Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.22, No.4, December, 1996

정기검사하에서 준비태세의 부품에 대한 최적예방교환

Optimal Preventive Replacement under Periodic Inspections for an Item in Preparedness

공명복* · 원영철*

Myung-Bock Kong* · Young-Cheol Won*

Abstract

This paper concerns with preventive replacement under periodic inspections for an item (system) which is in a state of preparedness. The item is subject to wear. The item fails randomly but the failure rate depends on the accumulated wear. The item is preventively replaced if it survives a certain wear limit at periodic inspections. The failed item is, however, replaced at periodic inspections. Given the costs for replacements and inspections, and the penalty cost of the time elapsed between failure and its detection, the optimal wear limit according to the long-run expected cost per unit time criterion is derived. It has been proved that the optimal wear limit is unique if an item has increasing wear-dependent failure rate. A numerical example for a stationary gamma wear process with Weibull distributed failure is given to show its applicability.

1. 서 론

산업의 발전과 더불어 생산장비가 총체화됨에 따라 개개 장비의 성능유지가 전체 생산장비의 성능유지와 직결하게 되어 장비의 정비에 대한 관심이 고조되었다. 그런데 개개 장비의 고장은 내재된 부품의 고장으로 인해 유발되므로 부품의 예방교환문제는 장비의 신뢰도나 가용도를 최적으로 유지하기 위한 방편으로 많은 연구가 되어 왔다[13, 14].

확률적으로 고장을 일으키는 장비에 대한

* 울산대학교 산업공학과

정비모형은 장비가 계속 사용되므로 내재된 부품의 고장유무를 항상 파악할 수 있는 경우와 부품을 내재한 장비가 평상시에는 사용되지 않고 있으므로 부품의 고장유무를 검사에 의해서만 파악할 수 있는 경우로 나누어진다[9]. 전자의 경우에 대하여 사용중 발생하는 부품의 고장은 장비의 고장을 유발하여 큰 손실을 초래하므로 부품을 적절히 교환하기 위한 정책에 대하여 Barlow et al.[3]을 필두로 많은 연구가 행하여지고 있다. 후자의 경우에는 장비가 비상시만을 위해서 사용되고 비상시가 언제 발생할지 알 수 없으므로 장비가 고장이 없는 준비태세하에 있어야 하고, 만일 부품의 고장으로 인해 비상시에 장비가 사용되지 못한다면 역시 큰 손실을 초래한다. 그러므로 부품의 고장을 발견하여 교환하기 위한 검사정책에 대하여 Savage[12] 이후 많은 연구가 행하여져 오고 있다. 그런데 준비태세하에 있는 장비의 정비에 대한 지금까지의 대부분의 연구는 준비태세하에 있는 장비에 내재된 부품이 시간이 경과함에 따라 고장을 일으킬 때 검사비용, 교환비용, 고장후 검사에 의하여 고장난 상태가 발견될 때까지의 지연시간에 대한 벌과비용을 고려하여 단위시간당 평균비용을 최소화하는 교환을 위한 검사시간 간격을 구하는 것이다.

그러나 준비태세하에서 부품의 고장이 단지 시간의 경과에 따라 발생한다고 하기보다는 점진적으로 진행되는 마모량에 직접적으로 의존해서 어떠한 마모수준에서도 발생한다면, 검사를 통하여 측정된 마모수준에 기초하여 교환하는 것이 효율적이다. 전주의 지선, 케이블 관로, 그리고 미사일 같은 군사장비에 내재된 부품 등이 전형적인 예이다. 이들은 시간의 경과에 따라 마모가 진행되어 단선이나 파손 또는 고장을 일으키나 당장에는 장애가 되지 않지만 방치하면 나중에 중대한 장애를 빚어 커다란 손실을 입게 되므로 마모상태를 때때로 검사하여 예방교환을 해야한다. 마모상태를 이산인 stochastic process로 하여 예방교환을 하는 정책에 대하여 연구가 되어져 왔으며[6, 7, 8], 마모상태가 연속인 경우에 대하여는 Zuckerman[14]이 마모의 진행이 compound Poisson process일 때 마모량에 종속하여 고장을 일으킬 때 정기검사를 통한 교환정책에 대한 연구를 하였다. 또한 A-Hammed[1]는 마모의 진행이 pure jump process로 주어질 때 동일한 정책에 대하여 연구하였다.

