

# 이산형 다기준 시뮬레이션 최적화를 위한 대화형 방법\*

## An Interactive Method for Multicriteria Simulation Optimization with Integer Variables

신완선\*\* · 김재용\*\*\*

Wan S. Shin\*\* · Jae-Yong Kim\*\*\*

### Abstract

An interactive multicriteria method, which is called the Modified Pairwise Comparison Stochastic Cutting Plane (MPCSCP) method, is proposed for determining the best levels of the integer decision variables needed to optimize a stochastic computer simulation with multiple response functions. MPCSCP combines good features from interactive tradeoff cutting plane methods and response surface methodologies. The proposed method uses a simple pairwise man-machine interaction and searches an integer space uniformly by using the experimental design which evaluates the decision space centering around an integer center point. The characteristics of the proposed method are investigated through an extensive computational study. The parameter configurations examined in the study are (1) variability of the sampling errors, (2) the size of experimental design, (3) the relaxation of cutting planes, and (4) the levels of decision maker's inconsistency.

### 1. 서론

컴퓨터 기술이 발달되어감에 따라서 문제 해결에 가급적 복잡한 수리모형을 피하고 컴

퓨터를 이용하는 경향이 늘고 있다. 특히 그 중에서도 문제가 확률적인 불확실성을 가지고 있는 경우에는 컴퓨터를 이용한 시뮬레이션이 많이 이용되고 있다. 시뮬레이션은 짧

\* 본 논문은 과학재단 '93 핵심전문연구 (931-1000-019-2)에 의해서 지원받았음.

\*\* 성균관대학교 산업공학과

\*\*\* 주식회사 공관

은 시간에 적은 비용으로 모델을 실험할 수 있어서, 최근 애니메이션 능력과 더불어 더욱 훌륭한 의사결정 기법으로 주목받고 있다. 그동안 시뮬레이션 분야에서 취약점 중의 하나인 시뮬레이션 최적화에 대한 연구 필요성이 강조되어 왔지만[2, 12], 기존 해법들은 최적해를 찾는 데 있어서 아직 효과적이지 못하다. 기존의 연구들은 주로 단일 목적식만을 다루었고[3, 5, 14], 다기준을 다루는 기법들은 주로 탐색에 근거를 두고 있어서 의사결정 공간을 충분히 고려할 수 없다[7, 10].

본 연구의 목적은 이러한 문제점을 개선하기 위하여 Boyle과 Shin[1]이 제시한 PCSCP (Paired Comparison Stochastic Cutting Plane) 방법을 이산공간 문제에 확장시켜서 MPCSCP (Modified Paired Comparison Stochastic Cutting Plane) 방법을 개발하고 그 수행도를 평가하는 것이다. 본 논문에서는 MPCSCP 방법의 구성과 개념을 소개하고 수치예를 이용하여 설명한다. 또한, 제시된 방법의 수행도를 평가하기 위해서 수치실험을 통해서 여러 가지 입력 변수들이 MPCSCP의 수행도에 어떻게 영향을 미치는가를 비교 및 분석한다. 여기에서 고려된 입력변수들은 (1) 시뮬레이션의 표본오차 크기, (2) 실험구간의 크기, (3) 절단면의 여유율 크기, 그리고 (4) 의사결정자의 일관성 결여이다.

## 2. 이산형 다기준 시뮬레이션 최적화

컴퓨터 시뮬레이션이란 실제의 상황을 나타낼 수 있는 수리적·논리적 모델을 설정하고 이 모델을 컴퓨터를 통해서 실험하는 것이다. 시뮬레이션 실험에서는 반응함수를 명

확히 알 수 없기 때문에, 결정변수들이 모델에 미치는 형태는 시뮬레이션 실험의 결과인 반응변수들의 값을 통해서 판단할 수 밖에 없다. 이러한 시뮬레이션 실험을 하는 과정에서 반응변수들은 랜덤한 표본오차에 의하여 영향을 받는다. 따라서, 반응값은 실제반응치에 표본오차가 더해진 것으로 볼 수 있다.

$$y = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))' + \underline{\varepsilon}$$

여기서  $\underline{x}$ 는  $n$ -차원의 의사결정변수 벡터,  
 $y$ 는  $k$ -차원의 관측된 반응 벡터,  
 $f_j(x)$ 는  $\underline{x}$ 의 반응함수,  $j = 1, \dots, k$ ,  
 $\underline{\varepsilon}$ 는  $k$ -차원의 랜덤 표본오차 벡터.

