

통수단면 축소구간의 수리특성에 대한 수치실험

Numerical Experiments on Hydraulic Characteristics in Constriction Openings

고 광 돈* , 권 순 국**
Ko, Gwang-don Kwun, Soon-kuk

Abstract

The hydraulic characteristics in constriction openings are analysed numerically by using Galerkin type finite element model of which the governing equation comprises the depth averaged continuous equation and the two-dimensional Navier-Stokes equation. For the time integration, two step Lax-Wendroff scheme is used.

In case of flows in one-dimensional rectangular channles, numerical solutions are in well agreement with analytical solutions. For the water surface and backwater profiles at the constrictions in the uniform flow channel, the numerical solutions are almost coincided with the experimental results.

In order to close look at the flow characteristics in near constriction openings, the experimental results of physical model tests by the Rural Development Corporation are compared with the numerical results simulated by the model developed in this study. Average velocities, maximum velocities and water depths in constriction openings which reduce the cross sectional area up to 1/3 of original one are showed well agreement between the result of the physical model and the numerical model. However, there are not in good agreement between numerical solutions and experimental results in terms of locations which the maximum velocities take place showing the maximum velocities occur almost in the center line of the flow section in numerical analysis while they occur in the tip of constrictions in experimental results. The reason for this result seems to be that the finite element model does not embrace the effect of effective shear stresses such as Reynolds stresses, depthing-averaging effect and viscous shear stress. Further research on this respect will be necessary.

I. 서 론

간척 사업에서의 체절구간 수위·유속계산, 교각 주위에서의 세굴 등의 문제를 해결하기 위해

서는 통수 단면 축소에 따른 수리 현상을 정확히 해석할 필요가 있다. 축소 단면내의 흐름은 와류와 단면 변화에 의한 형상 항력으로 매우 복잡한 특성을 가지고 있다.⁵⁾

* 농어촌진흥공사 농어촌연구원
** 서울대학교 농업생명과학대학

키워드 : 단면축소구간, Galerkin형 유한요소모형, 유효 점성항, 수심 평균된 지배방정식, 수치해석모형

이러한 곳의 수리 현상을 해석하는 방법은 모형 실험에 의한 방법과 수치모형에 의한 방법으로 대별된다. 전통적인 방법은 모형 실험에 의한 방법으로 최근에도 많이 실행되고 있다. 그러나 이 방법은 비용과 시간이 많이 들고 융통성이 없다는 단점이 있다.¹⁵⁾ 반면에 수치 모형은 짧은 시간에 많은 경우를 모의 발생시켜 볼 수 있고 비용이 저렴하다. 그렇지만 수치 모형은 계산결과의 검증이 어렵고 자연현상을 수치적으로 표현하는데도 한계가 있다. 이러한 결점에도 불구하고 수치 모형은 컴퓨터의 발달로 예전에 모형 실험으로만 해결할 수 있었던 분야에도 적용되고 있다.

수치 모형을 이용한 단면 변화 시의 수리현상 해석 사례는 Ponce와 Yabusaki(1981)가 유한차분 기법을 이용하여 단면 변화에 따른 물의 순환 현상을 연구한 것이 있으며, 이 연구에서 시간 간격과 격자 간격의 관계를 이용하여 유효전단응력 항을 도입한 바 있다. 그리고 Mehta(1980)은 만의 축소 부에서의 흐름해석을 위하여 수치 모델을 적용하였다. Anderson et al.(1984)은 유효점성 항을 이용하여 단면 변화에 따른 유한차분 해석 시 발생하는 진동을 감소시켰다. 그리고 Babarutsi et al.(1987)는 개수로 단면 급확대부에 대한 순환 현상을 규명하기 위하여 하상 마찰이 순환에 크게 영향을 미친다고 가정하고 이의 영향을 나타내기 위해 무차원화된 하상마찰계수의 개념을 도입하였다.

국내에서는 권순국과 나정우 등(1992, 1993, 1994)이 빈도 영역에 의한 유한요소모형을 이용, 새만금 간척지구에서의 조류 해석을 하여 만족스러운 결과를 나타낸 바 있으며, 윤태훈과 서승원 등(1987, 1988, 1989)은 단면 확대에 의한 순환 현상, 개수로 단면 축소로 인한 수면 변화 그리고 개경계조건의 적정 범위 결정에 관하여 연구한 바 있다.

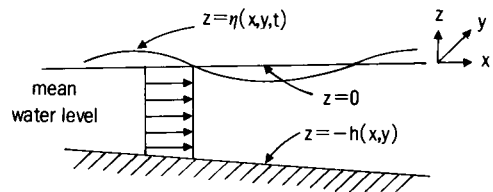
본 연구에서는 상류(常流)조건인 단면 축소 구간에서의 수리 특성을 연속방정식과 운동량 방정식의 수심 평균된 지배 방정식을 이용하고, 수치 해석기법으로는 불규칙 경계에도 쉽게 적용할 수 있는 유한요소법을 이용하여 해석하고자 한다. 그

리고 수심 평균된 지배 방정식을 이용한 유한요소 모형의 단면 축소시 적용 한계를 살펴보고자 한다.

