Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.22, No.3, September, 1996

확장된 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구*

A Fast Algorithm for an Extension of the Multiple Choice Linear Knapsack Problem*

원 중 연**

Joong-Yeon Won**

Abstract

We consider an extension of the multiple choice linear knapsack problem and develop a fast algorithm of order $O(r_{max}n^2)$ by exploiting some new properties, where r_{max} is the largest multiple choice number and n is the total number of variables. The proposed algorithm has convenient structures for the post-optimization in changes of the right-hand-side and multiple choice numbers. A numerical example is presented.

1. 서론

확장된 다중선택 선형배낭문제 (P)는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{(P) Minimize } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij} \qquad (1.1a)$$

$$\text{subject to } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \geq b, \qquad (1.1b)$$

$$1 \leq \Sigma_{j\in N_i} x_{ij} \leq r_i,\ i\in I, \qquad (1.1c)$$

$$0\leq x_{ij}\leq 1,\ j\in N_i,\ i\in I. \qquad (1.1d)$$

여기서 선택집합 N_i들은 서로 중복되지 않고, $c_{ij}>0$, $a_{ij}>0$, $b>0$이다. 각 선택집합 N_i마다 모든 지수 j들은 제약식 (1.1b)의 계수 a_{ij}가 가장 작은 것부터 시작하여 비감소하는 순으로 배열된 것으로 가정한다. 다음의 기호들을 정의한다; $n_i=|N_i|$, $n=\Sigma_{i\in I}n_i$, $n_{\max}=max_{i\in I}\{n_i\}$, $r_{\max}=max_{i\in I}\{r_i\}$. 문제 (P)에서 확장된 다중선택 제약식 (1.1c)의 선택상수 r_i들은 다중선택의 의미를 지니므로 1에 가까운 양의 정수로서 $1\leq r_i\leq\sqrt{n_i}$, $i\in I$,를 만족한다고 가정한다.

문제 (P)에 정수제약이 부가된 정수문제는 제약식 (1.1c) 및 (1.1d)에 의해 각 선택집합

* 이 연구는 1992년도 한국과학재단 연구비지원에 의한 결과임(923-0900-007-1)

** 경기대학교 산업공학과

N_i마다 1개 이상 r_i개까지의 변수들이 1의 값을 갖도록 선택될 수 있는 확장된 다중선택 정수배낭문제이다. 이 확장된 다중선택 제약 구조를 갖는 정수문제들은 현실적으로 유연생산계획을 비롯한 여러 분야에서 빈번히 나타나고 있으며 대부분 대형의 문제로 발생되고 있다.[7,10] 문제 (P)는 해당되는 정수계획 문제의 LP 완화문제로서 또한 복잡한 문제의 대용완화문제로서 활용될 수 있다.

문제 (P)에서 모든 선택상수 r_i들이 1이 되는 특수경우의 문제는 다중선택 선형배낭문제라 불리우며, 여러 연구에서 그 특성들과 해법들이 보고되었다.[1,2,3,4,5,6,8,9,11,12] 이 문제에 대한 해법들은 r_i=1일 때의 식 (1.1c)의 구조적 특성으로 인하여 생기는 변수들간의 우월성을 활용하고 있다. 이러한 해법들은 열등변수들을 미리 제거하기 위하여 선택집합마다 제약식의 계수 a_{ij}가 비감소하는 순으로 변수들을 재배열하므로 최악상황하의 계산상 복잡도는 기본적으로 $O(nlogn)$이 소요된다.[1,2,4,5,6,8,9,11] Dyer[3] 와 Zemel[12]은 복잡도가 $O(n)$인 신속한 해법을 제시하였으나 열등한 변수들을 제거하지 않으므로 정수계획문제를 위한 분지한계해법에는 이용되기 어려운 것으로 보고되고 있다.[2,8]

문제 (P)에서는 선택상수 r_i들이 1보다 클 수 있으므로 최적해에서 1의 값을 갖는 변수들이 각 선택집합마다 여러개 발생되고 따라서 변수들간의 우월성은 성립되지 않는다. 문제 (P)에서 제약식 (1.1c)가 $\Sigma_{j\in N_i} x_{ij}=r_i$, $i\in I$, 이 되는 경우의 문제에 대해서는 연구[14]에서 복잡도 $O(r_{\max}n^2)$을 갖는 신속한 해법을 연구하였다. 그러나 문제 (P)는 위 문제[14]의 해집합을 포함하는 훨씬 넓은 해공간을 가지고 있으므로 최적해의 효율적인 탐색이 복잡해지고 해법의 근간이 되고 있는 분수해의 특성이 확장되어 나타난다. 연구[13]은 문제 (P)에 대한 해법으로서 우변상수 b에 대한 모수분석 특성을 연구하고, 이를 활용하여 최악상황하의 복잡도가 $O((n_{\max}n)^2)$인 해법을 제시하였다.

