Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.22, No.3, September, 1996

퇴화하는 기계에서의 품질 불량을 고려한 최적 생산시간 결정

An Optimal Production Run Length in A Deteriorating Machine

김창현*, 홍유신**

Chang Hyun Kim, Yushin Hong

Abstract

This paper presents an EMQ model which determines an optimal production run length in a deteriorating machine. It is assumed that a machine is subject to a random deterioration from an in-control state to an out-of-control state with an arbitrary distribution and thus producing some proportion of defective items. An optimal production run length and a minimum average cost are derived in each of three deteriorating processes; constant, linearly increasing, and exponentially increasing. The model with repair cost is also analyzed. Several mistakes in previous research are found and discussed. Numerical experiments are carried out to see the behavior of the proposed model depending on the cost factors as well as machine parameters, and some interesting behaviors are observed.

I. 서론

단일 기계로 구성된 배취 (batch) 생산 시스템하에서의 경제적인 생산량 결정에 관한 여러 연구들이 과거 수많은 저자들에 의해 진행되어져 왔다. 그 가운데 아직까지 널리 연구되고 있는 주제중의 하나는 고전적인 경제적 생산량 (Economic Manufacturing Quantity) 결정 모형을 현실의 여러가지 상황을 고려한 실제 문제로의 확장하는 내용일 것이다 (Hax and Candea[6], Silver and Peterson [14]). 그러나 운용되고 있는 생산시스템이 불완전

* 포스코 경영연구소/포항공대 산업공학과

** 포항공대 산업공학과

한 경우의 경제적 생산량 결정에 관한 연구는 그다지 폭 넓게 진행되지 못했다. 이 주제에 대한 최근의 연구 방향을 살펴보면, 다음과 같이 크게 두 가지 내용으로 대별할 수 있다. 첫번째 방향은 생산 과정 도중의 어느 시점에 생산과정 자체에 불완전성이 존재하여 불량품을 생산하게 되고, 이에 따라 수율 또한 떨어지게 되는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이며, 두번째 방향은 생산시스템 그 자체의 불완전성으로 인하여 생산 과정 도중에 고장이 발생하여 이를 수리하여야만 다시 생산을 시작할 수 있는 경우에서의 경제적 생산량 결정에 관한 연구이다.

첫번째 연구 방향에 대한 연구 결과로 Rosenblatt and Lee[13]는 고전적인 EMQ 모형을 확장하여 생산 과정이 진행됨에 따라 기계가 성능이 점차 퇴화하여 정상적인 가동상태 (in-control state) 에서 비정상적인 가동상태 (out-of-control state) 로 변하면, 생산 과정은 계속 진행되지만 일정 비율만큼 불량품을 생산한다고 가정할 때의 EMQ 모형을 발표하였다. 그들은 기계가 정상상태로 가동하는 시간이 지수분포를 따를 때의 평균비용을 도출하였으며, 비용함수를 대략화(approximation)시켜 닫힌 형태 (closed form)의 해를 유도하여 최적 생산시간이 고전적인 EMQ 모형의 최적 생산시간보다 짧다는 것을 보여주었다. 그 후 이들[8]은 최적 생산량과 검사계획을 동시에 고려하는 모형을 발표하였는데, 기계가 지수 분포의정상 가동상태의 간격을 가질 때, 기계의 비정상 가동상태를 검출하고자 하는 최적 검사계획은 등간격(equally spaced period)을 가짐을 보여 주었다. 나아가 이들[9]은 비정상적으로 가동중인 기계의 복구비용이 비정상적인 가동상태로 부터 검사후 수리하기까지의 지연시간에 비례하는 경우의 최적 생산계획 및 검사계획을 동시에 결정하는 모형을 발표하였다. Rahim[12]은 생산 공정의 정상 가동상태 간격이 고장율 증가함수인 일반분포를 가지며, 주기적인 샘플링 검사로 생산공정의 가동상태를 검사하는 경우에 최적 생산량과 검사계획 및 관리도 설계안을 동시에 결정하는 재고문제와 품질문제의 혼합 모형을 발표하였다. Porteus[11]는 제품 한 단위 생산할 때마다 공정 상태가 비정상 가동상태로 변하는 확률이 일정하고, 일단 비정상적인 가동상태가 되면 해당 로트를 모두 생산할 때까지 이 상태가 지속되면서 불량품을 생산한다고 가정할 때, 최적 생산량을 구하는 모형을 제시하였다. 그는 로트 크기를 적게 하면 적게 할수록 불량품 생산비율이 떨어진다는 수율과 생산량과의 관계를 명시적으로 나타내었으며, 불량품 생산비율과 로트 크기를 줄임으로써 단위 시간당 비용을 줄이기 위한 투자방안도 함께 제시하였다. Lee[10]는 반도체 산업의 특징을 반영하여 애로 공정상에서의 평균 생산주기를 줄일 수 있는 로트 크기를 결정하는 모형을 발표하였다. 주요 가정은 웨이퍼 한 장 생산할 때마다 일정 비율로 생산공정이 비정상적인 가동상태가 되며, 이렇게 되면 다음 웨이퍼를 생산하기 전에 일정 확률로 이를 감지하여 비정상적인 가동상태를 정상 가동상태로 복구하고 재작업을 하게 된다. 그리고, 최근에 Yano and Lee[15]는 첫번째 연구방향에 대한 제 문제를 포함, 생산량이나 구매량의 수율이 랜덤한 경우에 로트 크기를정하는 문제에 대하여 광범위한 문헌 조사를 통한 survey

논문을 발표하여 연구 동향에대한 흐름을 한 눈에 파악할 수 있게 하였다.