II. 수학적 모형의 구성

1. 지배 방정식

가. 연속 방정식



〈Fig. 1〉 Definition sketch of mean water level and wave height

3차원 공간에서 좌표계를 〈Fig. 1〉과 같이 정의하면 미소 유체 검사 체적에 대한 질량보존식은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

비압축성 유체라고 가정하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

식(1)의 각 항을 수심 방향으로 평균하고, Leibnitz rule을 쓰면 다음과 같은 수심 평균된 2차원 연속 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [(\eta+h)\bar{u}]}{\partial x} + \frac{\partial [(\eta+h)\bar{v}]}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

여기서, u, v, w 은 x, y, z 방향의 유속이며 \bar{u}, \bar{v} 는 수심 평균된 유속이다. ρ 는 밀도, t 는 시간이다.

나. 운동량 방정식

3차원 공간에서 미소 유체 검사 체적에 대한 x

축 방향의 운동량 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x + (\text{Reynolds stress의 } x\text{성분}) + (\text{Coriolis force의 } x\text{성분}) = 0 \quad (4)$$

식(4)의 수심 평균된 형태는 다음의 식(5)와 같이 정리되고 같은 방법으로 y방향에 대한 운동량 방정식을 수심 평균된 형태로 나타내면 식(6)이 얻어져 다음과 같은 수심 평균된 운동량 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - f \bar{v} \\ & - \epsilon_x \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{n^2 g \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \\ & - \frac{c}{\rho H} w_x (w_x^2 + w_y^2)^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + f \bar{u} \\ & - \epsilon_y \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{n^2 g \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \\ & - \frac{c}{\rho H} w_y (w_x^2 + w_y^2)^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, Coriolis 계수 f 는 지구의 회전 각속도 ω 이고 위도가 θ 일 때 $f=2\omega \sin\theta$ 이고 c 는 경험적으로 정해지는 상수이다. w_x, w_y 는 각각 x, y 방향의 풍속 성분이다. n 은 Manning 계수이며 $H=\eta+h$ 이다. ϵ 는 와점성계수로 ϵ 를 Ponce와 Yabusaki(1981)는 $\epsilon=\alpha(\Delta x)^2/2\Delta t$ 로 해석하였으며, Anderson et al.(1984)은 $\epsilon=\alpha\beta(\Delta x)^2/\Delta t$ 으로 해석하였다. 이 식에서 Δx 는 공간 증분량이며 Δt 는 시간 증분량이다. 그리고 β 는 다음과 같이 표시된다.

$$\beta = \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1}| + |h_i| + |h_{i-1}|}$$

여기서, i 는 공간 격자 번호이다.

본 모형에서는 Ponce와 Yabusaki(1981)의 방법은 모형 전체에 일괄적으로 일정한 값을 주는

방법으로서 단면이 변하는 구간에서 적용하는 데 적절하지 않아 Anderson et al.(1984)의 방법을 이용하였다.

본 연구에서는 위의 식 중에서 편향력항과 바람에 의한 응력항을 고려하지 않았다. 그리고 이후 식에서 사용되는 유속은 모두 수심 평균된 유속을 의미한다.

2. 유한요소모형의 구성

유한요소법은 변분법 또는 가중잔차법을 이용하여 분할된 개개의 요소 내에서 성립되는 주어진 미분방정식에 등가인 유한요소 방정식을 구한 다음, 각 요소의 유한요소 방정식을 적절히 조합하고 주어진 경계 조건 및 초기 조건을 대입하여 변형하면 미분 방정식과 경계 조건 및 초기 조건에 등가인 전체 영역에 대한 다원 연립 방정식의 형태를 가진 유한요소량이 구해지는데, 이 연립 방정식의 해를 구함으로써 미지 변수의 절점값을 결정하는 방법이다.¹⁶⁾

본 연구에서는 가중잔차법이 이용되었다.

가. 가중잔차식의 유도

본 연구에서는 가중잔차식을 유도하기 위하여 잔차법 중의 하나로 널리 쓰이는 Galerkin법을 사용하였다. 지배 방정식에 가중 함수를 곱한 다음 전체 영역에 대하여 적분하고, 가중잔차가 최소가 되도록 하였다.¹⁶⁾

식(3)의 연속 방정식을 수심변위 $\delta\eta$ 로 가중하고 내부 영역에 대하여 적분함과 아울러, 경계 면에서의 유출입량도 $\delta\eta$ 로 가중하고 이를 경계면에 따라 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \iint \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \delta\eta - u(h+\eta) \frac{\partial \delta\eta}{\partial x} - v(h+\eta) \frac{\partial \delta\eta}{\partial y} \right] dR \\ & + \int Q_n^* \delta\eta dB = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Q_n^* : 경계지점에서의 유량벡터

R : 내부영역

B : 경계면

식(5)와 식(6)의 운동 방정식을 가중잔차식으로 만들기 위해서 운동 방정식이 최종적으로 대칭 형태가 되어 연속 방정식과 서로 비슷한 행렬식을 이룰 수 있도록 x, y 방향에 대한 각각의 운동 방정식에 수심 h 를 곱하고, 해당방향의 유속변위 δu 및 δv 를 가중한 후 연속 방정식과 같이 내부 영역에 대해 적분하면 식(8), 식(9)와 같은 가중잔차식이 구해진다.

$$\iint \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv - \epsilon_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{n^2 g u (u^2 + v^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right] h \delta u dR = 0 \quad (8)$$

$$\iint \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + fu - \epsilon_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{n^2 g v (u^2 + v^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right] h \delta v dR = 0 \quad (9)$$

나. 가중잔차식의 이산화

컴퓨터를 사용한 미분 혹은 편미분 방정식의 해법에 있어서는 이론적인 엄밀해와는 달리 컴퓨터는 공간적, 시간적 영역을 연속적으로는 생각할 수 없기 때문에 오직 이산화된 점에서의 변화에 대해서만 계산이 가능하다. 따라서, 유한요소 해석법에서는 지배 방정식에 관계되는 모든 주변수, 매개변수, 독립변수 자료 등을 이산화하여야 한다.