본 연구에서는 기존의 모수분석 특성[13,14] 외에 확장된 분수해특성 및 새로운 기저특성을 파악하여 복잡도 $O(r_{\max}n^2)$의 신속한 해법을 개발한다. 개발된 해법은 식 (1.1c)의 우변상수 1이 임의의 양의 정수 l_i $(0\le l_i\le r_i)$로 대체되는 경우에도 복잡도의 증가없이 쉽게 수정되어 적용될 수 있다. 또한 이 해법은 우변상수 b 및 선택상수 r_i의 변동에 효율적으로 적용되므로 정수계획문제의 정수최적해 및 근사해를 구하기 위한 분지한계과정에 적합히 사용될 수 있다.[15]

2. 해법 및 분석

다음과 같이 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$ 및 초기해 $\bar{x}$를 정의한다.

$$\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}),$$
$$j_1<j_2,\ j_1\in N_i\cup\{0\},\ j_2\in N_i,\ i\in I. \quad (2.1)$$
$$\bar{x}_{ij}=1,\ j\in J_i,\ \bar{x}_{ij}=0,\ j\in N_i\backslash J_i,\ i\in I. \quad (2.2)$$

위 식 (2.1)에서 $a_{ij_1}=a_{ij_2}$이면 $\theta\equiv\infty$로 한다. $j_1\equiv0$인 경우는 해당되는 변수가 식 (1.1c)에 대한 여유변수나 잉여변수일 때로 정의하고 $a_{ij_1}=c_{ij_1}\equiv0$이라 하자. 식 (2.2)의 J_i는 한 기저해에서 1의 값을 취하고 있는 변수들 중 선택집합 N_i에 해당하는 지수들의 집합으로 정의한다. 초기해 $\bar{x}$에 해당하는 J_i로는 선택집합 N_i에 속하는 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장

작은 변수의 지수집합으로 설정한다. ($i \in I$)

초기해 $\bar{x}$는 제약식 (1.1c) 및 (1.1d)를 만족한다. 이해에 해당하는 목적함수치 $\bar{z}(=\Sigma_{i \in I} \bar{z}_i = \Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in J_i} c_{ij})$는 문제 (P)의 최적목적치에 대한 하한치가 되며, 이 해에 해당하는 우변상수 $\bar{b}$의 값은 $\bar{b} = \Sigma_{i \in I} \bar{b}_i = \Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in J_i} a_{ij}$ 이다. 이때 $\bar{b} \geq b$이면 해 $\bar{x}$는 최적해이다. 그러나, $\bar{b} < b$일때는 제약식 (1.1b)를 만족하기 위하여 $\bar{b}$는 증가되어야 한다.

다음 보조정리 1은 $\bar{b}$가 증가될 때 발생하는 분수해 및 분수값을 취하는 변수들을 결정한다. 보조정리 1에서 보는 바와 같이 한 기저해에서 분수값을 갖는 변수들 $x_{ij}(j \in N_i,\ i \in I)$의 수는 한개나 두개이며, 두 변수가 분수값을 갖을 경우 하나의 선택집합에서 동시에 발생하고 λ와 $1-\lambda$의 형태를 취한다.($0 < \lambda < 1$)

보조정리 1 $\bar{b}$가 증가함에 따라 최적목적함수치의 증가비율 θ, 분수값을 취하는 기저변수의 지수 f_1, f_2, 및 분수해가 발생하는 선택집합의 지수 q는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_q(f_1,f_2) = \min[\min_{i \in I_1}(\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in N_i \backslash J_i,\, j_2 > j_1} \{\theta_i(j_1,j_2)\},\ \min_{j_2 \in N_i \backslash J_i} \{\theta_i(0,j_2)\}),$$
$$\min_{i \in I_2}[\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in N_i \backslash J_i,\, j_2 > j_1} \{\theta_i(j_1,j_2)\}]]$$

여기서, $I_1 = \{ i \in I \mid r_i > 1,\ 1 \leq |J_i| < r_i \}$, $I_2 = \{ i \in I \mid r_i \geq 1,\ |J_i| = r_i \}$ 이다.

(증명) $\bar{b}$가 α($\alpha > 0$, α는 충분히 작은 수)만큼 증가한다고 하자. 우변상수가 $\bar{b}$일 때의 최적해에서 1의 값을 취하고 있는 변수들의 지수집합은 J_i, $i \in I$, 이다. 여기서, $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \phi$이다. 1) 집합 $I_1 = \{ i \in I \mid r_i > 1,\ 1 \leq |J_i| < r_i \}$에 속하는 임의의 선택집합 N_i를 고려하자. 먼저 선택집합 N_i에 해당되는 제약식 (1.1b), (1.1c)의 열벡타로 이루어 지는 차원 3x3의 축소기저행열 B를 정의한다. 또한, 제약식 (1.1c)의 좌측 제약식에 해당하는 잉여변수를 p_i, 우측 제약식에 해당하는 여유변수를 s_i라 한다. $|J_i| < r_i$이므로 s_i는 항상 기저변수이다. i) p_i가 비기저 변수인 경우 식 (1.1c)의 좌측 제약식은 등식으로 만족이 되므로 s_i이외의 두 기저변수는 모두 N_i에서 발생하고 그 합이 1이다. 따라서, 선택집합 N_i에서 증가된 α를 충족시키기 위해서는 지수 $j_1(\in J_i)$에 해당하는 변수 x_{ij_1}의 값이 현재의 1에서 감소하여 분수값을 취하고, 다른 지수 j_2 ($j_2 > j_1$, $j_2 \in N_i \backslash J_i$)에 해당하는 변수 x_{ij_2}의 값이 현재의 0에서 양의 분수값으로 증가한다. 그러므로 축소기저행열 B는 기저벡타 $(x_{ij_1}, x_{ij_2}, s_i)$에 대응되며 해당되는 목적함수치 z_i의 변화는 다음과 같다.

$$z_i(\bar{b}_i + \alpha) = z_i(\bar{b}_i) + \alpha c_B B^{-1} e_1$$
$$= z_i(\bar{b}_i) + \alpha (c_{ij_2} - c_{ij_1})/(a_{ij_2} - a_{ij_1})$$
$$= z_i(\bar{b}_i) + \alpha\, \theta_i(j_1,j_2)$$