이 때, 모든 결정변수가 의사결정자의 관심의 대상이 되는 것은 아니므로, 가능영역  $X$ 는  $m$ 개의 제약조건에 의해서 구성된다고 볼 수 있다. 즉,

$$\underline{x} \in X = \{ \underline{x} | \underline{x} \in I^n, g_i(\underline{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m \}$$

이며  $g_i(\underline{x})$ 는  $\underline{x}$ 에 대한  $i$ 번째의 제약식이다.

시뮬레이션에서는 표본오차의 분포적 특성들을 알 수 없기 때문에 다변량 일반선형모델(Multivariate general linear model)을 따른다고 가정하는 것이 일반적이다[3, 10]:  $y = Bz + \underline{\varepsilon}$ . 여기서,  $z$ 는  $\underline{x}$ 의 요소로 이루어진 2차원 다항함수의  $p$ -차원의 벡터 (예를 들어서,  $\underline{x}' = (x_1, x_2)$ 이면  $z = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ )이다. 그리고,  $B$ 는  $k \times p$ 차원의 계수행렬이다. 표본오차 벡터는 통계적으로 상호독립이고, 각각 평균이 0이며, 분산-공분산 행렬  $\Sigma$ 를 갖는다. 표본의 크기가 충분히 큰 경우, 표본의 평균은 중심극한정리에 따라서 다변량 정규분포에 근접하므로 가설검정과 신뢰구간을 계산하기 위하여 각각의 표본오차 벡

터가 다변량 정규분포를 따른다고 가정한다. 따라서, 반응치  $y_j \sim N(Bz_j, \Sigma)$ 가 되며  $B$ 와  $\Sigma$ 의 추정치는 각각 다음과 같다.

$$\hat{B} = \sum_{j=1}^n y_j z_j' [\sum_{j=1}^n z_j z_j']^{-1},$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - Bz_j)(y_j - Bz_j)'$$

이러한 시뮬레이션 문제를 최적화 관점에서 정리하면 아래에 주어진 것과 같은 다기준 최적화 문제로 규정할 수 있다. 이 경우, 최적화의 대상인 시뮬레이션 모델은 초기조건 선정 및 타당성 검토 등 올바른 시뮬레이션 분석을 수행하기 위한 사전 준비가 완료된 것이어야 함은 물론이다.

$$MAX \quad U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

Subject to

$$x \in X = \{x | x \in I^n, g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

$$x_L \leq x \leq x_U.$$

위 모델에서  $x_L$ 과  $x_U$ 는 각각  $x$ 의 하한값과 상한값이며 제약식  $g_i(x)$ , ( $i=1, \dots, m$ )는 선형 함수라고 가정한다. 목적함수  $f(x)$ 는 반응벡터  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))'$ 를 의미하며 시뮬레이션 최적화에서는  $f(x)$ 를 알 수 없으므로 실제의 반응치와 이에 대한 표본오차로  $\hat{f}(x)$ 를 나타낸다.  $U$ 는 모르는 의사결정자의 선호함수로서 연속적으로 미분 가능하고 반응함수가 증가함에 따라서 증가하는 볼록함수이다. 이러한 의사결정자의 선호함수는 위험회피 경향을 가지며 가능한 한 큰 반응값을 선호한다는 것을 말한다.

다기준 최적화에서는 하나의 해가 모든 목

적식의 최적해가 될 수 없는 경우가 대부분 이어서 유효해와 최적절충해 개념을 이용해서 해를 정의한다.

정의: <유효해>

만약 어떤  $x^e \in X$ 가 모든  $k$ 에 대해서  $f_k(x) \geq f_k(x^e)$ 이고 적어도 하나 이상의  $j$ 에 대해서  $f_j(x) > f_j(x^e)$ 인  $x \in X$ 가 존재하지 않는 경우,  $x^e$ 를 유효해라고 한다.

정의: <최적절충해>

반응벡터  $(f_1(x^*), f_2(x^*), \dots, f_k(x^*))'$ 가 의사결정자의 선호함수  $U$ 를 극대화시킬 때, 결정변수 벡터  $x^* \in X$ 를 최적절충해라고 한다.