요소 내의 대표적인 변수 및 매개변수를 기저 함수의 성질을 이용하여 다음과 같이 이산화하였다.

$$\begin{aligned} \eta &= N_1 \eta_1 + N_2 \eta_2 + N_3 \eta_3 \\ u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

η_i : 요소에 대한 각 절점의 수심

u_i : 요소에 대한 각 절점의 x 방향 유속

v_i : 요소에 대한 각 절점의 y 방향 유속

N_i : 요소에 대한 각 절점의 기저 함수

식(10) 좌변의 모든 변수들은 요소 내의 모든 절점에서 규정될 수 있다. 그리고 연속인 위의 유한요소 확정식들을 각각의 요소 영역에 대하여 연속 방정식의 최종 가중잔차식(7)에 대입하고 모든 요소 값들을 전체 영역의 모든 요소에 대하여 더하면 다음과 같다.

$$\sum_{el} \iint \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta dR = \sum_{el} \{\delta \eta\}^T \iint N^T N dR \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{el} \left(\iint u h \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} dR + \iint v h \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} dR \right) \\ &= \sum_{el} \{\delta \eta\}^T \left(\iint \frac{\partial N^T}{\partial x} N \{h\} N dR \{u\} \right. \\ & \quad \left. + \iint \frac{\partial N^T}{\partial y} N \{h\} N dR \{v\} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{el} \int Q_n^* \delta \eta dB = \sum_{el} \{\delta \eta\}^T \int N^T dB \{Q_n^*\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{el} \left(\iint u \eta \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} dR + \iint v \eta \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} dR \right) \\ &= \sum_{el} \{\delta \eta\}^T \left(\iint \frac{\partial N^T}{\partial x} N \{h\} N dR \right. \\ & \quad \left. + \iint \frac{\partial N^T}{\partial y} N \{h\} N dR \right) \end{aligned} \quad (14)$$

연속 방정식의 이산화와 동일한 과정으로 유한요소 확정식들을 각각의 요소 영역에 대하여 운동 방정식의 최종 가중잔차식 (8), (9)에 대입하고 모든 요소 값들을 전체 영역의 모든 요소에 대하여 더하면 x, y 방향에 대한 식이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sum_{el} \iint h \frac{\partial u}{\partial t} \delta u dR &= \sum_{el} \{\delta u\}^T \iint N^T N \{h\} N dR \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \\ \sum_{el} \iint h \frac{\partial v}{\partial t} \delta v dR &= \sum_{el} \{\delta v\}^T \iint N^T N \{h\} N dR \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{el} \iint gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta u dR &= \sum_{el} \{\delta u\}^T g \iint \mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} dR \{\eta\} \\ \sum_{el} \iint gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta v dR &= \sum_{el} \{\delta v\}^T g \iint \mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} dR \{\eta\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{el} \iint h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u dR \\ &= \sum_{el} \{\delta u\}^T \iint \left(\mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \mathbf{N} \{u\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \{u\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \mathbf{N} \{v\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \{u\} \right) dR \\ &\sum_{el} \iint h \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta v dR \\ &= \sum_{el} \{\delta v\}^T \iint \left(\mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \mathbf{N} \{u\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \{v\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{N}^T \mathbf{N} \{h\} \mathbf{N} \{v\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \{v\} \right) dR \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{el} \iint \epsilon_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dR \\ &= - \sum_{el} \{\delta u\}^T \epsilon_x \iint \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \{u\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \{u\} \right) dR \\ &\sum_{el} \iint \epsilon_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \delta v dR \\ &= - \sum_{el} \{\delta v\}^T \epsilon_y \iint \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \{v\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{N} \{h\} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \{v\} \right) dR \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{el} \iint \left(\frac{n^2 g u (u^2 + v^2)^{1/2}}{\mathbf{H}^{4/3}} \right) h \delta u dR \\ &= \sum_{el} \{\delta u\}^T \iint \mathbf{N}^T \{P_n\} dR \\ &\sum_{el} \iint \left(\frac{n^2 g v (u^2 + v^2)^{1/2}}{\mathbf{H}^{4/3}} \right) h \delta v dR \\ &= \sum_{el} \{\delta v\}^T \iint \mathbf{N}^T \{P_n\} dR \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, P_n 는 마찰부하벡터이다.

다. 시간 적분

본 연구에서 시간 항은 유한차분 방식을 이용하여 처리하였다. 시간 적분은 주로 음해법중 Crank-

Nicolson 방법이나 양해법중 2단계 Lax-Wendroff 방법을 사용한다. Crank-Nicolson 방법은 미소 시간증분량의 값을 크게 할 수 있고 안정된 값을 얻을 수 있으나 계산시간이 많이 소요되고 큰 메모리가 필요한 결점이 있다. 양해법인 2단계 Lax-Wendroff 방법은 계산 시간을 줄일 수 있는 반면 격자 간격에 따른 시간증분량의 크기에 유의해야 한다.

본 연구에서는 2단계 Lax-Wendroff 방법을 사용하였으며 연속 방정식과 운동량 방정식을 유한요소식으로 전개하면 다음과 같다.

$$[\mathbf{M}] \left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (20)$$

여기서 $\{\mathbf{Q}\}$ 는 미지 값인 η, u, v 를 나타내며, 행렬 $[\mathbf{M}]$ 은 시간 항을 포함한 행렬이다. $\{\mathbf{F}\}$ 는 지배 방정식에서 수반된 선적분을 행벡터로 표현한 것이고 $[\mathbf{K}]$ 는 시간 미분항을 제외한 항들을 조합한 것이다.