본 논문은 장비가 준비태세하에 있을 때 부품이 마모된 양에 종속해서 고장을 일으킬 때 정기검사하에서 부품을 교환하는 것을 다루는데, 여기서 마모란 사용된 시간에 따라 점진적으로 나타나는 균열, 부식, 침식, 피로, 변형 등과 같은 모든 종류의 열화를 총칭하는 것으로 stationary and independent increments process를 따른다. 부품은 정기검사 시에 어떤 마모한계이상 마모되었으나 고장나지 않았으면 예방교환되며, 고장이 발생해도 검사에 의해서만 알 수 있으므로 교환은 정기검사 때에만 행해진다. 사용된 비용은 부품의 교환비용, 검사비용, 고장후 검사에 의하여 고장난 상태가 발견될 때까지의 지연시간에 대한 벌과비용이다. 이 벌과비용은 비상시에 장비를 사용하지 못할 때 큰 손실을 입는 것에 대한 비용이다. 이때 단위시간당 평균비용을 최소화하는 예방교환을 위한 최적마모한계를 도출한다.

2. 기호 및 가정

본 논문에서 사용된 기호는 다음과 같다.

$W(t)$: 시간 $[0, t]$사이에서의 마모량, $W(0)=0$

$G_t(w)$: $W(t)$의 누적분포함수, $w \geq 0$에 대하여 $G_0(w)=1$, $t>0$에 대하여 $G_t(0)=0$

$\overline{G}_t(w)$: $1-G_t(w)$

$g_t(w)$: $W(t)$의 확률밀도함수, $g_0(w)=\delta(w)$

L_1 : 예방교환 될 때까지의 검사횟수

L_2 : 고장으로 인하여 교환될 때까지의 검사횟수

d : 부품의 검사시간 간격

Y_j : 부품의 교환 사이의 시간

$N_1(t)$: 시간 $[0, t]$ 사이에서의 고장으로 인한 부품의 교환횟수

$N_2(t)$: 시간 $[0, t]$ 사이에서의 부품의 예방교환횟수

$N_3(t)$: 시간 $[0, t]$ 사이에서의 검사횟수

$N(t)$: 시간 $[0, t]$ 사이에서의 부품의 교환횟수

I_j : Y_j 에서의 검사횟수

X_j : Y_j 에서의 고장후 교환될 때까지의 시간

D : 시간 $[0, t]$ 사이에서의 고장후 교환될 때까지의 시간

τ : 부품의 고장시간

$W(\tau)$: 부품이 고장나는 순간의 마모량

$H(w)$: $W(\tau)$의 누적분포함수

$\overline{H}(w)$: $1-H(w)$

$h(w)$: $W(\tau)$의 확률밀도함수

$z(w)$: $h(w)/\overline{H}(w)$

Y : 부품이 교환되는 한 사이클

$E[Y]$: 한 사이클의 평균시간

c : 부품의 교환비용

c_f : 고장후 교환될 때까지 단위시간당 부과되는 벌과비용

c_i : 부품의 검사비용

$m(u)$: $\Sigma_{n=0}^{\infty} g_n(u)$

r : 예방교환을 위한 마모한계

$C(r, t)$: 예방교환 행할 때 시간 $[0, t]$ 사이에서의 총비용

$C(r)$: 예방교환 행할 때 단위시간당 평균비용

μ : 검사시간 동안의 평균마모량

또한 사용된 가정은 다음과 같다.

① 부품의 마모과정은 stationary and independent increments process이다. 즉 어떤 시점에서부터 주어진 기간 동안의 마모량은 이 기간의 길이에만 의존하고 또 기간의 시작시점에 관계없이 기간의 길이가 같다면 이 기간동안의 마모량은 동일한 분포로 주어진다.

② 부품의 고장은 마모량에만 직접 종속하여 발생한다. 즉 어떤 시점에서의 부품의 고장률 은 그 시점에 직접 관계없이 마모량의 함수로만 표현된다.

③ 새 부품의 마모량은 0이고 교환은 동일한 부품으로 계속된다.

④ 마모량과 고장은 검사에 의해서만 알 수 있다.

⑤ 부품의 교환 및 검사에 소요되는 시간은 무시한다.

3. 수학적 모형

시간 $[0, t]$ 사이에서 마모량을 $W(t)$라 하자. 단, 확률 1로써 $W(0)=0$이다. 마모과정{ W

(t), $t \geq 0$ }이 stationary and independent increments를 가진다고 가정하면 $W(t)$는 infinitely divisible distribution을 가진다[4]. 이때 $g_t(w)$를 $W(t)$의 확률밀도함수라고 한다. 시간 s에서의 마모량이 구간 $[u, u+du]$ 안에 있었고 그 후 시간 $s+t$에서 마모량이 구간 $[w, w+dw]$ 안에 있는 확률은 모든 $s \geq 0$, $t \geq 0$와 $w \geq u \geq 0$에 대하여,

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w \leq W(s+t) \leq w+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w-u \leq W(s+t)-W(s) \leq w-u+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du \} \Pr\{ w-u \leq W(t) \leq w-u+dw \} \\
&= g_s(u) g_t(w-u) dw du. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

부품의 고장은 마모량에만 직접 종속하여 발생한다고 가정하면, 부품이 고장나는 순간의 마모량 $W(\tau)$의 누적분포함수 즉, 마모량이 w에 도달하기 전에 부품이 고장을 일으킬 확률은 $\Pr\{W(\tau) \leq w\} = H(w)$이다.