여기서 $c_B = (c_{ij_1}, c_{ij_2}, 0)$, $e_1 = (1,0,0)'$이다. 그러므로 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min_{j_1 \in J_i}[\min_{j_2 \in N_i \backslash J_i,\, j_2 > j_1} \{\theta_i(j_1,j_2)\}]$$

ii) p_i가 기저변수인 경우, 이미 s_i는 기저변수이므로 이외의 한 기저변수만이 선택집합 N_i에서 발생한다. 따라서 증가되는 α를 충족시키기 위해서 현재의 1을 갖는 J_i는 변동이 없고 한 지수 j_2 ($j_2 \in N_i \backslash J_i$)에 해당하는 변수 x_{ij_2}의 값이 현재의 0에서 증가, 분수값을 취하는 기저변수가 된다. 그러므로 축소기저행열 B는 기저벡타 (x_{ij_2}, s_i, p_i)에 대응되며 해당되는 목적함수치 z_i의 변화는 다음과 같다.

$$z_i(\bar{b}_i + \alpha) = z_i(\bar{b}_i) + \alpha c_B B^{-1} e_1$$
$$= z_i(\bar{b}_i) + \alpha\, c_{ij_2}/a_{ij_2}$$

$=z_i(\bar{b}_i)+\alpha\ \theta_i(0,j_2)$

여기서 $c_B=(c_{ij_2},0,0)$, $e_1=(1,0,0)^t$이다. 그러므로 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min_{j_2\in N_i\setminus J_i}\{\ \theta_i(0,j_2)\ \}$$

이상의 i), ii) 경우로부터 $\bar{b}$가 α만큼 증가할 때 모든 선택집합 N_i, $i\in I_1$,에 대해 목적함수치가 최소로 증가되는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min[\min_{i\in I_1}\min_{j_1\in J_i}\ \min_{j_2\in N_i\setminus J_i, j_2>j_1}\{\ \theta_i(j_1,j_2)\ \},\ \min_{j_2\in N_i\setminus J_i}\{\ \theta_i(0,j_2)\ \}]\quad(2.3)$$

2) 집합 $I_2=\{\ i\in I\mid r_i\geq 1,\ |J_i|=r_i\ \}$에 속하는 임의의 선택집합 N_i를 고려하자. i) $r_i>1$인 경우 식 (1.1c)의 우측 제약식은 등식으로 만족이 되므로 두 기저변수는 모두 N_i에서 발생하고 그 합은 1이다. 따라서 두 기저변수는 x_{ij_1}, x_{ij_2}, $j_2>j_1$, $j_1\in J_i$, $j_2\in N_i\setminus J_i$의 형태로 발생이 되며 이외에 p_i가 기저변수이다. 축소기저행열 B는 기저벡타 (x_{ij_1},x_{ij_2},p_i)에 대응되며 해당되는 목적함수치 z_i의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_i(\bar{b}_i+\alpha)&=z_i(\bar{b}_i)+\alpha c_B B^{-1}e_1\\ &=z_i(\bar{b}_i)+\alpha(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1})\\ &=z_i(\bar{b}_i)+\alpha\ \theta_i(j_1,j_2)\end{aligned}\quad(2.4)$$

여기서 $c_B=(c_{ij_1},c_{ij_2},0)$, $e_1=(1,0,0)^t$이다. 그러므로 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음 식에 의해 결정된다.

$$\min_{j_1\in J_i}\ \min_{j_2\in N_i\setminus J_i, j_2>j_1}\{\ \theta_i(j_1,j_2)\ \}\quad(2.5)$$

ii) $r_i=1$인 경우에는 제약식 (1.1c)의 우측, 좌측 제약식은 서로 동일하고 하나의 등식이 되므로 축소기저행열 B의 차원은 2×2이고 기저벡타 (x_{ij_1},x_{ij_2})에 대응된다. 이때의 목적함수치 z_i의 변화는 위의 식 (2.4)와 같고 $c_B=(c_{ij_1},c_{ij_2})$, $e_1=(1,0)^t$이다. 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 위의 식 (2.5)와 동일하다. 위의 i), ii) 경우로부터 $\bar{b}$가 α만큼 증가할 때 모든 선택집합 N_i, $i\in I_2$,에 대해 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음식에 의해 결정된다.

$$\min[\min_{i\in I_2}\ \min_{j_1\in J_i}\ \min_{j_2\in N_i\setminus J_i, j_2>j_1}\{\ \theta_i(j_1,j_2)\ \}]\quad(2.6)$$

이상 1), 2)의 경우로부터 $\bar{b}$가 증가할 때 모든 선택집합 N_i, $i\in I$, 에 대해서 최적목적함수치가 증가하는 비율, 분수값을 취하는 기저변수들, 및 분수해가 발생하는 선택집합의 지수는 위의 식 (2.3), (2.6)중에서 최소비율을 갖는 식으로부터 결정된다. 따라서 정리가 성립된다. □

보조정리 1에서 결정된 기저가 최적으로 유지되는 $\bar{b}$의 최대증가량은 $a_{qf_2}-a_{qf_1}$이고, 이때 $f_1\neq 0$이면 지수집합 J_q에서 f_1이 탈락하고 f_2가 교체진입하여 새로운 지수집합이 얻어진다. $f_1=0$일 때는 J_q에 f_2가 추가포함되어 새로운 지수집합이 얻어지며 교체탈락되는 지수는 없다. 그리고 J_q외의 다른 지수집합 J_i, $i\neq q$, 는 변동이 없다.

정리 2 $\bar{b}$가 증가함에 따라 선택집합 N_i에 속한 한 기저변수가 기저에서 탈락된 후 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i회를 넘지 않는다.