이 식을 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] \{\mathbf{Q}\}^{n+1/2} &= [\mathbf{M}] \{\mathbf{Q}\}^n - \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{K}] \{\mathbf{Q}\}^n \\ [\mathbf{M}] \{\mathbf{Q}\}^{n+1} &= [\mathbf{M}] \{\mathbf{Q}\}^n - \Delta t [\mathbf{K}] \{\mathbf{Q}\}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 첨자 n 은 시간대를 의미하며 Δt 는 시간 증분량을 의미한다. 식(21)을 이용하여 그 해를 구할 때 그 값이 안정한 상태로 수렴하기 위한 최대시간간격 Δt 는 Courant-Friedrichs-Lewy의 안정 조건에 의해 식(22)를 만족해야 한다. 본 연구에서는 다음과 같은 시간 조건을 사용하였다.⁶⁾

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{2gh}} \quad (22)$$

3. 초기 및 경계 조건

지배 방정식의 해가 존재하려면 적절한 초기 조건과 경계 조건이 필요하다. 초기 조건은 계산이 시작되는 시각에만 주어지면 되므로 공간만의 함수로 표현되지만, 경계 조건은 계산이 진행됨에 따라 변할 수 있으므로 시간과 공간의 함수이다.

해가 주기 함수의 형태일 경우 일반적으로 초기 조건은 계산 영역 내에 흐름이 전혀 존재하지 않는다는 조건(Cold start)으로 설정해 줄 수 있다.⁴⁾ 이 경우 초기 조건의 영향은 계산이 진행됨에 따라 점차 감소하여 2~3주기 후에는 거의 사라진다. 시각 $t=0$ 에서 수면변위 η 는 어떤 일정한 값이 주어지고 유속은 없다($u=v=0$)고 가정한다.

경계 조건은 개경계 조건과 폐경계 조건으로 대별된다. 개경계 조건은 일정주기를 갖는 수심 또는 유량을 시간의 함수로 나타냈으며, 폐경계 조건은 경계에 대해 법선 방향으로의 흐름이 없다는 조건이 사용되었다.

그리고 측벽에 대한 경계 조건으로서 Slip 혹은 No-slip조건 중 어느 것을 택할 것인가는 확실하지는 않다. 그러나 No-slip 조건을 취하게 되면 측벽 경계를 따라서 미세한 요소 혹은 측벽으로부터 상당히 근거리에서 격자점을 취하게 함으로써 경계층을 충분히 반영할 수 있으므로 No-slip조건이 물리적으로 의미가 있는 이상적인 조건이지만 실제 수치 모형에서 절점을 통하여 경계층을 표현할 수 있을 만큼 이산화시키는 것은 계산의 효율을 떨어뜨리므로 이의 적용시 주의해야 한다. 따라서 본 모형에서는 Slip조건을 사용하였다.

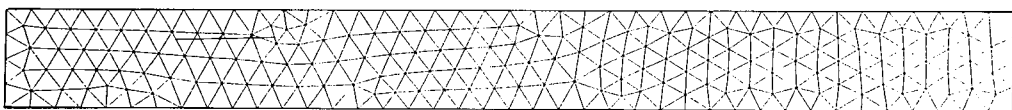
IV. 모형의 검증 및 적용

수치 모형의 타당성과 관련되는 수렴성 및 해의 정확성 여부에 대한 검토는 수치 모형을 적용하는 경우에는 필수적인 과정이다. 이러한 검증을 거친 후 모형의 신뢰도가 확인되면 실제 문제에도 적용될 수 있다. 검증법은 해석해와 비교하는 방법을 택하였다.

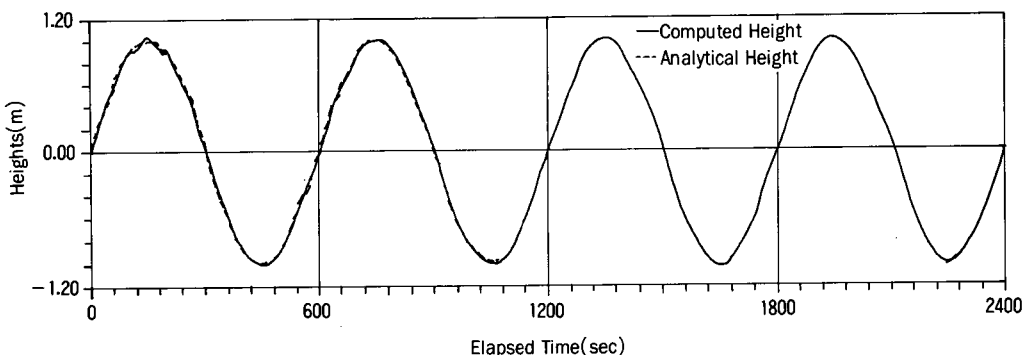
1. 사각형 폐쇄 수로의 해석해에 대한 검증

수로 바닥의 마찰과 지구 자전의 영향을 무시했을 때 Ippen et al.(1966)이 구한 해석해와 비교하였다.