시간 s에서 마모량이 구간 $[u, u+du]$ 안에 있으며 고장나지 않았을 때 시간 $s+t$에서 마모량이 구간 $[w, w+dw]$ 안에 있으며 여전히 고장나지 않을 수 있다. 이러한 사상의 확률은 모든 $s \geq 0$, $t \geq 0$와 $w \geq u \geq 0$에 대하여 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w \leq W(s+t) \leq w+dw,\ s+t < \tau \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w \leq W(s+t) \leq w+dw,\ W(s+t) < W(\tau) \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w-u \leq W(s+t) \\
&\quad -W(s) \leq w-u+dw,\ w < W(\tau) \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du \} \Pr\{ w-u \leq W(s+t) \\
&\quad -W(s) \leq w-u+dw \} \Pr\{ w < W(\tau) \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du \} \Pr\{ w-u \leq W(t) \leq w-u+dw \} \Pr\{ w < W(\tau) \} \\
&= g_s(u) g_t(w-u) \overline{H}(w) dw du. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

반면에, 시간 s에 마모량이 구간 $[u, u+du]$ 안에 있었고 시간 s와 시간 $s+t$ 사이에서 마모량이 구간 $[w, w+dw]$ 안에서 고장을 일으킬 확률은 모든 $s \geq 0$, $t \geq 0$와 $w \geq u \geq 0$에 대하여,

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ s \leq \tau \leq s+t,\ w \leq W(\tau) \leq w+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ W(\tau)-W(s) \leq W(s+t)-W(s),\ w \leq W(\tau) \leq w+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du,\ w-u \leq W(s+t)-W(s),\ w \leq W(\tau) \leq w+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du \} \Pr\{ w-u \leq W(s+t)-W(s) \} \Pr\{ w \leq W(\tau) \leq w+dw \} \\
&= \Pr\{ u \leq W(s) \leq u+du \} \Pr\{ w-u \leq W(t) \} \Pr\{ w \leq W(\tau) \leq w+dw \} \\
&= g_s(u) \overline{G}_t(w-u) h(w) dw du, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

여기서 $\overline{G}_t(\cdot) = 1 - G_t(\cdot)$이고 $W(t)$는 nonnegative increments를 가진다고 가정되므로 $G_0(0) = 1$이고, 모든 $t > 0$에 대하여 $G_t(0) = 0$이다.

부품은 그 마모량을 측정하거나 고장여부를 확인하기 위하여 정기적으로 검사되며, 각각의 검사는 c_i의 비용이 들어간다. 또한 부품은 검사시 측정된 마모량이 구간 $[0, r)$에 있고 고장나지 않았다면 계속 사용하며 검사시 측정된 마모량이 구간 $[r, \infty)$에 있고 고장나지 않았다면 비용 c로 예방교환 된다.

그런데 부품은 마모량의 모든 수준에서 고장날 수 있으나 이때 고장은 즉시 탐지되지 않고 검사에 의해서만 탐지된다. 따라서 고장 후 검사될 때까지 단위시간당 부과되는 벌과비용은 c_f이고 고장이 발생한 부품은 고장이 발생한 후 다음 검사시에 교환되는데, 새 부품으로 교환되는데 들어가는 비용은 c이다.

또한 부품은 검사간격 d로 검사된다고 하자. 이때 부품이 예방교환되는 시간을 확률변수 $L_1 d$이라 하고 부품이 고장을 일으켜 다

음 검사시점에서 교환될 때 이 시간을 L_2d라 고 하자. 여기서 확률변수 L_1, L_2는 각각 부품이 예방교환과 고장 후 교환될 때까지의 검사횟수를 의미한다. $Y_j=min(L_1d, L_2d)$로 하면 $\{Y_j, j=1, 2, \cdots\}$은 재생과정을 생성한다. 이때 $N_1(t)$를 시간 t까지의 고장으로 인한 교환횟수라 하고 $N_2(t)$를 시간 t까지의 예방교환횟수라 하자. 재생이론[11]에 의하여 다음과 같다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_1(t)}{t}=\frac{\Pr\{\text{고장교환}\}}{E\,[Y]}, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_2(t)}{t}=\frac{\Pr\{\text{예방교환}\}}{E\,[Y]}. \tag{5}$$