두번째 연구 방향에 대한 연구 결과로는 Groenevelt et al.[4]이 기계가 불완전하여 고장이 일어날 수 있으며 지수분포의 수명을 가질 때, 수리시간을 필요로 하지 않을 경우에서의 EMQ모형을 발표하여 고전적인 EMQ 모형과는 다른 여러 특성들을 보여 주었다. 또한, 그들의 또 다른 논문[5]에서는 보유 재고를 운영재고(running stock)와 안전재고로 구분한 후 생산되는 제품의 일정 비율 만큼씩 각각의 재고로 나누어 생산하고, 기계의 수명이 지수분포를 가지며, 수리시간이 임의의 분포를 가질 때 일정한 service level을 만족시켜 주는 EMQ모형을 대기이론을 적용하여제시하였다. 김 창현 등[2]은 Groenevelt et al.[4]의 모형을 일반화하여 기계 수명의 고장율이 단조적 형태의 고장율 함수를 갖거나 욕조형태의 고장율 함수를 갖는 일반분포를 따를 때 경제적인 생산량 결정에 관한 문제를 제시하여, 기계의 수명분포에 따른 수리비용의 최적 생산량에 대한 영향도를 수리적으로 명시하였으며, 수리비용의 변화에 따른 최적 생산량의 대소관계 및 EMQ와의 관계에 대해서도 살펴보았다. 또한, 그들[1]은 Groenevelt et al.[4] 모형에서 기계의 수명이 지수분포를 가지며 일정한 수리시간을 필요로 하는 경우에서의 EMQ모형에 대해서 발표하였는데, 비용함수는 두 부분의 실행가능 영역에 따라 달리 표현된다는 것과 최적 생산량이 속하게 되는 존재 영역에 관한 결정 조건 및 수리시간을 허용할 때와 허용하지 않을 때의 최적 생산량과 그 때의 비용 관계를 주어진 관련 비용모수와의 관계식으로 나타내었다.

이상에서 기계가 불완전할 때의 EMQ모형에 대한 연구를 간략히 살펴보았다. 신뢰도 이론[3, 7]에 의하면 기계의 고장율은 일반적으로 가동시간에 대하여 욕조형(bathtub shape)을 띄고 있어서, 기계 가동의 초기단계나 열화로 인한 노후단계를 제외한 우발 고장단계에서는 고장율이 거의 일정한 것으로 알려져 있다. 이에, 대개의 경우 많은 모형들이 수리적 전개의 편의상 기계의 고장이 우발 고장단계에서의 모형을 주로 상정하여 왔다. 하지만, 실제 문제에서는 기계의 고장분포를 실적 데이터로 부터 추정하여야 하며 그 결과 많은 경우 기계의 고장분포는 임의의 분포를 따를 것으로 사료된다.

본 연구에서는 Rosenblatt and Lee[13]의 모형을 일반화하여 생산이 진행됨에 따라 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변하는 생산모형에서 기계가 정상 상태로 가동하는 시간이 랜덤하고, 임의의 일반분포를 따를 때 평균비용을 최소화하는 최적 생산시간을 결정하는 모형을 제시하였다. 연구 결과로서 Rosenblatt and Lee[13]와는 달리 비용함수의 대략화(approximation)에 의한 해 (이하, 근사해로 칭함)가 아닌 원래 비용함수에 대한 최적해를 도출하였고, 그 결과 Rosenblatt and Lee[13]의 모형에서 비용함수를 대략화함으로써 일어나는 오류를 지적하였다. 또한 기계를 비정상 가동상태에서 정상 가동상태로 환원하는데 수리비용이 발생하는 경우의 모형으로 확장하여 최적 생산시간을 구하는 방법을 제시하였다.

본 논문의 구성은 2절에서는 수리모형을 위한 가정 및 전제조건을 설명하고 모형에

대한 수식화, 해의 결정 및 모형의 특성에 대해 다루었으며, 3절에서는 본 모형의 행태를 살펴보기 위하여 수치실험 결과를 제시하였다. 최종 결론과 함께 향후 연구방향에 대하여는 4절에 기술되어 있다.

2. 수리모형

본 논문에 제시된 수리모형은 고전적인 EMQ 모형을 기본으로 하여 아래와 같은 가정하에서 개발되었다.

· 기계는 생산과정이 진행됨에 따라 퇴화할 수 있으며, 기계가 퇴화되면 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변한다.

· 매 주기마다 생산 개시 초기에는 정상 가동상태에서 100% 양품만을 생산하며, 만일 기계가 비정상 가동상태로 변하면 전체 로트가 생산될 때 까지 기계의 상태는 비정상 가동상태로 있으면서 일정 비율 만큼의 불량품을 생산한다. 이 가정은 일단 생산이 시작되면 생산 과정 중간에는 어떠한 조치도 취하기 어려운 상황이거나 기계의 상태 변화 자체를 감지하지 못했을 때 발생되는 상황으로 간주할 수 있다.

· 생산 개시 후 생산 공정이 정상상태로 가동하는 시간은 랜덤하며, 이것의 분포는 임의의 일반 분포를 따르며 평균과 분산은 유한하다.

· 모든 불량품은 생산이 끝난 후에야 검출할 수 있다.

수리모형의 개발에 앞서 이에 필요한 기계의 특성치를 포함한 관련 모수 및 비용치들을 아래와 같이 정의한다.

d : 수요율 (개/시간)

p : 생산율 (개/시간)

h : 재고 보유비용(원/시간/개)

K : 생산 준비비용(원)

T : 생산로트에 대한 생산 주기시간

t : 실제 로트 생산시간, $tp=Td$

s : 불량품 생산에 따른 단위 손실비용 (원/개)

α : 비정상 가동상태에서의 불량품 생산 비율

X : 기계가 정상 상태로 가동하는 시간, $X \sim f(x)$

$f(x)$: 기계가 정상 상태로 가동하는 시간의 확률 밀도 함수

위의 정의에서 불량품 생산에 따른 단위 손실비용 s는 재작업, 수리, 교환 또는 고객으로 부터의 신의 상실비용 등을 포함한 개념이다.