(증명) $\bar{b}$가 증가함에 따라 보조정리 1에 의하여 선택집합 N_i에서 분수값을 갖는 기저변수가 발생한다고 하고 $f_1\in J_i$가 현재 기저변수의 지수라고 하자. 첫째로, 선택상수 r_i가 $r_i=1$인 경우를 고려한다. $|J_i|=1$이므로 $\bar{b}$가 증가함에 따라 f_1은 J_i에서 탈락이 되고, 대신 f_1보다 큰 다른 지수 f_2가 J_i에 속하게 된다. 이러한 과정의 반복후에도 J_i에 속해 있는 지수

f_1'은 항상 f_1보다 크므로 탈락이 되었던 f_1은 f_1'을 대신하여 교체될 수 없으며 따라서 f_1은 기저에 재진입할 수 없다. 다음으로, 선택상수 r_i가 $r_i>1$이고 $1 \le |J_i| < r_i$인 경우를 고려한다. $|J_i|=1$이면 위 경우와 같이 탈락된 기저변수의 지수 f_1은 기저에 재진입할 수 없다. 그러나 탈락되었던 지수 f_1은, $|J_i|$가 증가하는 과정중 보조정리 1에 의해 비율 $\theta_i(0,f_1)$이 선택되면, 추가로 진입가능하며 교체과정은 발생하지 않으므로 $|J_i|=r_i$가 될 때까지 한번만 진입가능하다. 마지막으로, 선택상수 r_i가 $r_i>1$이고 $|J_i|=r_i$인 경우를 고려한다. f_1이 J_i에서 탈락된 후 다시 기저에 진입되고 J_i에 속하기 위해서는, J_i에 속해 있고 f_1보다 작은 다른 지수 f_1' ($f_1'<f_1$, $f_1' \in J_i$)이 대신 J_i에서 탈락이 되어야 한다. $|J_i|=r_i$이므로 이러한 f_1'의 개수는 r_i-1개를 넘지 않으며 이러한 과정의 반복후 f_1이 J_i에 있는 지수들 중 가장 작은 지수일 때 탈락이 되면 다시는 기저에 들어올 수 없다. 이상의 모든 경우로부터 기저를 떠난 변수가 다시 기저에 재진입할 수 있는 최대회수는 r_i회를 넘지 않는다. □

보조정리 1의 비율결정에 필요한 비율들 수는 각 선택집합당 최대로 $n_i + {}_{n_i}C_2$개이다. 그러나 정리 2에 의하여 각 선택집합당 비율결정에 필요한 비율들 수는 $r_i n_i$개로 줄어든다. 다음에는 각 선택집합별로 $r_i n_i$개의 비율들중 최적해 탐색에 실제 사용이 되는 최소비율을 찾는 해법을 제시한다.

최소비율 탐색해법

0. $J \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $R_j \leftarrow \phi$, $j=0,\cdots,n_i$, $M \leftarrow \phi$, $L_i \leftarrow \phi$.
1. (초기해) 선택집합 N_i에 속한 목적함수의 계수 c_{ij}들 중에서 가장 작은 값을 갖는 변수의 지수를 찾고 그 집합을 J_i, $J \leftarrow J_i$라 놓는다.
2. (후보비율 계산) 각 지수 j_1 ($j_1=0,\cdots,n_i-1$)에 대해 다음의 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 계산한다.

   $\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1})$, $j_2>j_1$, $j_2 \in N_i$.

   각 j_1에 대해 계산된 비율들 $\theta_i(j_1,j_2)$ ($j_2>j_1$, $j_2 \in N_i$) 중에서 비율이 가장 작은 r_i개를 선택해서 비감소하는 순으로 비율 목록 R_{j_1}에 넣는다.
3. (최소비율 탐색) $r_i>1$, $1 \le |J| < r_i$이면, 각 $j_1 \in J \cup \{0\}$에 대해 다음과 같이 최소비율 $\theta_i^*(j_1,j_2)$를 찾아 최소비율 집합 M에 넣는다.

   $\theta_i^*(j_1,j_2)=\min\{\theta_i(j_1,j_2) \mid \theta_i(j_1,j_2) \in R_{j_1}, j_2 \in N_i \backslash J\}$, $j_1 \in J \cup \{0\}$

   $M \leftarrow M \cup \{\theta_i^*(j_1,j_2) \mid j_1 \in J \cup \{0\}\}$

   $r_i \ge 1$, $|J|=r_i$이면, 각 $j_1 \in J$에 대해 다음과 같이 최소비율 $\theta_i^*(j_1,j_2)$를 찾아 최소비율 집합 M에 넣는다.

   $\theta_i^*(j_1,j_2)=\min\{\theta_i(j_1,j_2) \mid \theta_i(j_1,j_2) \in R_{j_1}, j_2 \in N_i \backslash J\}$, $j_1 \in J$

   $M \leftarrow M \cup \{\theta_i^*(j_1,j_2) \mid j_1 \in J\}$

   $M=\phi$이면 과정을 끝낸다.
4. (최소비율 선정) M의 비율들중 가장 작은 값을 찾고 해당되는 지수들을 f_1, f_2라 한다.

   $\theta_i^*(f_1,f_2)=\min\{\theta_i(j_1,j_2) \mid \theta_i(j_1,j_2) \in M\}$
5. (최소비율 목록작성) 선정된 비율 $\theta_i^*(f_1,f_2)$를 목록 L_i에 넣는다.

   $L_i \leftarrow L_i \cup \{\theta_i^*(f_1,f_2)\}$

   $f_1=0$이면 $J \leftarrow J \cup \{f_2\}$, $f_1 \neq 0$이면 $J \leftarrow J \cup \{f_2\} \backslash \{f_1\}$로 수정하고 $M \leftarrow \phi$라 한다. 단계 3으

로 간다.