한편 $N_3(t)$를 시간 t까지의 검사횟수라 하고 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$라 하자. 만약 I_j를 재생시간 간격 Y_j동안의 총 검사횟수라 하면 $N_3(t)=\Sigma_{j=1}^{N(t)}I_j+I_{N(t)+1}$이다. 여기서 $I_{N(t)+1}$은 구간 $(S_{N(t)},t)$에서의 총검사횟수이고 $S_{N(t)}$는 시간 t 이전의 마지막 재생시점 이다. 그런데 $t\to\infty$에 대하여 확률 1로써 $(t-S_{N(t)})/t\to 0$이므로 다음과 같이된다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_3(t)}{t}=\frac{\Pr\{Y\text{ 동안의 총검사회수}\}}{E\,[Y]}. \tag{6}$$

또한 확률변수 X_j를 재생간격 Y_j동안의 고장후 다음 검사시점까지의 시간이라고 하면 고장후 다음 검사시점에서 교환될 때까지의 총시간은 $D=\Sigma_{j=1}^{N(t)}X_j$이고,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D}{t}=\frac{E\,[Y\text{ 동안의 고장후 교환시간}]}{E\,[Y]}. \tag{7}$$

한편 시간 t까지의 마모한계에 의한 교환이 수행될 때 총비용은 $C(r, t)=cN_1(t)+cN_2(t)+c_iN_3(t)+c_fD$ 이므로 단위시간당 평균비용은 (4)-(7)에 의하여 다음과 같다.

$$C(r)=\lim_{t\to\infty}\frac{C(r,t)}{t}$$

$$=\frac{c+c_f E\,[Y\text{ 동안의 고장후 교환시간}]}{E\,[Y]}$$

$$+\frac{c_i E\,[Y\text{ 동안의 총검사회수}]}{E\,[Y]}, \tag{8}$$

여기서 Y는 한 사이클 시간을 나타내며 최적교환 정책은 (8)을 최소화하는 r^* 를 구하는 것이다.

시간의 경과를 검사시간 간격으로 해도 일반성을 잃지 않고 성립하므로 검사시간 간격을 시간의 단위로 사용하면 부품은 시간 $t=1, 2, \cdots$ 에 검사된다. 단, 시간 0은 새 부품이 장비에 설치되는 시점이다. 따라서, 한 사이클 동안 고장난 부품이 다음 검사시점에 고장이 발견될 때까지의 평균시간은 (3)에 의하여 다음과 같다.

E $[Y$ 동안의 고장후 교환시간$]$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r\int_u^{\infty}g_n(u)\overline{G}_t(w-u)h(w)dwdu\right)dt$$

$$=\int_0^r m(u)\overline{H}(u)du-\mu^{-1}\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu. \tag{9}$$

(9)에서 $m(u)=\Sigma_{n=0}^{\infty}g_n(u)$ 이고, $g_0(u)=\delta(u)$은 Dirac delta 함수이다.

부품은 예방교환되든지 고장이 발생한 후 다음까지 검사가 계속된다. 따라서 한 사이클 동안 평균검사횟수는 (2)와 (3)으로부터

E [Y 동안의 총검사회수]

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[\int_{0^-}^{r}\int_{r}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu\right.$$

$$\left.+\int_{0^-}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)\overline{G}_1(w-u)h(w)dwdu\right]$$

$$=\int_{0^-}^{r}m(w)\overline{H}(w)dw. \qquad (10)$$

(10)은 각각의 검사에서 계속 사용하기로 한 부품이 다음 검사시간까지 고장나지 않거나 그 전에 고장날 확률들의 총합이다.

한 사이클은 예방교환 되든지 고장이 발생한 후 다음 검사시점에서 교환됨으로서 끝나는데, 시간의 단위를 검사시간 간격으로 했으므로 한 사이클의 평균시간 E $[Y]$는 Y 동안의 총검사횟수 (10)과 같다. 따라서

$$E\ [Y]=\int_{0^-}^{r}m(u)\overline{H}(u)du. \qquad (11)$$

한편 (9), (10)에 대한 상세한 유도과정은 부록에 있다. 단위시간당 평균비용은 (9), (10), (11)로 부터 다음과 같다.

$$C(r)=\frac{c-c_f\,\mu^{-1}\int_{0^-}^{r}\int_{u}^{\infty}m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu}{\int_{0^-}^{r}m(u)\overline{H}(u)du}+c_f+c_i\,, \qquad (12)$$

여기서 시간의 단위는 검사시간 간격이며,

$$C(0)=c-c_f\,\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}\overline{G}_1(w)\overline{H}(w)dw+c_f+c_i\,. \qquad (13)$$

(13)은 부품의 고장유무에 관계없이 무조건 첫번 검사시점에서 교환될 때의 단위시간당 평균비용이다.