각 생산시간동안 발생된 불량품의 갯수 N 및 N의 기대치 $E(N)$은 정상 상태로 가동하는 시간 X에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$N=\begin{cases} 0 & \text{if } X \geq t. \\ \alpha p(t-X) & \text{if } X < t. \end{cases}$$

$$E(N)=\int_0^t \alpha p(t-x)f(x)dx$$

따라서, 생산 준비비용, 재고 보유비용 및 불량품 생산에 따른 비용을 고려한 단위시간당 비용을 $C(t)$ 라 하면, $C(t)$는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$C(t)=\frac{Kd}{pt}+\frac{h}{2}(p-d)t+\frac{s\alpha d}{t}\int_0^t (t-x)f(x)dx \qquad (1)$$

비용함수 $C(t)$의 모양을 살펴보기 위하여 C

$C(t)$의 양 극한치를 구하여 보면

$$\lim_{t\to 0^+} C(t)=\infty,\quad \lim_{t\to\infty} C(t)=\infty$$

가 되어 t가 0^+또는 무한대로 접근함에 따라 비용함수 $C(t)$도 무한히 커지므로 함수형태가 고전적인 EMQ 모형과 유사함을 알 수 있다. 최적 생산시간 t^*가 무한대라는 의미는 기계의 상태에 관계없이 즉, 불량품 생산 여부에 관계없이 무한히 생산하는 정책이므로 현실적인 의미는 없다고 할 수 있다.

위의 수리모형에서 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 생산시간 t^*를 구하기 위하여 Leibnitz 법칙을 적용하여 식 (1)을 미분한 후 $C(t)$의 일차 도함수를 구하면

$$C'(t)=-\frac{Kd}{pt^2}+\frac{h}{2}(p-d)+\frac{s\alpha d}{t^2}\int_0^t xf(x)dx$$

와 같이 주어진다. $q(t)=t^2C'(t)$라 정의하면 $q(t)$는 식 (2)와 같이 정리된다.

$$q(t)=-\frac{Kd}{p}+\frac{h}{2}(p-d)t^2+s\alpha d\int_0^t xf(x)dx \qquad (2)$$

함수 $q(t)$의 극한값을 살펴보면

$$\lim_{t\to 0^+} q(t)=-\frac{Kd}{p}<0,\quad \lim_{t\to\infty} q(t)=\infty>0 \qquad (3)$$

가 되어, $q(t)=0$를 만족하는 t 가 적어도 한개는 존재하므로 $C'(t)=0$를 만족하는해 역시 한개 이상 존재함을 알수 있으며, [정리 1]에서 그 해가 유일함을 증명하였다.

[정리 1] (최적 생산시간의 유일성)

$C'(t)=0$ 을 만족하는 최적 생산시간 t^*는 유일하며, 그 때의 비용함수의 값은 아래의 식과 같이 주어진다.

$$C(t^*)=h(p-d)t^*+s\alpha d\int_0^{t^*} f(x)dx \qquad (4)$$

〈증명〉

식 (2)에서 $q(t)=0$가 유일한 해를 가지면 $C'(t)=0$역시 유일한 해를 갖는다. 식 (2)를 미분하면

$$q'(t)=h(p-d)t+s\alpha dtf(t)$$

와 같이 주어지고 모든 시간 $t>0$에 대하여 항상 $q'(t)>0$이므로 $q(t)$는 단조 증가함수이며 식 (3)과 함께 $q(t)=0$를 만족시키는 해 즉, $C'(t)=0$를 만족하는 해 t^*는 유일함을 알 수 있다. 한편, t^*에서의 비용함수 값은 $q(t^*)=0$을 만족하는 다음과 같은 관계식

$$\frac{Kd}{p}=\frac{h}{2}(p-d)t^{*2}+s\alpha d\int_0^{t^*} xf(x)dx \qquad (5)$$

를 식 (1)에 대입하면 [정리 1]의 식 (4)는 쉽게 명시적으로 유도될 수 있다.

[정리 1]에서 $q(t)=0$을 만족하는 최적생산량 t^*는 closed 형태로는 나타낼 수 없으나, Newton Raphson 방법과 같은 수치적 방법으로 간단히 구할수 있다.

[정리 2] 본 모형과 고전 EMQ모형에서의 최적 생산시간 비교

본 모형에서의 최적 생산시간은 기계의 정상 가동시간의 분포 형태와는 관계없이 고전적인 EMQ 모형의 최적 생산시간보다 항상 짧다.

〈증명〉

t_0^*를 고전 모형에서의 최적 생산시간이라고 하면 t_0^*는 다음과 같다.

$$t_0^* = \sqrt{\frac{2Kd}{hp(p-d)}}$$

$q(t)$는 단조 증가함수이고, t_0^*를 식 (2)에 대입한 $q(t_0^*) = s\alpha d\int_0^{t_0^*} xf(x)dx > 0$이 되어 항상 $t^* < t_0^*$가 성립하게 된다. ■

또한, 식 (5)에서 좌변은 t에 관계없이 일정하므로 불량품 생산비용 s와 불량품 생산비율 α가 커짐에 따라 최적 생산시간 t^*는 작아진다는 것을 알 수 있다.