최소비율 탐색해법의 단계 1에서 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장 작은 변수들이 여러개 존재하면 해당되는 제약식의 계수 a_{ij}가 가장 큰 변수를 선택한다. 단계 2에서 목록 R_{j_1}에 넣을 비율들중 같은 비율이 여러개 존재하면 해당되는 계수 a_{ij_2}가 가장 큰 비율을 선택하여 넣는다. 최소비율 탐색해법의 적용결과 얻어지는 J_i와 L_i는 다음 제시할 문제 (P)에 대한 해법에서 목록 L의 작성에 사용된다.

해 법

단계 1. 모든 선택집합 N_i에 최소비율 탐색해법을 적용하여 L_i, J_i들을 구한다. $L \leftarrow \cup_{i\in I} L_i$, $\bar{b} \leftarrow \Sigma_{i\in I}\Sigma_{j\in J_i} a_{ij}$로 놓는다. 목록 L 모든 비율들을 가장 작은 것부터 비감소하는 순서로 재배열한다.

단계 2. $\bar{b} \geq b$ 이면 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

$x_{ij}=1,\ j\in J_i,\ x_{ij}=0,\ j\in N_i \backslash J_i,\ i\in I.$

$\bar{b} < b$ 이면 단계 3으로 간다.

단계 3. 목록 L로부터 첫번째에 위치한 최소비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 선택하고 다음과 같이 $\bar{b}$를 수정한다. $L=\phi$이면 문제 (P)는 비가해이므로 해법과정을 끝낸다.

$\bar{b} \leftarrow \bar{b}+(a_{ij_2}-a_{ij_1})$

단계 4. $\bar{b} \geq b$ 이면 $q \leftarrow i,\ f_1 \leftarrow j_1,\ f_2 \leftarrow j_2$, $\bar{e} \leftarrow \bar{b}-b$ 이라 하고 단계 5로 간다.

$\bar{b} < b$ 이면 다음을 수행하고 단계 3으로 간다.

$L \leftarrow L \backslash \{\theta_i(j_1,j_2)\}$

$j_1=0$이면 $J_i \leftarrow J_i \cup \{j_2\}$, $j_1 \neq 0$이면 $J_i \leftarrow J_i \cup \{j_2\} \backslash \{j_1\}$로 수정한다.

단계 5. 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

$f_1=0$이면 $x_{qf_2}=(a_{qf_2}-\bar{e})/a_{qf_2}$,

$x_{qj}=1,\ j\in J_q,\ x_{qj}=0,\ j\in N_q \backslash J_q \backslash \{f_2\}$,

$x_{ij}=1,\ j\in J_i,\ x_{ij}=0,\ j\in N_i \backslash J_i,\ i\in I \backslash \{q\}$.

$f_1 \neq 0$이면 $x_{qf_1}=\bar{e}/(a_{qf_2}-a_{qf_1})$,

$x_{qf_2}=(a_{qf_2}-a_{qf_1}-\bar{e})/(a_{qf_2}-a_{qf_1})$,

$x_{qj}=1,\ j\in J_q \backslash \{f_1\},\ x_{qj}=0,\ j\in N_q \backslash J_q \backslash \{f_2\}$,

$x_{ij}=1,\ j\in J_i,\ x_{ij}=0,\ j\in N_i \backslash J_i,\ i\in I \backslash \{q\}$.

위 해법은 목록 L에 있는 최소비율들을 가장 작은 것부터 비감소하는 순으로 탐색해 간다. 목록 L에 있는 비율들 수는 최대로 $r_{\max}n$개를 넘지 않으므로 위 해법의 주요 회전단계인 3, 4는 $r_{\max}n$회 이내에 최적해를 찾거나 또는 비가해임을 알아낸다.

정리 3 문제(P)에 대한 해법의 계산상 복잡도는 최악상황하에서 $O(r_{\max}n^2)$이다.

(증명) 해법의 단계 1에서 목록 L을 구하기 위하여 모든 선택집합 N_i에 최소비율 탐색해법을 적용한다. 각 N_i에 대한 최소비율 탐색해법의 단계 1에서는 $O(n_i)$의 계산이 필요하다. 단계 2에서 비율계산에 $O(n_i^2)$이 소요되고 각 지수 j에 대해 R_j에 넣을 가장 작은 r_i개 비율선택에는 $O(r_in_i)$로서 모든 지수에 대해 총 $O(r_in_i^2)$의 계산이 필요하다. 단계 3에서 각 R_j의 비율 수는 r_i개이고 $|J| \leq r_i$이므로 집합 M을 얻는데 $O(r_i^2)$의 계산이 필요하다. 단계 4의 계산에는 $O(r_i)$, 단계 5에서는 상수회

의 계산이 소요된다. 최소비율 탐색해법의 주요 회전단계인 단계 3, 4, 5의 최대회전수는 모든 R_j의 비율들 수의 총합보다 적으므로 $O(r_i n_i)$이다. 따라서 주요 회전단계 3, 4, 5의 총계산은 $O(r_i^3 n_i)$가 소요된다. 이상으로부터 최소비율 탐색해법은 단계 1에서 $O(n_i)$, 단계 2에서 $O(r_i n_i^2)$, 주요 회전단계인 3, 4, 5에서 $O(r_i^3 n_i)$의 계산이 소요된다. 선택상수 r_i들은 $1 \le r_i \le \sqrt{n_i}$를 만족하므로 최소비율 탐색해법을 적용하여 목록 L_i를 얻는데 소요되는 계산은 $\max\{O(r_i n_i^2), O(r_i^3 n_i)\} = O(r_i n_i^2)$이 된다. 따라서 해법의 단계 1에서 모든 선택집합에 대해 L을 얻는데 $O(r_{\max} n^2)$이 필요하다. 다음으로 목록 L의 원소들 수는 최대로 $r_{\max} n$개이므로 크기 순으로 배열하는데 $O(r_{\max} n \log n)$이 소요된다. 단계 2는 상수회에 계산된다. 해법의 주요 회전단계인 3, 4는 상수회에 계산되고 최대 회전수는 L의 최대 비율개수 $r_{\max} n$이다. 이상으로부터 해법은 단계 1에서 $\max\{O(r_{\max} n^2), O(r_{\max} n \log n)\} = O(r_{\max} n^2)$이, 단계 2는 상수회에, 주요 회전단계인 3, 4에서 $O(r_{\max} n)$이 소요되므로 최악상황하의 계산상 복잡도는 $O(r_{\max} n^2)$이다. □

3. 수치예제

다음 문제 (P)의 최적해를 구하기 위하여 해법을 적용한다.