수로는 <Fig. 2>와 같이 수심 5m, 폭 10m, 길이 100m인 사각형 수로를 가정하였으며, 폐경계 조건으로는 경계에 직각 방향으로의 흐름이 없다는 조건을 사용하였고, 개경계에서는 일정 주기를 갖는 주기 함수의 형태로 수면변위가 입력되도록 경계 조건을 설정하였다. 초기 조건은 계산 영역 내에서 흐름이 없다는 조건을 사용하였으며, 경계 조건과 초기 조건을 수식으로 나타내면 식 (23)과 같다.



<Fig. 2> Meshes for the channel with constant water depth



<Fig. 3> Comparison between analytical solution and numerical solution in the elevation of water levels

$$\begin{aligned} \eta &= \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{at } x=0 \\ u &= 0 & \text{at } x=L \\ \eta &= u=0 & \text{at } t=0 \end{aligned} \quad (23)$$

Ippen et al.(1966)에 의하여 <Fig. 2>와 같은 수로에 대한 해석하는 식(24)와 같다.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{a}{\cos\left(\frac{2\pi L}{T} / \sqrt{gh}\right)} \\ & \cos\left\{\frac{2\pi L}{T} / \sqrt{gh} \left(\frac{x}{L}-1\right)\right\} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ u &= \frac{-a\sqrt{gh}}{\text{hcos}\left(\frac{2\pi L}{T} / \sqrt{gh}\right)} \\ & \sin\left\{\frac{2\pi L}{T} / \sqrt{gh} \left(\frac{x}{L}-1\right)\right\} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 a는 진폭, L은 수로 길이, 그리고 x는 수로 입구로부터의 거리이다. 본 연구에서는 입구 부에서 21.5m인 지점에서의 수치해와 해석해의 결과를 비교하였다.

<Fig. 3>은 4주기 동안의 수심 변화를 나타낸 것으로서 1/2주기까지는 해석해와 약간 차이가 있었으나 2주기 이후에는 거의 차이가 없었다. 그리고 <Fig. 4>는 유속의 경우로서 초기 조건의 영향으로 인하여 초기에 유속의 진동 현상이 나타났지만 3주기 이후에는 수치해가 해석해에 잘 수렴

함을 알 수 있었다.

2. 모형 실험 결과와의 비교

가. Liu, Bradley, and Plate의 실험 공식과의 비교

Liu et al., (1957)은 등류조건의 사각형 수로에서 수리모형 실험을 하여 최대 배수심의 크기를 나타내는 실험 공식을 제시하였다.

$$\left(\frac{Y_1}{Y_n}\right)^3 = 4.48F^2 \left[\frac{1}{M^2} - \frac{2}{3}(2.5-M) \right] + 1 \quad (25)$$

여기서,

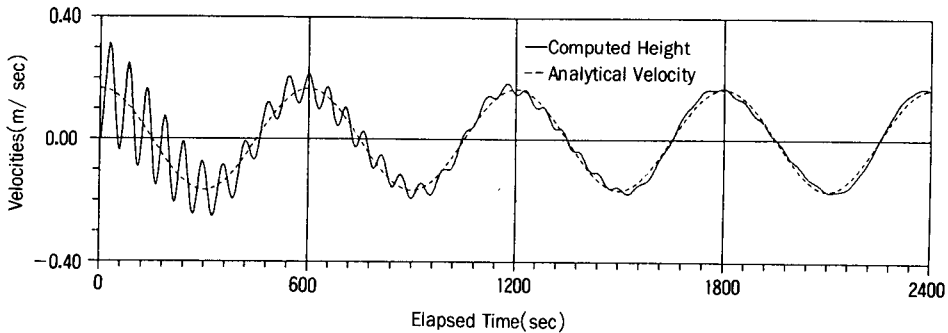
Y_1 : 최대 배수심이 발생하는 지점의 수심

Y_n : 수로 단면이 축소되지 않았을 때의 등류수심

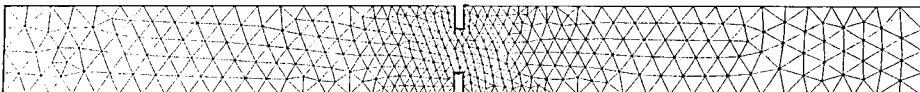
F : 등류상태의 Froude수

M : 개방율로서 수로 전체 폭에 대한 축소부 폭의 비

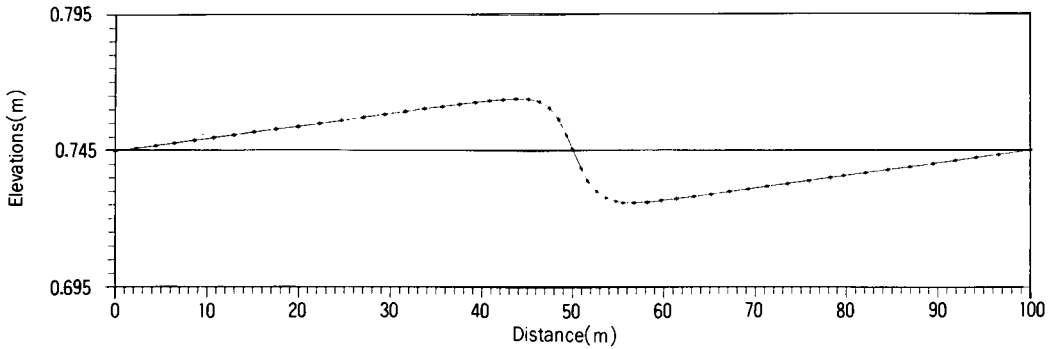
교각 등으로 인하여 단면이 축소되는 개수로의 배수 영향을 알기 위하여 <Fig. 5>와 같은 수로에 모형을 적용하였다. 대상 수로는 길이가 100m이며 폭 10m 경사 1/2000이다. <Fig. 6>은 수로 중심부에서의 수심 분포를 나타내고 있다. 그리고 식



<Fig. 4> Comparison between analytical solution and numerical solution in velocities



<Fig. 5> Meshes for the channel with constricted cross section



〈Fig. 6〉 The elevation profile in the channel with constricted cross section

(25)에 의한 최대 배수심은 76.5cm이며, 수치 모형에 의한 결과는 77.0cm로 수치 모형에 의하여 상당히 근접된 결과를 얻을 수 있었다.