Rosenblatt and Lee[13]는 정상 가동시간이 μ 를 모수로 하는 지수분포를 따를 때, 지수함수를 Maclaurin 급수로 전개하여 대략화한 비용함수에 대한 근사해를 다음과 같은 closed 형태로 나타내었다.

$$t^* = \sqrt{\frac{2Kd}{p[h(p-d)+s\alpha\mu d]}} \tag{6}$$

식 (6)을 보면 t^*는 μ 에 대하여 단조 감소하는 것으로 나타나 있다. 그러나 이 결과는 비용함수를 대략화한 결과 나타난 현상으로. 원래의 비용함수 식 (1)을 분석하면 t^*는 μ에 대하여 항상 단조 감소하지는 않는다. 이의 증명에 앞서 먼저 [정리 3]을 살펴보면,

[정리 3] 서로 다른 두 정상 가동시간 분포와 최적 생산시간과의 관계

서로 다른 정상 가동시간 X, Y의 임의의 확률 밀도함수를 $f(x)$, $g(y)$라 하고 그때의 최적 생산시간을 각각 t_1^*, t_2^*라 할 때, 모든 t에 대하여 $\int_0^t xf(x)dx \geq \int_0^t yg(y)dy$와 같은 추계적 우위(stochastic dominance)관계가 성립하면 $t_1^* \leq t_2^*$이 성립한다.

〈증명〉

정상 가동시간이 $f(x)$, $g(y)$를 따를 때의 식 (2)를 각각 $q(t|x)$와 $q(t|y)$라 정의하면, t_1^*, t_2^*는 각각 $q(t_1^*|x)=0$을 만족한다. $q(t_2^*|y)$를 다시 정리하면

$$q(t_1^*|y) = s\alpha d\left\{\int_0^{t_1^*} yg(y)dy - \int_0^{t_1^*} xf(x)dx\right\}$$

와 같고, t_1^*는 모형의 모수에 따라 $0 < t_1^* < \infty$인 유한하면서도 연속적인 값을 갖는다. 그리고, 식 (2)의 $q(t)$는 단조 증가함수이므로 $q(t_1^*|y) \geq (\leq) 0$이면 $t_1^* \geq (\leq) t_2^*$이다. 따라서, [정리 3]이 성립한다. ■

[정리 3]에서와 같은 추계적 우위관계는 정상 가동시간이 지수분포를 따른다고 가정하여도 명백히 모든 t에 대하여 항상 성립하지 않는다. 그러므로, 지수분포의 모수 μ 가 증가하더라도 최적 생산시간이 항상 단조 감소하는 것은 아니다. $f(x)$가 지수분포의 확률 밀도함수라 할때 $\int_0^t xf(x)dx$항을 Rosenblatt and Lee[13]의 모형에서와 같이 Maclaurin 급수로 대략화하면 $\int_0^t xf(x)dx \simeq \frac{1}{2}\mu t^2$로 strictly convex 함수이면서 추계적 우위관계가 성립하지만, $\int_0^t xf(x)dx$는 $1/\mu$에 수렴하는 pseudo concave 함수로 추계적 우위관계가 성립하지 않는다. 따라서 μ가 증가하면 최적 생산시간이 단조 감소한다는 Rosenblatt and Lee[13]의 결과는 옳지않음을 알 수 있으며 그 예는 3장에서 보여주고 있다.

위의 모형은 기계가 비정상 상태가 되면

불량품 발생비율이 일정하다는 가정하에서 분석한 것이다. 이러한 기본모형을 확장하여 기계가 비정상 상태가 된 후 가동시간이 경과함에 따라 불량품의 발생율이 증가하는 두 가지 경우에 대해서 알아보고자 한다.

<u>선형 퇴화 모형</u>

이 경우는 기계가 비정상 상태가 된 후 경과된 시간을 y라 할 때, 시간 y에서 비율 $\alpha+\beta y, (\beta>0)$ 로 불량품을 생산하는 경우로서, 생산시간동안 발생된 불량품의 갯수 N은 기계가 비정상 상태로 변하는 시점에 따라 다음과 같이 주어지게 된다.

$$N=\begin{cases} 0 & \text{if } X\geq t. \\ \alpha p(t-X)+p\int_0^{t-X}\beta y dy & \text{if } X<t. \end{cases}$$

여기서 $E(N)$과 $C(t)$는 식 (7)과 식 (8)로 표현된다.

$$E(N)=\alpha p\int_0^t (t-x)f(x)dx+$$

$$\frac{1}{2}\beta p\int_0^t (t-x)^2 f(x)dx \tag{7}$$

$$C(t)=\frac{Kd}{pt}+\frac{h}{2}(p-d)t+\frac{sd}{pt}E(N) \tag{8}$$

기본 모형에서와 같이 $q(t)=t^2C'(t)$로 정의하면

$$q(t)=-\frac{Kd}{p}+\frac{h}{2}(p-d)t^2+s\alpha d\int_0^t xf(x)dx$$

$$+\frac{1}{2}s\beta d\int_0^t (t^2-x^2)f(x)dx \tag{9}$$

이 되고, $q(t)$의 극한값은 식 (3)과 같게 되며 $q(t)$의 도함수는

$$q'(t)=h(p-d)t+s\alpha dtf(t)+s\beta dt\int_0^t f(x)dx$$

가 되어 모든 시간 $t>0$에 대하여 $q'(t)>0$이므로 $q(t)$는 증가함수임을 알 수 있다. 따라서 $q(t)=0$를 만족시키는 해 즉, $C'(t)=0$를 만족하는 해 t^*는 유일하며 $C(t^*)$는 식 (10)과 같이 주어진다.