(P) Minimize $\Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij}$

s.t. $\Sigma_{i \in I} \Sigma_{j \in N_i} a_{ij} x_{ij} \ge 84$,

$1 \le \Sigma_{j \in N_1} x_{1j} \le 2$,

$1 \le \Sigma_{j \in N_2} x_{2j} \le 3$,

$0 \le x_{ij} \le 1,\ j \in N_i = \{1, \cdots, 15\},\ i \in I = \{1, 2\}$.

여기서, 계수 c_{ij} 및 a_{ij}의 값은 다음 표와 같다.

i	c_{ij}, a_{ij} \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	c_{ij}	5	3	4	6	5	5	7	8	13	15	17	15	21	23	30
	a_{ij}	2	3	7	10	12	15	17	19	23	25	28	30	31	32	35
2	c_{ij}	4	2	3	4	5	7	9	6	8	11	13	13	14	19	20
	a_{ij}	1	2	4	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19

〈1회〉

단계 1. 1) 선택집합 N_1에 대한 L_1작성

(1회)

1. $J_1 = \{2\}$, $J = \{2\}$
2. $R_0 = \{\theta_1(0,6)=0.33,\ \theta_1(0,7)=0.41\}$

   $R_1 = \{\theta_1(1,2)=-2,\ \theta_1(1,3)=-0.2\}$

   $R_2 = \{\theta_1(2,6)=0.17,\ \theta_1(2,5)=0.22\}$

   $R_3 = \{\theta_1(3,6)=0.13,\ \theta_1(3,5)=0.2\}$

   $R_4 = \{\theta_1(4,5)=-0.5,\ \theta_1(4,6)=-0.2\}$

   $R_5 = \{\theta_1(5,6)=0,\ \theta_1(5,7)=0.4\}$

   $R_6 = \{\theta_1(6,12)=0.67,\ \theta_1(6,8)=0.75\}$

   $R_7 = \{\theta_1(7,8)=0.5,\ \theta_1(7,12)=0.62\}$

   $R_8 = \{\theta_1(8,12)=0.64,\ \theta_1(8,11)=1\}$

   $R_9 = \{\theta_1(9,12)=0.29,\ \theta_1(9,11)=0.8\}$

   $R_{10} = \{\theta_1(10,12)=0,\ \theta_1(10,11)=0.67\}$

   $R_{11} = \{\theta_1(11,12)=-1,\ \theta_1(11,13)=1.33\}$

   $R_{12} = \{\theta_1(12,15)=3,\ \theta_1(12,14)=4\}$

   $R_{13} = \{\theta_1(13,14)=2,\ \theta_1(13,15)=2.25\}$

   $R_{14} = \{\theta_1(14,15)=2.33\}$

   $R_{15} = \phi$
3. $|J| < r_1$, $M = \{\theta_1(0,6),\ \theta_1(2,6)\}$
4. $\theta_1^*(f_1, f_2) = \theta_1(2,6)$
5. $L_1 = \{\theta_1(2,6)\}$, $J = \{6\}$

(2회)

3. $|J| < r_1$, $M = \{\theta_1(0,7),\ \theta_1(6,12)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(0,7)$

5. $L_1=\{\theta_1(2,6),\ \theta_1(0,7)\}$, $J=\{6,7\}$

(3회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(6,12),\ \theta_1(7,8)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(7,8)$

5. $L_1=\{\theta_1(2,6),\ \theta_1(0,7),\ \theta_1(7,8)\}$,
$J=\{6,8\}$

(4회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(6,12),\ \theta_1(8,12)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(8,12)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(8,12)\}$, $J=\{6,12\}$

(5회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(6,8),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(6,8)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(6,8)\}$, $J=\{8,12\}$

(6회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(8,11),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(8,11)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(8,11)\}$, $J=\{11,12\}$

(7회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(11,13),\ \theta_1(12,15)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(11,13)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(11,13)\}$, $J=\{12,13\}$

(8회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(12,15),\ \theta_1(13,14)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(13,14)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(13,14)\}$, $J=\{12,14\}$

(9회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(12,15),\ \theta_1(14,15)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(14,15)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(14,15)\}$, $J=\{12,15\}$

(10회)

3. $|J|=r_1$, $M=\{\theta_1(12,14)\}$

4. $\theta_1^*(f_1,f_2)=\theta_1(12,14)$

5. $L_1=L_1\cup\{\theta_1(12,14)\}$, $J=\{14,15\}$

(11회)

3. $|J|=r_1$, $M=\phi$, 최소비율 탐색해법 과정을 끝낸다.