나. 농어촌진흥공사 수리시험장의 모형실험 결과와의 비교

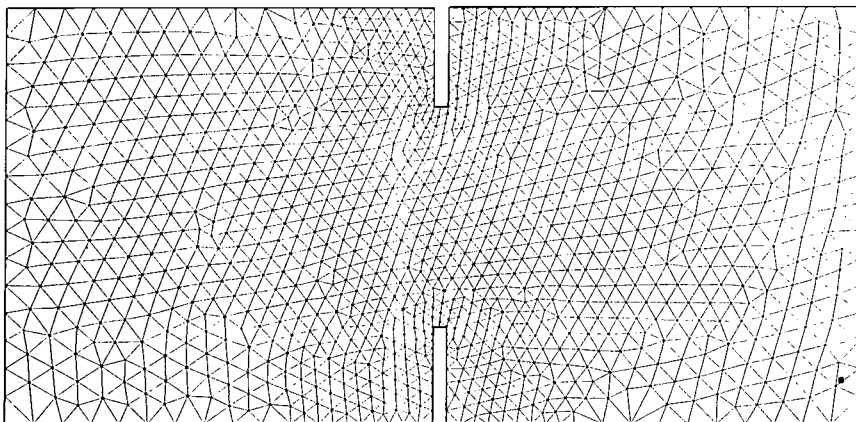
농어촌진흥공사 수리시험장에서는 폭 3m, 길이 30m인 수조를 이용하여, 축소 구간에서의 유량 및 유속 변화를 구하고 실험 결과를 토대로 하여 심해 및 천해에서 방조제 체질 방법에 대한 일반적인 흐름 특성도 파악하고자 하였다. 이 수리 실험에서는 평균 유속, 최대 유속을 측정하였으며, 수심은 상하류측 수심과 단면축소부 수심을 측정하였다.

본 연구에서는 많은 수리모형실험 조건 중에서 단면의 축소율과 상하류측의 수심에 따라 4가지 경우로 나누어 수치해와 비교하여 보았다. 이 때,

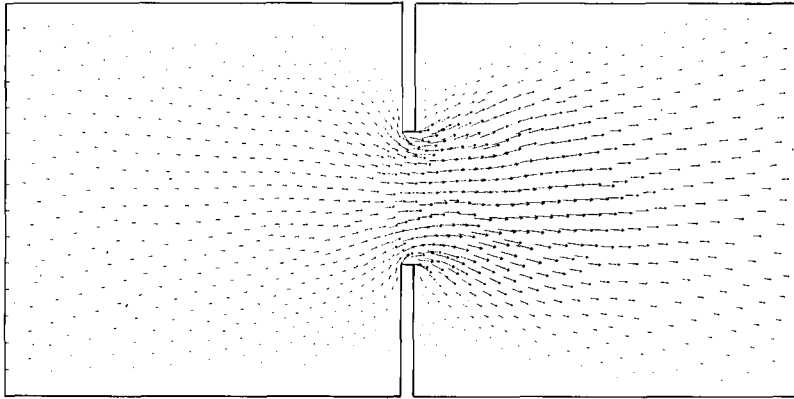
모든 흐름은 상류였으며 유량은 10,500cm³/sec이었다. 〈Fig. 7〉~〈Fig. 12〉는 개구간 폭이 161cm, 102cm인 경우의 격자형상 그리고 유속분포, 수위 분포에 대한 수치실험 결과를 보여주고 있다.

첫째 경우는 개구간 폭 281cm, 상류측 수심 5.20cm 그리고 하류측 수심 5.16cm로 단면이 거의 축소되지 않은 상태였다. 단면 축소 구간에서 해석해의 평균 유속, 최대 유속이 7.2cm/sec, 8cm/sec 이었고 수치해는 7.17cm/sec, 7.90cm/sec로 잘 일치하였으며, 수심도 해석해 5.2cm, 수치해 5.2cm으로 잘 일치하였다.

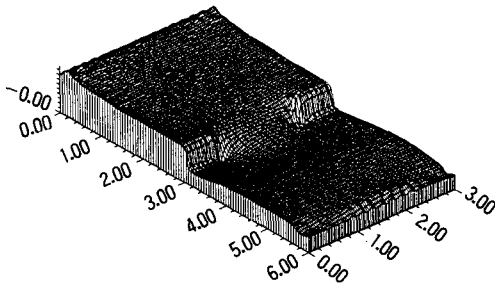
둘째 경우는 개구간 폭 221cm, 상류측 수심 5.22cm 그리고 하류측 수심 5.16cm로 단면이 약간 축소된 상태였다. 단면 축소율이 크지 않은 상태로, 단면 축소 구간에서 해석해의 평균 유속, 최대 유속이 9.1cm/sec, 11cm/sec이었고, 수치해는 9.