$$C(t^*)=h(p-d)t^*+sd\int_0^{t^*}\{\alpha+\beta(t^*-x)\}f(x)dx \tag{10}$$

<u>지수퇴화 모형</u>

기계가 비정상 가동상태로 변한후 경과된 시간 y에서 불량품 생산비율이 $\alpha+a(1-e^{-by}), a>0, b>0$ 와 같은 지수형으로 증가할때 생산시간동안 발생되는 불량품의 갯수 N 및 $E(N)$은 다음과 같이 주어진다.

$$N=\begin{cases} 0 & \text{if } X\geq t. \\ \alpha p(t-X)+p\int_0^{t-X} a(1-e^{-by})dy & \text{if } X<t. \end{cases}$$

$$E(N)=\alpha p\int_0^t (t-x)f(x)dx+$$

$$\frac{ap}{b}\int_0^t \{b(t-x)+e^{-b(t-x)}-1\}f(x)dx \tag{11}$$

또한 $q(t)$는 식 (12)와 같이 정리된다.

$$q(t)=-\frac{Kd}{p}+\frac{h}{2}(p-d)t^2+s\alpha d\int_0^t xf(x)dx+$$

$$\frac{sad}{b}\int_0^t \{1+bx-(1+bt)e^{-b(t-x)}\}f(x)dx \tag{12}$$

$q(t)$의 극한값은 L'Hospital 법칙을 적용하면 식 (3)과 같음을 알수 있고 $q'(t)$는

$$q'(t)=h(p-d)t+sd\alpha tf(t)$$

$$+sabdt\int_0^t e^{-b(t-x)}f(x)dx > 0$$

이므로 $q(t)=0$를 만족시키는 해 즉, $C'(t)=0$를 만족하는 해 t^*는 유일하며 $C(t^*)$는 아래와 같게 된다.

$$C(t^*)=h(p-d)t^*+sd\int_0^{t^*}[\alpha+a\{1-e^{-b(t^*-x)}\}]f(x)dx \tag{13}$$

식 (4), (10), (13)들을 보면 공히 두 개의 항으로 구성되어 있는 데 첫번째 항은 고전적인 EMQ모형의 최소평균 비용이며, 두번째 항은 불량품생산에 따른 단위 시간당 손실비용을 고려한 항이다. 시간 $(0, t^*)$ 사이에서 기계가 비정상 상태로 변한 후 비정상 상태로 경과된 시간을 y, 시간 y에서 불량품 발생비율을 $K(y)$라 하면, 수요율 d개 가운데 단위 시간당 $d\int_0^t k(y)f(x)dx$개의 불량품이 발생되어 결국 이 만큼의 손실이 부가되었다는 것을 나타낸다.

Rosenblatt and Lee[13]는 선형 또는 지수형의 퇴화 모형을 대략화에 의한 방법으로 비용함수를 구한 결과가 기본모형의 비용함수와 동일하기 때문에, 이들 모형들의 최적 생산시간 역시 동일하므로 선형 또는 지수형의 모수 (β, a, b)에 관계없이 그들 모형이 Robust하다고 주장하였다. 그러나, 위에서 살펴본 바와 같이 본 모형에서 도출된 최적 생산시간에서의 비용함수 값인 식(4), (10), (13)들을 비교하여 보면 세 모형의 결과가 다르리라는 것을 쉽게 유추할 수 있으며 수치실험을 통한 비교 결과가 3장에 주어져 있다.

Rosenblatt and Lee[13]의 근사해를 t^*_{approx}, 기본모형의 최적해를 t^*_{const}, 선형 퇴화모형의 최적해를 t^*_{linear}, 지수 퇴화모형의 최적해를 t^*_{expon}라 두면 다음의 관계가 성립됨을 쉽게 증명할수 있다.

i) $t^*_{const} > t^*_{approx}$

ii) $t^*_{const} > t^*_{linear}$

iii) $t^*_{const} > t^*_{expon}$

기본 모형에서는 기계가 비정상 가동상태가 되면 생산이 종료될 때까지 그 상태로 있다가 다음 생산주기가 시작될 때는 어떠한 수리과정이 없이 정상 가동상태로 다시 생산이 개시된다고 가정하였다. 즉, 한 주기내의 생산 준비비용에 수리비용이 묵시적으로 포함된 것으로 생각할 수는 있으나 이는 t^*까지 기계가 정상적으로 가동할 수도 있음을 고려할때 정확한 모형이라 할 수 없다. 따라서 기본 모형의 이러한 가정을 확장하여 한 생산주기내에서 기계가 비정상 가동상태로 변하게 되면, 다음 생산주기의 시작 시점에서 다시 기계를 정상 가동상태로 환원시키기 위하여 수리를 필요로 하며, 이때 발생되는 수리비용을 M이라 하면 $C(t)$는 식 (14)로 표시된다.

생산 가동시간 중에 기계가 비정상 가동상태로 변할 확률은 $\int_0^t f(x)dx$이므로

$$C(t)=\frac{Kd}{pt}+\frac{h}{2}(p-d)t+\frac{Md}{pt}\int_0^t f(x)dx$$
$$+\frac{s\alpha d}{t}\int_0^t (t-x)f(x)dx \tag{14}$$

이 된다. $q(t)=t^2C'(t)$라 정의하면

$$q(t) = -\frac{Kd}{p} + \frac{h}{2}(p-d)t^2 + \frac{Md}{p}\{tf(t) - \int_0^t f(x)dx\} + s\alpha d\int_0^t xf(x)dx \quad (15)$$

이 되고, $q(t)$의 도함수는

$$q'(t) = h(p-d)t + \frac{Md}{p}tf'(t) + s\alpha dtf(t) \quad (16)$$

와 같다. $q(t)$의 극한값은 식 (3)과 같이 주어지므로 $C'(t)=0$를 만족하는 최적 생산시간 즉, $q(t)=0$를 만족하는 최적 생산시간 t^*는 적어도 한 개 이상 존재함을 알수 있다. 그러나, 식 (16)에서 항상 $q'(t)>0$ 이 성립하는 것은 아니기 때문에 t^*가 유일하게 존재한다고는 할 수 없다. 따라서, $q(t)=0$를 만족하는 해를 찾기 위하여는 탐색에 의한 방법에 의존할 수 밖에 없게 된다.