또한, (12)에서 $r\rightarrow\infty$일 때는 분수로 주어진 부분의 분자는 다음과 같다.

$$c-c_f\mu^{-1}\int_{0^-}^{\infty}\int_{u}^{\infty}m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\int_{0^-}^{\infty}\int_{u}^{\infty}m(u)[1-G_1(w-u)]\overline{H}(w)dwdu$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\int_{0^-}^{\infty}\int_{u}^{\infty}m(u)\overline{H}(w)dwdu$$

$$+c_f\mu^{-1}\int_{0^-}^{\infty}\int_{u}^{\infty}m(u)G_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}\int_{0^-}^{w}m(u)\overline{H}(w)dudw$$

$$+c_f\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}\int_{0^-}^{w}m(u)G_1(w-u)\overline{H}(w)dudw$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0^-}^{w}g_n(u)\overline{H}(w)dudw$$

$$+c_f\mu^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0^-}^{w}g_n(u)G_1(w-u)\overline{H}(w)dudw$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}G_n(w)\overline{H}(w)dw$$

$$+c_f\mu^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}G_{n+1}(w)\overline{H}(w)dw$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}G_0(w)\overline{H}(w)dw$$

$$=c-c_f\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}\overline{H}(w)dw. \qquad (14)$$

따라서 (12)에서 $r\rightarrow\infty$일 때는 다음과 같다.

$$C(\infty)=\frac{c-c_f\mu^{-1}\int_{0}^{\infty}\overline{H}(w)dw}{\int_{0^-}^{\infty}m(u)\overline{H}(u)du}+c_f+c_i\,. \qquad (15)$$

(15)는 부품에 대한 검사는 계속하지만 예방교환되는 것은 없이 고장난 후 다음 검사시점에서 교환될 때의 단위시간당 평균비용을 뜻하며, 검사는 의미가 없고 비용만이 부

과될 뿐이다.

4. 예방교환을 위한 최적마모한계

$H(w)$가 증가고장률을 가지면 (12)가 유일한 최적을 갖는다는 것을 보일 것이다. 여기서 $H(w)$가 증가고장률을 가진다는 것은 $z(w)=h(w)/\overline{H}(w)$이 w에 대하여 증가함수임을 뜻하고[3] 이것은 부품의 마모가 증가할수록 고장률이 증가함을 의미한다. 이때 $z(w)$는 마모종속 고장률이다.

한편 (12)는 r에 관계없는 c_f, c_i를 제외한 나머지 부분을 최소화해도 되므로 이를 $\widetilde{C}(r)$이라 하면,

$$\widetilde{C}(r) = \frac{c-c_f\mu^{-1}\int_0^r\int_u^\infty m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu}{\int_0^r m(u)\overline{H}(u)du}. \tag{16}$$

$\widetilde{C}(r)$을 r에 대하여 미분하면 $0\le r<\infty$에 대하여

$$\widetilde{C}'(r) = \Big[\Big(-c_f m(r)\mu^{-1}\int_r^\infty \overline{G}_1(w-r)\overline{H}(w)dw\Big)E[Y]$$

$$-\Big(c-c_f\mu^{-1}\int_0^r\int_u^\infty m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu\Big)$$

$$m(r)\overline{H}(r)\Big]/E[Y]^2. \tag{17}$$

$\widetilde{C}'(r)$을 $m(r)\overline{H}(r)/E[Y]^2\neq 0$이기 때문에 이것으로 나누면 최적 마모한계 $r^*(0\le r^*<\infty)$는 다음의 방정식의 해이다.

$$\hat{C}(r) \equiv \Big[\Big(-c_f\mu^{-1}\int_r^\infty \overline{G}_1(w-r)\frac{\overline{H}(w)}{\overline{H}(r)}dw\Big)E[Y]$$

$$-\Big(c-c_f\mu^{-1}\int_0^r\int_u^\infty m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu\Big)\Big]=0. \tag{18}$$

(18)이 $[0, \infty)$에서 유일한 해를 갖는 다는 것을 보이기 위하여 $\hat{C}(r)$을 다시 미분하면 다음과 같이된다.

$$\hat{C}'(r) = E[Y]\,c_f\mu^{-1}$$

$$\Big[\int_r^\infty \overline{G}_1(w-r)\frac{\overline{H}(w)}{\overline{H}(r)}[z(w)-z(r)]dw\Big]>0. \tag{19}$$

(19)는 $z(\cdot)$가 증가고장률을 가지면 항상 성립한다. 따라서 $\hat{C}(r)$은 $0\le r<\infty$에서 r에 대하여 단조증가함수 이다. 더욱이 (18)에서,

$$\lim_{r\to 0}\hat{C}(r) = -c_f\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{G}_1(w)\overline{H}(w)dw$$

$$-[c-c_f\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{G}_1(w)\overline{H}(w)dw]$$

$$= -c<0, \tag{20}$$

이것은 $c=0$이 아니면 $r=0$이 최적이 아님을 의미한다.