$L_1=\{\theta_1(2,6),\ \theta_1(0,7),\ \theta_1(7,8),\ \theta_1(8,12),$
$\theta_1(6,8),\ \theta_1(8,11),\ \theta_1(11,13),$
$\theta_1(13,14),\ \theta_1(14,15),\ \theta_1(12,14)\}$

2) 선택집합 N_2에 대한 L_2작성

(1회)

1. $J_2=\{2\}$, $J=\{2\}$

2. $R_0=\{\theta_2(0,8)=0.5,\ \theta_2(0,9)=0.62,\ \theta_2(0,5)=0.71\}$
$R_1=\{\theta_2(1,2)=-2,\ \theta_2(1,3)=-0.33,\ \theta_2(1,4)=0\}$
$R_2=\{\theta_2(2,8)=0.4,\ \theta_2(2,3)=0.5,\ \theta_2(2,9)=0.55\}$
$R_3=\{\theta_2(3,8)=0.38,\ \theta_2(3,9)=0.56,\ \theta_2(3,5)=0.67\}$
$R_4=\{\theta_2(4,8)=0.29,\ \theta_2(4,5)=0.5,\ \theta_2(4,9)=0.5\}$
$R_5=\{\theta_2(5,8)=0.2,\ \theta_2(5,9)=0.5,\ \theta_2(5,10)=0.86\}$
$R_6=\{\theta_2(6,8)=-0.33,\ \theta_2(6,9)=0.25,\ \theta_2(6,10)=0.8\}$
$R_7=\{\theta_2(7,8)=-3,\ \theta_2(7,9)=-0.5,\ \theta_2(7,10)=0.67\}$
$R_8=\{\theta_2(8,13)=1.6,\ \theta_2(8,12)=1.75,\ \theta_2(8,15)=2\}$
$R_9=\{\theta_2(9,13)=1.5,\ \theta_2(9,12)=1.67,\ \theta_2(9,15)=2\}$
$R_{10}=\{\theta_2(10,13)=1,\ \theta_2(10,15)=1.8,\ \theta_2(10,14)=2\}$
$R_{11}=\{\theta_2(11,12)=0,\ \theta_2(11,13)=0.5,\ \theta_2(11,15)=1.75\}$
$R_{12}=\{\theta_2(12,13)=1,\ \theta_2(12,15)=2.33,\ \theta_2(12,14)=3\}$
$R_{13}=\{\theta_2(13,15)=3,\ \theta_2(13,14)=5\}$
$R_{14}=\{\theta_2(14,15)=1\}$
$R_{15}=\phi$

3. $|J|\langle r_2$, $M=\{\theta_2(0,8),\ \theta_2(2,8)\}$

4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(2,8)$

5. $L_2=\{\theta_2(2,8)\}$, $J=\{8\}$

(2회)

3. $|J|\langle r_2$, $M=\{\theta_2(0,9),\ \theta_2(8,13)\}$

4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(0,9)$

5. $L_2=\{\theta_2(2,8),\ \theta_2(0,9)\}$, $J=\{8,9\}$

(3회)

3. $|J| \langle r_2$, $M=\{\theta_2(0,5), \theta_2(8,13), \theta_2(9,13)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(0,5)$
5: $L_2=\{\theta_2(2,8), \theta_2(0,9), \theta_2(0,5)\}$, $J=\{5,8,9\}$

(4회)

3. $|J|=r_2$, $M=\{\theta_2(5,10), \theta_2(8,13), \theta_2(9,13)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(5,10)$
5. $L_2=L_2\cup\{\theta_2(5,10)\}$, $J=\{8,9,10\}$

(5회)

3. $|J|=r_2$, $M=\{\theta_2(8,13), \theta_2(9,13), \theta_2(10,13)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(10,13)$
5. $L_2=L_2\cup\{\theta_2(10,13)\}$, $J=\{8,9,13\}$

(6회)

3. $|J|=r_2$, $M=\{\theta_2(8,12), \theta_2(9,12), \theta_2(13,15)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(9,12)$
5. $L_2=L_2\cup\{\theta_2(9,12)\}$, $J=\{8,12,13\}$

(7회)

3. $|J|=r_2$, $M=\{\theta_2(8,15), \theta_2(12,15),$ $\theta_2(13,15)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(8,15)$
5. $L_2=L_2\cup\{\theta_2(8,15)\}$, $J=\{12,13,15\}$

(8회)

3. $|J|=r_2$, $M=\{\theta_2(12,14), \theta_2(13,14)\}$
4. $\theta_2^*(f_1,f_2)=\theta_2(12,14)$
5. $L_2=L_2\cup\{\theta_2(12,14)\}$, $J=\{13,14,15\}$

(9회)

3. $|J|=r_2$, $M=\phi$, 최소비율 탐색해법 과정을 끝낸다.

$L_2=\{\theta_2(2,8), \theta_2(0,9), \theta_2(0,5), \theta_2(5,10), \theta_2(10,13), \theta_2(9,12), \theta_2(8,15), \theta_2(12,14)\}$

이상으로부터

$L=\{\theta_1(2,6), \theta_2(2,8), \theta_1(0,7), \theta_1(7,8), \theta_2(0,9), \theta_1(8,12), \theta_2(0,5), \theta_1(6,8), \theta_2(5,10), \theta_1(8,11), \theta_2(10,13), \theta_1(11,13), \theta_2(9,12), \theta_1(13,14), \theta_2(8,15), \theta_1(14,15), \theta_2(12,14), \theta_1(12,14)\}$

$J_1=\{2\}$, $J_2=\{2\}$, $\bar{b}=3+2=5$

단계 2. $\bar{b} \langle b(=84)$이므로 단계 3으로 간다.