식 (14)에서 정상 가동시간이 모수가 μ인 지수분포를 따르게 되면 식 (14)는 Lee and Rosenblatt[8]의 모형에서 생산시간 동안의 최적 검사계획이 매 주기마다 생산개시 초기에 한번만 실시하는 모형인 식 (4)와 동일하다. 또한 식 (16)은 식 (17)과 같이 정리된다.

$$q'(t) = h(p-d)t + \left(\frac{s\alpha p}{\mu} - M\right)\frac{\mu^2}{p}dte^{-\mu t} \quad (17)$$

식 (17)에서 $s\alpha p/\mu$는 기계가 평균수명동안 생산하는 제품 가운데 불량으로 인한 손실액이다. 따라서, 이 손실액이 수리비용보다 커야만 다음번 생산주기가 시작될 때까지 수리를 마침으로써 기계를 정상 상태로 환원할 만한 가치가 있게 된다. 그렇지 않을 경우 다음 생산 주기부터는 수리를 하지 않고 계속 비정상 가동상태로 생산하는 것이 경제적인 경우가 되어 본 모형의 의미를 상실하게 된다. 결과적으로 $s\alpha p/\mu - M \geq 0$은 본 모형이 현실적인 의미를 갖기위한 적절한 조건이 되며, 이러한 조건하에서는 모든 t 에 대하여 항상 $q'(t)>0$성립한다. 따라서 최적 생산시간 t^*는 유일하며 그 때의 비용 $C(t^*)$는 다음과 같다.

$$C(t^*) = h(p-d)t^* + \frac{Md}{p}f(t^*) + s\alpha d\int_0^{t^*} f(x)dx \quad (18)$$

또한, 정상 가동시간이 지수분포를 따를 때 식 (15)를 정리하면 식 (19)와 같다.

$$q(t) = -\frac{Kd}{p} + \frac{h(p-d)t^2}{2} + \frac{\mu d}{p}\left(\frac{s\alpha p}{\mu} - M\right) \times \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} - te^{-\mu t}\right) \quad (19)$$

식 (19)에서 $(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} - te^{-\mu t})$는 모든 $t>0$에 대하여 항상 양이므로 수리비용을 고려할 때의 최적 생산시간은 EMQ모형의 최적 생산시간보다 항상 적게 되며, $M=s\alpha p/\mu$일 때는 EMQ모형의 최적 생산시간과 같게 된다. Lee and Rosenblatt[8]는 비용함수를 대략화하여 식 (20)과 같은 근사해를 closed 형태로 구하였다.

$$t^* = \sqrt{\frac{2Kd}{p(p-d)h + d(s\alpha d/\mu - M)\mu^2}} \quad (20)$$

식 (19)에서 $(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} - te^{-\mu t})$을 대략화하면 $\frac{1}{2}\mu t^2$이 되어 원래항이 대략화된 항보다 작으므로 최적해가 근사해보다 항상 크다. $s\alpha p/\mu$와 M의 차이가 작으면 작을수록 즉, 수리비용이 증가할수록 이 차이는 작아지며, 다음장의 수치실험에서 그 예를 보여주고자

한다.

위 모형에서 수리비용이 기계가 비정상 가동상태로 바뀐 후 비정상 가동상태의 경과시간에 비례한다고 가정하면 $C(t)$는

$$C(t)=\frac{Kd}{pt}+\frac{h}{2}(p-d)t+(s\alpha+\frac{M}{p})\times$$

$$\frac{d}{t}\int_0^t(t-x)f(x)dx \tag{21}$$

으로 식 (1)과 유사한 형태가 되어, 최적 생산시간 t^*가 유일함을 쉽게 보일수 있고 t^*에서의 최소비용도 구할 수 있으며 불량품 생산비율이 선형 및 지수 퇴화의 형태를 가질 때에도 쉽게 확장 될 수 있음을 부기한다.

3. 수치실험

본 장에서는 앞에서 제안된 수리모형들에 대하여 수치실험을 통하여 기계의 특성치를 포함한 관련모수와 비용요소들이 최적 생산시간과 최소 비용등에 미치는 영향 및 민감도를 여러 형태로 분석하여 제안된 모형들의 행태를 파악하고, Lee and Rosenblatt[8]와 Rosenblatt and Lee[13]에서 제안된 근사해와 본 논문에서의 최적해와의 비교를 통하여 근사해의 문제점을 제시하고자 한다. 수치실험에서는 근사해와 최적해와의 비교 및 분석을 용이하게 하기 위하여 기계의 정상 가동시간이 모수 μ인 지수분포를 따른다는 가정하에 실험을 수행하였다.