또한 (18)에서,

$$\lim_{r\to\infty}\hat{C}(r) = -c+c_f\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{H}(w)dw. \tag{21}$$

그러므로 (18)의 유일한 유한한 해가 항상 존재하기 위해서는 (21)에서 $c_f\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{H}(w)dw>c$이어야 하며, $c_f\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{H}(w)dw\le c$라면 유한한 해가 존재하지 않는다. 그러나 (18)이 항상 nonnegative로 되어 (16)이 감소함수가 되어 $r^*=\infty$가 유일한 해가 된다. 또한 (17)에서 $\lim_{r\to\infty}\widetilde{C}'(r)=0$이기 때문에 (16)은 convex가 아니지만 unimodal함을 알 수 있다. 따라서 (12)

의 단위시간당 평균비용함수 $C(r)$에 대하여 $c_f\,\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{H}(w)dw > c$이면 유한한 유일한 해가 존재하고 $c_f\,\mu^{-1}\int_0^\infty \overline{H}(w)dw \le c$이라면 $r^* = \infty$가 유일한 해가 된다. 그리고 (12)의 단위시간당 평균비용함수 $C(r)$이 convex가 아니지만 unimodal함을 알 수 있다.

5. 수치예제

stationary gamma wear process는 stationary and independent increments process로서 연속인 시간 y에 대하여 확률밀도함수가 $g_y(w) = \lambda(\lambda w)^{\alpha y-1} exp(-\lambda w)/\Gamma(\alpha y)$이다. 어떤 부품의 년간 마모량이 척도모수 $\lambda=2.5/mm$ 이고 형태모수 $\alpha y=4.8$인 감마분포를 따른다고 하고 마모량에 대한 검사는 6개월마다 한다고 하면, 6개월이라는 단위시간에 대하여 마모량에 대한 분포들은 $g_t(w) = \lambda(\lambda w)^{2.4t-1} exp(-\lambda w)/\Gamma(2.4t)$로 표현된다. 검사시점 사이의 평균마모량은 $\mu=0.96mm$ 이다. 부품이 와이블분포 $h(w) = (\beta w^{\beta-1}/\theta^{\beta})\, exp[-(w/\theta)^{\beta}]$에 따라서 고장을 일으킨다고 하자. 단, 척도모수 $\theta=3mm$이고 형태모수 $\beta=10$ 이다. 이때 이 분포는 증가고장률을 가짐을 알 수 있다. 관련되는 비용은 $c=1$, $c_f = 1/1$개월, $c_i = 0.1$ 이다.

주어진 고장분포함수 $H(w)$와 6개월마다의 검사에 대하여 최적 마모한계 r^*는 (18)로 부터 수치적으로 계산될 수 있다. 그러나 여러 가지 r에 대하여 (12)를 사용하는 것이 쉬우므로 (12)를 사용할 것이다.

단위시간당 평균비용을 계산하기 위해 IBM-PC FORTRAN으로 작성하였다. 프로그램을 실행시켜 6개월 동안의 비용을 구하고 이를 년간비용으로 환산하여 나타낸 것이 그림 1에 있다. 6개월마다의 검사에 대하여 예방교환을 위한 최적마모한계는 $r^* = 1.32mm$이고 $C(r^* = 1.32) = 0.7481/6$ 개월 $= 1.4962/1$ 년 이다. 이미 언급된 바와 같이 단위시간당 평균비용함수는 unimodal함을 알 수 있다.

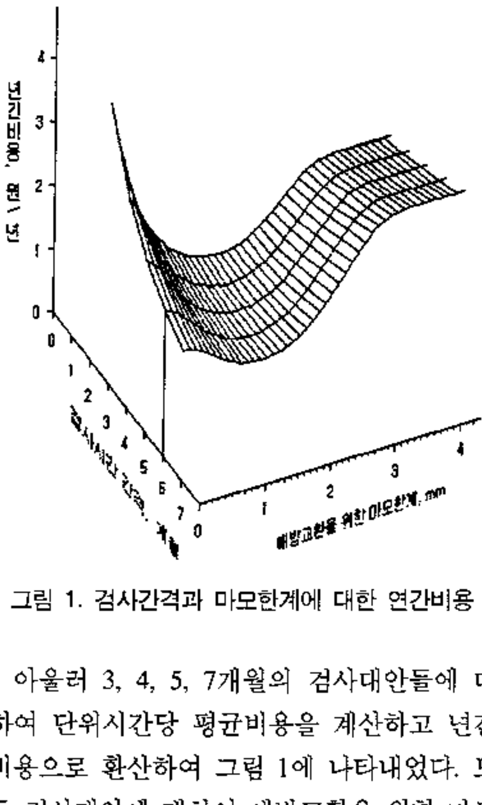

그림 1. 검사간격과 마모한계에 대한 연간비용

아울러 3, 4, 5, 7개월의 검사대안들에 대하여 단위시간당 평균비용을 계산하고 년간비용으로 환산하여 그림 1에 나타내었다. 모든 검사대안에 대하여 예방교환을 위한 마모한계가 $3mm$ 이후에는 년간비용이 거의 변함이 없다. 또한 그림 1을 보면 최적마모수준은 검사간격이 증가할수록 예방교환을 위한 최적마모한계 r^*가 감소함을 볼 수 있는데 이것은 증가된 검사간격동안 마모된 양도 증가하기 때문이다. 3개월부터 7개월까지 주어진 5개의 검사대안에 대하여 예방교환을 위한 최적마모한계(mm)와 년간비용(원/년)들은 각각 (1.96, 1.5412), (1.56, 1.4905), (1.44, 1.4824),

