. 우리가 범위값(boundary values) a와 b를 모르고 있기 때문에 이러한 문제는 범위없는 가치문제(free-boundary value problem)가 된다.

Davis와 Norman(1990)연구에서의 방법을 확장하면 범위없는 가치문제는 다음의 1차원적 탐색방법(one-dimensional search method)을 이용하여 해결할 수 있다.

1. 하나의 가능 경계로 b<1를 선택

2. 식 (A.14)를 이용하여 q(b)를 결정. 우리는 p(b)=1+ λ 이고 p'(b)=0라는 것을 알고 있기 때문에(smooth pasting conditions은 p'(z)의 continuity를 의미하고, 그러므로 p'(b)=0), q(b)는 식 (A.15)로부터 유일하게 결정될 수 있다.

3. z=a가 되어 p'(a)=0가 될 때까지 미분방정식 (A.11)과 (A.14)을 푼다. (smooth pasting conditions이 p'(z)의 continuity를 의미하므로 p'(a)=0). p(a)=1-k인지를 확인하여 아니라면 다른 b로 시작하는 방식으로 p'(a)=0, p(a)=1-k의 조건을 만족하는 해를 발견할 때까지 계속한다.

유동성 자산에 대한 최적 소비와 투자는 일단 p와 q를 알 수 있다면 명제 2에 의해서 주어지게 된다.

수치적 방법은 비거래 구간의 좌측 끝점 a가 양수(+)인 경우에 한해서 타당하게 된다.

참 고 문 헌

Constantinides, George M., 1986, "Capital Market Equilibrium with Transactions Costs," Journal of Political Economy 94, 842-862.

Davis, M.H.A. and A.R. Norman, 1990, "Portfolio Selection with Transactions Costs," Mathematics of Operations Research 15, 676-713.

Dixit, A., 1991, "A Simplified Treatment of the Theory of Optimal Regulation of Brownian Motion," Journal of Economic Dnamics and Control 15, 657-673.

Dixit, A., 1993, The Art of Smooth Pasting, Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland.

Duffie, Darrell, Wendell Fleming, H.M.Soner, and Thaleia Zariphopoulou, 1997, "Hedging in Incomplete Markets with HARA Utility," memeo, Journal of Economic Dynamics and Control, forthcoming.

Dumas, Bernard, 1992, "Dynamic Equilibrium and the Real Exchange Rate in a Spatially Separated World," Reivew of Financial Studies 5, 153-180.

Dumas, Bernard and Elisa Luciano, 1991, "An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transactions Costs," Journal of Finance 46, 577-595.

Harrson, J.M., 1985, Brownian Motion and Stochastic Flow Systems, John Wiley and Sons, New York.

Koo, H.K., 1992, "Three Essays On Consumption and Portfolio Choice in the Presence of Market Frictions," unpublished dissertation, Princeton University.

Koo, H.K., 1995, "Consumption and Portfolio Selection with Labor Income: Evaluation of Human Capital," mimeo, Washington University in St. Louis.

Koo, H.K., 1997, "Consumption and Portfolio Selection with Labor Income II: A Continuous - time Approach," Mathematical Finance, forthcoming.

Koo, H.K., 1996, "Evaluation of Illiquid Assets" 재무관리논총 제 3권, 제 2호, 한국재무관리학회, 235-256.

Lamoureux, Christopher G. and Gary C. Sanger, 1989, "Firm Size and Turn-of-the -Year Effects in the OTC/NASDAQ Market," Journal of Finance 44, 1219-1245.

Magill, M.J.P. and George Constantinides, 1976, "Portfolio Selection with Transactions Costs," Journal of Economic Theory 13, 245-263.

Merton, R.C., 1971, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," Journal of Economic Therory 3, 373-413.

Merton, R.C., 1973, "An Intertemporal Asset Pricing Model," Econometrica 41, 867-880.

Shreve, S.E. and H.M.Soner, 1994, "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs," The Annals of Applied Probability 4, 609-692.

Stall, Hans R. and Robert E. Whaley, 1983, "Transaction costs and Small Firm Effect," Journal of Financial Economics 12, 57-79.