〈Fig. 7〉 Meshes for the channel with the constricted cross section(closure gap 161cm)



〈Fig. 8〉 Velocity diagram for channel with the constricted cross section(closure gap 161cm)



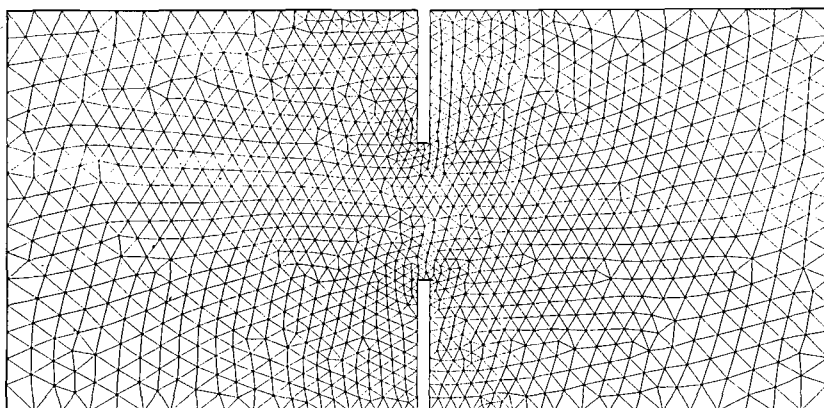
〈Fig. 9〉 Schematic view of the elevation profile in the channel with the cross section(The length of Z-axis scaled up 3 times), (closure gap 161cm)

0cm/sec, 10.8cm/sec으로 일치하였으며 수심도 해석해 5.22cm, 수치해 5.22cm으로 잘 일치하였다.

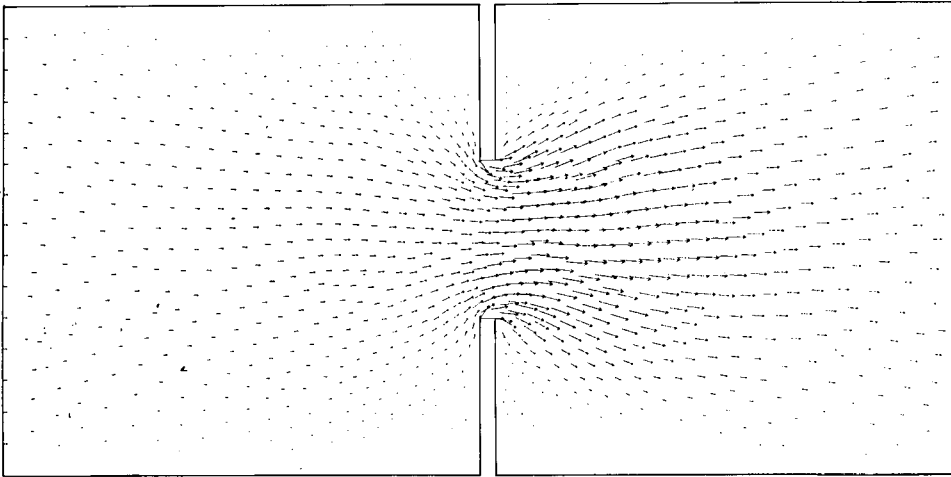
셋째 경우는 개구간 폭 161cm, 상류측 수심 5.

30cm 그리고 하류측 수심 5.16cm로 단면이 1/2가량 축소된 상태였다. 단면 축소 구간에서 해석해의 평균 유속, 최대 유속이 12.5cm/sec, 14cm/sec이었고 수치해의 값은 12.9cm/sec, 14.7cm/sec으로 두 값이 근접하였다. 그런데 유속은 수리모형 실험에서와는 달리, 수로 중심부로 약간 집중되는 현상을 나타내었으며, 수심은 해석해 5.30cm, 수치해 5.29cm이었다.

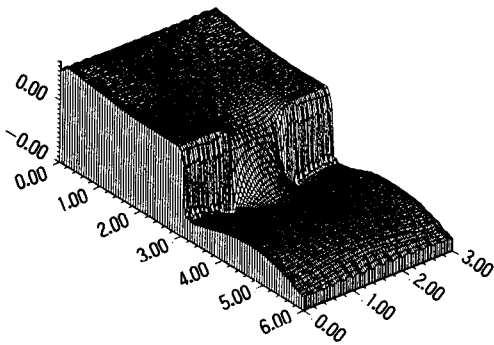
넷째 경우는 개구간 폭 102cm, 상류측 수심 5.64cm 그리고 하류측 수심 5.16cm로 단면이 1/3으로 축소된 상태였다. 단면 축소 구간에서 해석해의 평균 유속, 최대 유속이 19.4cm/sec, 23cm/sec이었고 수치해의 값은 19.8cm/sec, 25.1cm로서 양자간 수치로서는 근접된 값을 보이고 있으나 최대유



〈Fig. 10〉 Meshes for the channel with the constricted cross section(closure gap 102cm)



〈Fig. 11〉 Velocity diagram for channel with the constricted cross section (closure gap 102cm)



〈Fig. 12〉 Schematic view of the elevation profile in the channel with the cross section (The length of Z-axis scaled up 3 times), (closure gap 102cm)

속 발생 위치가 서로 달랐다. 즉 수리모형실험의 경우 최대 유속은 단면 끝부분에서 발생하였지만 수치 모형에서는 수로 중심부에서 최대 유속이 발생하였다. 이는 본 연구에서 사용하고 있는 유한요소모형이 3차원 현상을 2차원적으로 해석하는데 따른 전단 효과, 난류 유속 변동 성분에 의한 Reynolds 응력, 유체의 점성에 의한 전단 효과 등을 잘 고려하지 못함으로써 단면 끝부분에서의 국부적인 유속을 재현하지 못했기 때문인 것으로 판단된다. 수심에 대한 모의발생 결과는 해석해 5.64cm, 수치해 5.62cm이었다.