(1.32, 1.4962), (1.21, 1.5233)으로 5개월마다 검사하는 대안이 최적의 검사계획 임을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 부품이 점진적으로 진행하는 마모에 종속하여 고장을 일으키고, 마모량 뿐만 아니라 고장까지도 검사에 의해서만 알 수 있는 경우에 정기적으로 검사하여 예방교환하는 정책에 대하여 살펴보았다. 이때 주어진 검사비용, 교환비용, 고장후 교환될 때까지 단위시간당 부과되는 벌과비용을 고려하여 단위시간당 평균비용을 최소화하는 예방교환을 위한 마모한계를 구하였는데, 부품의 마모는 시간에 따라 stationary and independent increments process이고 마모에 따른 고장분포는 임의의 분포로 주어진다. 이때 예방교환을 위한 최적마모한계는 증가하는 마모종속고장률을 가지는 부품의 경우에 유일하게 결정된다.

제안된 모형은 검사시간 간격이 주어진 것으로 하였기 때문에 이에 대한 최적조건은 본 논문에서 고려되지 않았다. 그렇지만 수치예제에서 주어진 것 처럼 여러 가지 검사대안에 대하여 단위시간당 평균비용을 비교한다면 주어진 검사대안에 대하여 최적의 대안을 선택하는 것이 가능하다.

참 고 문 헌

[1] A-Hameed, M. "Inspection and Maintenance Polices of Devices subject to Deterioration", Adv. Appl. Prob., Vol.19, pp. 917-931, 1987.

[2] Barlow, R. E. and Proschan, F. Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, p.23, 1965.

[3] Barlow, R. E. and Hunter, L. C. "Optimal Preventive Matainence Policies", Oper. Res., Vol.8, No.1, pp.90-100, 1960.

[4] De Finetti, B. Theory of Probability, Vol. 2, John Wiley & Sons, p.72, 1975.

[5] Derman, C. and Sacks, J. "Replacement of Periodically Inspected Equipment", Nav. Res. Log. Q., Vol.7, pp.597-607, 1960.

[6] Feng, W., Adachi, K. and Kowada, M. "An Optimal State-Age Dependent Replacement for a Network System", Euro. J. Oper. Res., Vol.75, pp.634-646, 1994.

[7] Kao, E. P. "Optimum Replacement Rules when Changes of State are Semi-Markovian", Oper. Res., Vol.21, pp.1231-1249, 1973.

[8] Luss, H. "Maintenance Polices when Deterioration can be observed by Inspections", Oper. Res., Vol.24, pp.359-366, 1976.

[9] McCall, J. J. "Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey", Mgmt. Sci., Vol.11, pp.493-524, 1965.

[10] Prabhu, N. U. Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, New York Inc., p.69, 1980.

[11] Ross, S. M. Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, California, 1970.

[12] Savage, I. R. "Cycling", Nav. Res. Log.

Q., Vol.3, No.3, pp.163-175, 1956.
[13] Sherif, Y. S. and Smith, M. L. "Optimal Maintenance Models for Systems subject to Failure-A Review", Nav. Res. Log. Q., Vol.28, pp.47-74, 1981.
[14] Valdez-Flores, C. and Feldman, R. M. "A Survey of Preventive Maintenance Models for Stochastically Deteriorating Single-Unit System", Nav. Res. Log., Vol.36, No.4, pp.419-446, 1989.
[15] Zuckerman, D. "Inspection and Replacement Polices", J. Appl. Prob., Vol.17, pp. 168-177, 1980.