표 1은 p=40, d=30, h=0.1, s=10, α=0.05, β=0.015, a=0.1, b=1일 때 Rosenblatt and Lee [13]의 모형과 본 논문에서 제안된 모형들의 최적 생산시간과 그 때의 최소 단위시간당 비용을 보여주고 있다. 표 1을 살펴보면 기본모형에서는 최적해와 근사해의 차이가 μ 및 K의 값이 커짐에 따라 급격히 증가하며 선형 퇴화모형에서도 최적해와 근사해의 차이가 적지 않음을 볼수 있다. 특히 지수 퇴화모형의 경우에는 모든 μ 및 K의 값에서 최적해와 근사해가 약 30%의 차이를 보여주고 있다. 이러한 실험 결과로부터 Rosenblatt and Lee[13]의 근사해는 본 모형에서의 최적 생산시간으로 이용하기에는 적합치 못함을 알 수 있다. 반면에 단위시간당 최소비용에 있어서는 $C(t^*_{const})$, $C(t^*_{linear})$와 $C(t^*_{approx})$ 사이에는 거의 차이가 없으나 $C(t^*_{expon})$은 $C(t^*_{approx})$와 비교하여 볼때 약 3%의 차이를 보여주고 있다. 이러한 현상에 대하여 Rosenblatt and Lee [13]는 그들의 모형이 Robust하기 때문이라고 주장하고 있으나, 이는 본 모형의 비용함수 형태가 고전적인 EMQ 모형에서 볼 수 있는 바와 같이 비용 최소점 부근에서는 생산시간에 대하여 매우 둔감할 정도로 비용곡선이 완만하기 때문이다. 이와 같이 최적해와 근사해의 생산시간 즉, 로트 크기가 차이가 커지게 되면 단위시간당 비용은 큰 차이가 없을지라도 재고유지에 필요한 저장 공간이나 AS/RS와 같은 저장 설비, 운영 요원에 대한 관리 및 예측 등 투자비와 운영비를 추정하는데 있어서는 큰 영향을 줄 수 있다. 본 실험에서 보는 바와 같이 기본모형의 경우에도 최적해에 의한 로트 크기가 근사해에 의할 때보다 5 - 21% 정도 크기 때문에 근사해에 의한 로트 크기에 기준하여 저장능력을 산정하게 되면 기계의 운영에 있어서 심각한 저장 공간의 부족 현상을 초래할 수도 있게 된다.

표 1. 모형별 최적 생산시간 및 최소비용

μ	K	t^*_{const} / $C(t^*_{const})$	t^*_{linear} / $C(t^*_{linear})$	t^*_{expon} / $C(t^*_{expon})$	t^*_{approx} / $C(t^*_{approx})$	ratio 1	ratio 2	ratio 3
0.1	10	2.57 5.98	2.27 6.39	1.89 7.37	2.45 5.98	4.80 -0.11	-8.02 -0.33	-29.82 -3.95
	20	3.71 8.37	3.13 9.16	2.63 10.69	3.46 8.38	6.71 -0.22	-10.61 -0.58	-31.94 -4.20
	30	4.62 10.17	3.77 11.33	3.21 13.27	4.24 10.20	8.15 -0.32	-12.39 -0.79	-32.31 -4.09
	40	5.40 11.67	4.31 13.18	3.71 15.44	4.90 11.71	9.34 -0.42	-13.78 -0.98	-32.07 -3.88
	50	6.11 12.97	4.77 14.84	4.16 17.34	5.48 13.04	10.36 -0.52	-14.93 -1.15	-31.55 -3.65
0.2	10	2.14 7.37	1.86 7.91	1.50 9.28	1.94 7.40	9.64 -0.45	-3.99 -0.08	-29.14 -3.77
	20	3.17 10.21	2.60 11.27	2.09 13.46	2.74 10.30	13.56 -0.87	-5.26 -0.14	-31.00 -3.91
	30	4.02 12.30	3.16 13.87	2.56 16.68	3.35 12.46	16.50 -1.28	-6.12 -0.19	-30.96 -3.66
	40	4.78 14.01	3.63 16.08	2.97 19.40	3.87 14.24	18.93 -1.68	-6.78 -0.23	-30.22 -3.32
	50	5.48 15.47	4.03 18.04	3.35 21.77	4.33 15.79	21.01 -2.06	-7.33 -0.27	-29.14 -2.96

주: ratio 1 : $\frac{(const)-(approx)}{(const)}\times 100(\%)$

ratio 2 : $\frac{(linear)-(approx)}{(linear)}\times 100(\%)$

ratio 3 : $\frac{(expon)-(approx)}{(expon)}\times 100(\%)$

표 2는 K=30, p=40, d=35, h=0.1, s=1, α= 0.05 일 때 모수 μ 의 변화에 따른 생산시간의 최적해와 근사해의 변화를 살펴본 결과이다. 근사해에서는 [정리 3]과 같은 추계적 우위관계가 항상 성립하기 때문에 μ가 증가함에 따라 최적 생산시간이 단조 감소함을 볼 수 있지만, 본 모형에서는 μ가 증가함에 따라 최적 생산시간이 감소하다가 증가하는 현상을 볼때 Rosenblatt and Lee[13]의 결과에 오류가 있음을 알 수 있다.

표 2. 모수 μ의 변화에 따른 최적 생산시간

μ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
t^*_{const}	9.65	9.39	9.28	9.26	9.28	9.33
t^*_{approx}	9.45	8.82	8.30	7.86	7.48	7.16
ratio	2.03	6.03	10.57	15.09	19.37	23.30

주: ratio : $\frac{(const)-(approx)}{(const)}\times 100(\%)$

표 3은 K=50, p=40, d=30, h=0.1, s=10, α= 0.05, μ=0.1일 때 $(s\alpha p/\mu - M) \geq 0$을 만족하는 범위인 $M \leq 200$에서 수리비용의 변화에 따른 본 모형의 최적해와 Lee and Rosenblatt[8] 모형의 근사해 및 그 때의 최소비용을 나타낸 것이다. 표 3을 보면 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산시간 역시 증가하고 있다.