또한 1/7로 축소된 단면인 개구간 폭 42cm인 경우에도 적용해 본 결과 수치해가 발산하는 현상을

나타내었다.

V. 결 론

단면이 축소되는 구간에서의 흐름 특성을 해석하기 위하여 수심 평균된 지배 방정식을 이용한 유한요소모형을 구성하였다. 해석해가 존재하는 사각형 수로에서 검증을 실시하였고, Liu et al. (1957)과 농어촌진흥공사 수리시험장의 수리모형 실험 결과와 비교하였다.

연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 본 연구의 모형은 삼각형 요소의 Galerkin형 유한요소법을 이용하여 구성하였으며 지배 방정식은 수심 평균한 연속 방정식과 2차원 Navier-Stokes 방정식을 이용한 천수 방정식이었다. 시간 적분은 양해법중 2 step Lax-wendroff 방법을 사용하였다.

2. 본 연구의 모형을 해석해가 존재하는 사각형 폐쇄 수로에 적용해 본 결과 수심은 1주기 그리고 유속은 3주기 이후에 수치해와 해석해가 잘 일치하였다.

3. 등류조건인 수로에서 단면이 축소될 때 최대 배수심에 대한 수치해석값과 실험식의 값은 거의 일치하였다.

4. 수리모형실험에서 얻은 결과와 비교한 결과

단면이 1/3 정도로 축소되는 구간까지의 평균 유속, 최대 유속 그리고 수심은 근사하게 재현할 수 있었다. 그러나 최대 유속이 수로 중심부에서 발생하였으며 이는 실제 모형 실험에서 단면 축소 끝부분에서 최대 유속이 발생하는 것과는 달랐다.

5. 수심 평균된 수치 모형으로서 단면 축소 구간에서의 수리현상 해석은 단면 축소가 크지 않을 경우 가능하였으나 이 경우에도 국부적인 유속은 정확히 재현하지 못하였다. 이는 본 연구의 모형이 3차원 현상을 2차원적으로 해석하는데 따른 전단 효과, 난류 유속 변동 성분에 의한 Reynolds 응력, 유체의 점성에 의한 전단 효과 등을 충분히 고려하지 못했기 때문인 것으로 사료된다. 앞으로 이 부분에 대한 연구가 요구된다.

참고문헌

1. 나정우, 권순국, 1995. 조석유동 해석을 위한 비선형 유한요소모형(II), 한국농공학회지, 제37권, 제1호.
2. 서승원, 1982. 개수로 단면급변화에 따른 순환현상의 수치모형, 한양대학교 석사학위논문.
3. 서승원, 윤태훈, 1987. 만에 적용되는 천수방정식의 개방경계조건, 한국수문학회지, 제20권, 제3호.
4. 서승원, 윤태훈, 1989. 오차해석에 의한 해양방사경계조건 비교, 한국수문학회지, 제22권, 제3호.
5. 유동훈, 권순국, 1995. 축소단면흐름 형상항력 계수, 한국농공학회지 제37권, 제3호.
6. 윤태훈, 서승원, 1988. 유한요소법을 이용한 개수로 단면급확대부의 순환현상해석, 한국수문학회지, 제21권, 제1호.
7. 윤태훈, 서승원, 1988. 유한요소법을 이용한 개수로 단면 급확대부의 순환현상해석, 한국수문학회지, 제21권, 제1호, pp. 67~75.
8. Anderson, D.A. and J.C. Tannehill, 1984. Computational Fluid Mechanics and Heater Transfer, McGraw-Hill, Inc..
9. Babarutsi, S., J. Ganoulis and V.H. Chu, 1987. Recirculating Flows in Open Channel, Congress of IAHR, pp. 331~336, Lausanne.
10. Chaudhry, M.H., 1993. Open-Channel Flow,

Prentice-Hall, Inc..

11. Dronkers, J.J., 1964. Tidal Computations for Rivers and Coastal Waters, North Holland Publishing Company.
12. Ippen, T., 1966. Estuary and Coastline Hydrodynamics, McGraw-Hill, Inc..
13. Kawahara, M., H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki, 1982. Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 2.
14. Liu, H.K., J.N. Bradley, and E.J. Plate, 1957. Backwater Effects of Piers and Abutments, Report CER57 HK10, Civil Engineering Section, Colorado State University.
15. Mehta, A.J. and T.A. Zehi, 1980. Influence of a Small Inlet in a Large Bay, Coastal Engineering, Vol. 4, pp. 157~176.
16. Pinder, G.N. and W.G. Gray, 1977. Finite Element Simulation in Surface and Surface Hydrology, Academic Press.
17. Ponce, V.M. and S.B. Yabusaki, 1981. Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 107, No. HY11, pp. 1501~1518.
18. Sergerlind, L.J., 1984. Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Ltd.

약 력

고 광 돈



1994. 서울대학교 농업생명과학대학 농공학과 졸업
 1996. 서울대학교 대학원 농학석사
 현재 농어촌진흥공사 농어촌연구원 연구원

권 순 국



1964. 서울대학교 농과대학 농공학과 졸업
 1974. 미국 Colorado 주립대학교 대학원, M.S.
 1980. 미국 Iowa 주립대학교 대학원 Ph. D.
 현재 서울대학교 농업생명과학대학 농공학과 교수