96년 3월 최초 접수, 96년 8월 최종 수정

부 록

식 (9)의 유도과정 :

E [Y 동안의 고장후 교환시간]

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(1-t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r\int_u^{\infty}g_n(u)\overline{G}_t(w-u)h(w)dwdu\right]dt$$

$$=\int_0^1(1-t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)\overline{G}_t(w-u)h(w)dwdu\right]dt$$

부분적분에 의하여

$$=-\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)\overline{G}_0(w-u)h(w)dwdu+\int_0^1\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)\overline{G}_t(w-u)h(w)dwdudt$$

$\overline{G}_0(\cdot)=0$이므로

$$=\int_0^1\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)\overline{G}_t(w-u)h(w)dwdudt$$

부분적분에 의해서

$$=\int_0^1\int_{0^-}^r m(u)\left[-\overline{G}_t(0)H(u)+\int_u^{\infty}g_t(w-u)H(w)dw\right]dudt$$

$$=\int_0^1\int_{0^-}^r m(u)\overline{G}_t(0)\overline{H}(u)dudt-\int_0^1\int_0^r\int_u^{\infty}m(u)g_t(w-u)\overline{H}(w)dwdudt$$

$t>0$에 대하여 $\overline{G}_t(0)=1$이므로

$$=\int_{0^-}^{r} m(u)\overline{H}(u)du-\int_{0}^{1}\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty} m(u)g_t(w-u)\overline{H}(w)dwdudt. \tag{A.1}$$

더욱이 $T(w)$를 마모량이 w가 되는데 소요되는 시간이라고 하면 $\{T(w),\ w\geq 0\}$는 마모량에 대한 시간의 stochastic process가 된다. 이 과정은 stationary and independent increments process가 아니다. 그러나 $\{W(t),\ t\geq 0\}$이 stationary and independent increments process 이므로 E $[W(t)]=\mu t$ 에 대하여 E $[T(w)]=\mu^{-1} w$ 이다[10]. 이때 μ는 검사시점 사이에서 평균마모량이다. $T(w)$의 누적분포함수를 $F_w(t)$로 하면 $T(w)\rangle t$이면 $W(t)\langle w$이므로 $\overline{F}_w(t)=G_t(w)$이 성립한다. 따라서 마모량이 w에 도달하는데 걸리는 평균시간 $E[T(w)]$은

$$\mu^{-1}w = \int_0^{\infty} G_t(w)dt = \int_0^1 G_t(w)dt + \int_1^{\infty} G_t(w)dt$$

$g_t(\cdot)$이 infinite divisibility를 가지므로

$$= \int_0^1 G_t(w)dt + \int_0^{\infty}\int_0^{w} G_t(w-u)g_1(u)dudt$$

$$= \int_0^1 G_t(w)dt + \int_0^{w}\int_0^{\infty} G_t(w-u)g_1(u)dtdu$$

$$= \int_0^1 G_t(w)dt + \mu^{-1}\int_0^{w}(w-u)g_1(u)du. \tag{A.2}$$

(A.2)의 양변을 w에 대하여 미분하면, $w\rangle 0$에 대하여 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\int_0^1 g_t(w)dt = \mu^{-1}\overline{G}_1(w). \tag{A.3}$$

따라서 (A.1)에 (A.3)를 사용하면 한 사이클 동안의 고장후 교환시간의 평균길이는 다음과 같다.

E [Y 동안의 고장후 교환시간]

$$=\int_{0^-}^{r} m(u)\overline{H}(u)du-\mu^{-1}\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty} m(u)\overline{G}_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu. \tag{A.4}$$

식 (10)의 유도과정 :

E [Y 동안의 총검사회수]

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[\int_{0}^{r}\int_{r}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu+\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)\overline{G}_1(w-u)h(w)dwdu\right]. \tag{A.5}$$

(A.5)에서 첫 번째 적분은 다음과 같이 된다.

$$\int_{0}^{r}\int_{r}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu$$

$$=\left[\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu-\int_{0}^{r}\int_{u}^{r}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu\right]$$

$$=\left[\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu-\int_{0}^{r}\int_{0^-}^{w}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dudw\right]$$

$g(\cdot)$의 infinite divisibility에 의하여

$$=\left[\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dwdu-\int_{0^-}^{r}g_{n+1}(w)\overline{H}(w)dw\right]. \tag{A.6}$$

한편 (A.5)의 두 번째 적분은 다음과 같다.

$$\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)\overline{G}_1(w-u)h(w)dwdu$$

부분적분과 $\overline{G}_1(0)=1$이므로

$$=\int_{0^-}^{r}g_n(u)\left[-H(u)+\int_{u}^{\infty}g_1(w-u)H(w)dw\right]du$$

$$=\int_{0^-}^{r}g_n(u)\left[\overline{H}(u)-\int_{u}^{\infty}g_1(w-u)\overline{H}(w)dw\right]du$$

$$=\left[\int_{0^-}^{r}g_n(u)\overline{H}(u)du-\int_{0}^{r}\int_{u}^{\infty}g_n(u)g_1(w-u)\overline{H}(w)dudw\right]. \tag{A.7}$$

(A.6)과 (A.7)을 더하고 summation 계산을 하면 다음과 같이 된다.

$$\text{E [}Y\text{ 동안의 총검사회수]}=\int_{0^-}^{r}m(w)\overline{H}(w)dw. \tag{A.8}$$