표 3. 수리비용 M의 변화에 따른 최적 생산시간 및 최소비용

M	0	30	60	90	120	150	200
t^* $C(t^*)$	6.11 12.97	6.38 14.64	6.68 16.29	7.01 17.92	7.39 19.53	7.82 21.10	8.66 23.66
t^*_{approx} $C(t^*_{approx})$	5.48 13.04	5.74 14.70	6.05 16.35	6.41 17.96	6.85 19.56	7.39 21.12	8.66 23.66
ratio	10.36 -0.52	9.99 -0.41	9.44 -0.31	8.61 -0.23	7.39 -0.14	5.55 -0.07	0 0

주 : t^*_{approx} : Lee and Rosenblatt[8]모형의 근사해

기계에 고장이 일어나게 되면 생산이 불가능한 모형에서는 기계의 고장율 함수가 일정할 경우 수리비용에 관계없이 최적 생산시간이 결정되며, 기계의 고장율 함수가 증가함수일 때는 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산시간은 감소하며, 기계의 고장율 함수가 감소함수일 때는 수리비용이 증가함에 따라 최적 생산시간 역시 증가하는 것으로 나타났다 [2]. 그러나 본 모형에서와 같이 기계가 비정상 가동상태가 되더라도 생산을 지속할 수 있는 경우에는 수리비용이 클 경우 수리를 자주 하게 되면 수리비의 부담이 커지게 되므로 수리비 부담을 줄이기 위하여 생산시간을 크게 하는 것이 바람직하다. 한편 수리비용이 커짐에 따라 생산시간의 최적해와 근사해의 차이는 점점 작아짐을 볼 수 있다. 표 1, 표 2, 표 3의 실험 결과로부터 모형의 분석에 있어서 대략화를 통한 근사해를 사용할 경우에는 근사해의 적정성에 대한 충분한 검증이 반드시 필요함을 알 수 있다.

4. 끝맺음말

본 논문에서는 기계가 불완전하여 가동중에 정상 가동상태에서 비정상 가동상태로 변할 수 있으며, 비정상 가동상태로 변하게 되면 일정 비율의 불량품을 생산하는 생산모형에 있어서 최적 생산시간을 결정하는 방안을 제시하였다. 지금까지 기존의 연구 결과[13]에서는 기계의 정상 가동시간이 지수분포를 가질 경우 비용함수를 대략화하여 최적 생산시간의 근사해를 제시하였으나, 본 연구에서는 정상 가동시간이 임의의 일반 분포를 가질때 최적 생산시간 및 최소 비용을 도출하였고, 비정상 가동시간이 경과함에 따라 불량품 생산비율이 선형 및 지수형으로 증가하는 경우와 함께, 기계를 비정상 가동상태에

서 정상 가동상태로 환원하기 위하여 수리비용이 필요하게 되는 경우의 생산 모형들을 분석하여 최적 생산시간 및 최소 비용을 구할수 있게 하였다. 특히 기존의 대표적인 연구인 Rosenblatt and Lee[13]와 Lee and Rosenblatt[8]가 비용함수를 대략화함으로써 발생된 근사해의 오류와 문제점을 발견하였으며, 수치실험을 통하여 그들의 오류를 확인하였다.

앞으로 본 논문의 결과를 기계의 다양한 수명분포, 수리시간 및 품질 불량의 형태등을 포함하여 연속적인 관찰을 통한 기계상태의 변화등을 인지할 수 있는 경우 등과 같이 현실성이 있는 일반적인 모형으로의 확장하기 위한 연구 등이 저자들에 의하여 지속적으로 수행되고 있다.

참 고 문 헌

[1] 김 창현, 홍 유신, 김 수영, "불완전한 생산시스템에서의 경제적인 생산량 결정", 대한산업공학회, 제 20권 2호, pp.3-17, 1994

[2] 김 창현, 홍 유신, 김 수영, "불완전한 기계에서의 경제적 생산량 결정(II)", 대한산업공학회, 제 22권 1호, pp.37-50, 1996

[3] Barlow, R.E., and Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing-Probability Models, Rinehart and Winston, New York, 1975

[4] Groenevelt, H., Pintelon, L., and Seidmann, A., "Production Lot Sizing with Machine Breakdowns", Management Science, Vol. 38, No.1, pp.104-123, Jan. 1992

[5] ————, "Production Batching with Machine Breakdowns and Safety Stocks", Operations Research, Vol.40, No.5, pp. 959-971, 1992

[6] Hax, A.C., and Candea, D., Production and Inventory Management, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1984

[7] Kececioglu, D., Reliability Engineering Handbook, Volume 1, Prentice Hall, New Jersey, 1991

[8] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules In a Production System", Management Science, Vol.33, No.9, pp.1125-1136, Sep. 1987

[9] Lee, H.L., and Rosenblatt, M.J., "A Production and Maintenance Planning Model with Restoration Cost Dependent on Detection Delay", IIE Transactions, Vol.21, No.4, pp.368-375, 1989

[10] Lee, H.L., "Lot Sizing to Reduce Capacity Utilization in A Production Process with Defective Items, Process Corrections, and Rework", Management Science, Vol. 38, No.9, pp.1314-1328, Sep. 1992

[11] Porteus, E.L., "Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction", Operations Research, Vol.34, No.1, pp.137-144, 1986

[12] Rahim, M.A., "Joint Determination of Production Quantity, Inspection Schedule, and Control Chart Design", IIE Transactions, Vol.26, No.6, pp.2-11, 1994

[13] Rosenblatt, M.J., and Lee, H.L., "Econom-

ic Production Cycles with Imperfect Production Processes", IIE Transactions, Vol. 18, No.1, pp.48-55, 1986
[14] Silver, E.A., and Peterson, R., Decision Systems for Inventory Management and Production Planning, Wiley, New York, 1985
[15] Yano, C.A., and Lee, H.L., "Lot Sizing with Random Yields : A Review", Operations Research, Vol. 43, No.2, pp. 311-334, 1995

96년 3월 최초 접수, 96년 5월 최종 수정