단계 3. $\theta_1(2,6)$ 선택, $\bar{b}=5+12=17$

단계4 $\bar{b} \langle 84$이므로 $J_1=\{6\}$, $L=L\setminus\{\theta_1(2,6)\}$

〈2회〉

단계 3. $\theta_2(2,8)$ 선택, $\bar{b}=17+10=27$

단계 4. $\bar{b} \langle 84$ 이므로 $J_2=\{8\}$, $L=L\setminus\{\theta_2(2,8)\}$

〈3회〉

단계 3. $\theta_1(0,7)$ 선택, $\bar{b}=27+17=44$

단계 4 $\bar{b} \langle 84$ 이므로 $J_1=\{6,7\}$, $L=L\setminus\{\theta_1(0,7)\}$

〈4회〉

단계 3. $\theta_1(7,8)$ 선택, $\bar{b}=44+2=46$

단계 4 $\bar{b} \langle 84$ 이므로 $J_1=\{6,8\}$, $L=L\setminus\{\theta_1(7,8)\}$

〈5회〉

단계 3. $\theta_2(0,9)$ 선택, $\bar{b}=46+13=59$

단계 4 $\bar{b} \langle 84$ 이므로 $J_2=\{8,9\}$, $L=L\setminus\{\theta_2(0,9)\}$

〈6회〉

단계 3. $\theta_1(8,12)$ 선택, $\bar{b}=59+11=70$

단계4 $\bar{b} \langle 84$이므로 $J_1=\{6,12\}$, $L=L\setminus\{\theta_1(8,12)\}$

〈7회〉

단계 3. $\theta_2(0,5)$ 선택, $\bar{b}=70+7=77$

단계4 $\bar{b} \langle 84$이므로 $J_2=\{5,8,9\}$, $L=L\setminus\{\theta_2(0,5)\}$

〈8회〉

단계 3. $\theta_1(6,8)$ 선택, $\bar{b}=77+4=81$

단계4 $\bar{b} \langle 84$이므로 $J_1=\{8,12\}$, $L=L\setminus\{\theta_1(6,8)\}$

〈9회〉

단계 3. $\theta_2(5,10)$ 선택, $\bar{b}=81+7=88$

단계 4. $\bar{b} \rangle 84$ 이므로 $q=2$, $f_1=5$, $f_2=10$, $\bar{e}=4$, 단계 5로 간다.

($J_1=\{8,12\}$, $J_2=\{5,8,9\}$)

단계 5. 최적해는 다음과 같다.

$x_{18}=x_{1,12}=1$, $x_{1j}=0$, $j\neq 8,12$,

$x_{25}=4/7$, $x_{2,10}=3/7$, $x_{28}=x_{29}=1$,

$x_{2j}=0$, $j\neq 5,8,9,10$.

4. 결론

본 연구에서는 확장된 다중선택 제약구조를 지니는 선형배낭문제를 고려하고 최악상황하의 계산상 복잡도가 $O(r_{\max}n^2)$인 신속한 해법을 개발하였다. 여기서, $r_{\max}$는 선택상수들중 최대값, n은 모든 변수들의 총합이다.

본 연구에서 고려된 문제는 기존의 다중선택 선형배낭문제[1,2,3,4,5,6,8,9,11,12]를 포함하고 있는 일반화된 문제이며 연구[14]의 문제보다 확장된 문제로서 해공간이 확장됨에 따라 최적해의 효율적인 탐색이 복잡해지고 있다. 본 연구에서 제시된 해법은 모수분석 특성[13,14]외에 새로운 기저특성을 파악, 적용하므로써 기존연구[13]의 해법보다 더욱 신속하게 최적해를 찾는다.

제시된 해법은 최소비율 탐색 및 목록작성 과정에서 각 선택집합별로 선택상수 r_i의 변화를 쉽게 포용하므로 우변상수 b 및 선택상수 r_i의 변화에 효율적으로 적용된다. 따라서 정수계획문제의 정수최적해 및 근사해를 구하는 분지한계과정에 적합이 사용될 수 있다. [15]

참 고 문 헌

[1] Armstrong, R. D., D. S. Kung, P. Sinha, and A. A. Zoltners, "A Computational Study of a Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. ACM*. 9, pp. 184-198, 1983.

[2] Dudzinski, K. and S. Walukiewicz, "A Fast Algorithm for the Linear Multiple-Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters* 3, pp. 205-209, 1984.

[3] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr*. 29, pp. 57-63, 1984.

[4] Glover, F. and D. Klingman, "A O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints," *Math. Progr*. 17, pp. 345-361, 1979.

[5] Ibaraki, T., K. Teranaka, J. Iwase, T. Hasegawa, "The Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 21, pp. 59-93, 1978.

[6] Johnson, E. L. and M. W. Padberg, "A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters* 1, pp. 18-22, 1981.

[7] Johnson, E. L., M. M. Kostreva, and U. H. Suhl, "Solving 0-1 Integer Programming Problems Arising from Large Scale Planning Models," *Opns. Res*. 33, pp. 803-819, 1985.

[8] Sarin, S. and M. K. Karwan, "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters* 8, pp. 95-100, 1989.

[9] Sinha, P. and A. A. Zoltners, "The Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res*. 27, pp. 503-515, 1979.

[10] Stecke, K. E., "Formulation and Solution of Nonlinear Integer Production Planning Problems for Flexible Manufacturing Systems," Mangt. Sci. 29, pp. 273-288, 1983.

[11] Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res*. 28, pp. 1412-1423, 1980.

[12] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the

Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Proc. Letters* 18, pp. 123-128, 1984.

[13] 원 중연, 정 성진, "일반 다중선택 선형배낭문제의 확장문제에 대한 효율적인 해법," 한국경영과학회지, 제17권, 제1호, pp. 31-41, 1992.

[14] 원 중연, "일반 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구," 대한산업공학회지, 제21권, 제4호, pp. 519-527, 1995.

[15] 원 중연, "다중선택 구조를 갖는 정수계획문제의 근사해법," 한국과학재단 보고서, 1995.

95년 12월 최초 접수, 96년 6월 최종 수정