이러한 정의하에서의 다기준 최적화의 궁극적인 목적은 의사결정자의 선호함수를 극대화시키는 최적절충해를 구하는 것이다. 따라서, 다기준 최적화 기법의 핵심은 해법 과정에서 의사결정자의 선호구조를 파악하는 방법으로 귀착된다. 다기준 의사결정기법들은 의사결정자의 선호정보를 얻는 시점에 따라서 크게 prior 방법, posterior 방법, 그리고 progressive 방법으로 분류할 수 있다[13]. 본 연구에서 개발한 MPCSCP는 이 3가지 분류 중에서 컴퓨터와 의사결정자간의 대화를 통해서 선호정보를 도출하는 progressive 방법이며, 이것을 흔히 '대화형 방법'이라고 부른다. 의사결정자는 컴퓨터와의 대화를 통해서 해법 과정에 직접 참여하기 때문에 결과의 실질적인 응용 가능성이 크고 해에 대한 신뢰가 높다는 것이 이 방법의 장점이다. 반면에, 상충되는 대안들에 대하여 의사결정자에게서 항상 일관된 응답을 기대할 수 없다는

관점이 있다. 이를 해결하기 위하여, 본 연구는 유효해를 두개씩 차례로 의사결정자에게 제시하는 쌍대비교 형태의 대화방법을 이용한다. Shin과 Ravindran[13]에 의하면, 이러한 대화방법이 의사결정자에게 부담이 가장 적은 대화법으로 알려져 있다.

### 3. MPCSCP의 알고리즘

MPCSCP도 PCSCP와 마찬가지로 반응표면법과 대화형 다목적식 최적화 방법의 장점을 이용하여 최적질층해를 찾는다. 이 방법의 첫 번째 아이디어는 실험계획을 통해서 가능영역을 폭 넓게 평가하고 반응표면법을 시뮬레이션 결과에 적용하여 반응함수를 추정한다는 것이다. 실험계획을 이용하는 이유는 결정변수의 값을 효과적으로 선택함으로써, 실험횟수를 줄이면서도 많은 통계적 정보를 얻을 수 있기 때문이다. MPCSCP의 두 번째 아이디어는 다목적식 최적화 방법을 적용하여 의사결정자의 선호도를 파악한 뒤 절단면을 형성하여 가능영역을 축차적으로 줄여나가는 것이다. 이것은 의사결정자가 선호하는 영역에서 집중적으로 반응값을 평가할 수 있도록 하여준다. MPCSCP는 기본적으로 다음과 같은 4단계로 이루어져 있다: (i) 중앙점 찾기, (ii) 시뮬레이션 실험, (iii) 의사결정자와의 대화, 그리고 (iv) 절단면 구성. 이러한 4단계를 정지기준이 만족될 때까지 반복해서 실시한다.

[중앙점 찾기] 단계에서는 가능해 영역 안에서 효과적인 실험계획을 세우기 위해서 가능영역의 중앙점을 찾는다. 효과적인 실험계획을 위하여 연속공간에서는 실험구간의 크기

가  $D$ 인 중앙복합모형(central composite design, 그림 1)이 이용되었으나, 이산공간을 다루는 본 연구에서는 실험점들을 정수값으로 만들기 위하여 그림 2와 같은  $n$ -cell 모형으로 변형하였다.

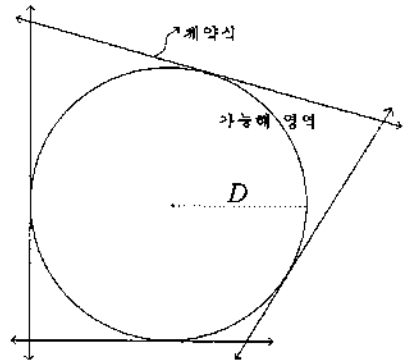


그림 1. 중앙 복합 설계

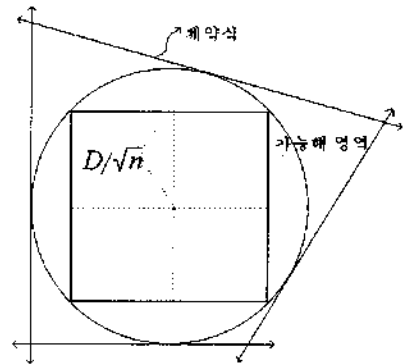


그림 2.  $n$ -cell 모형

$n$ -cell 모형의 형성에 필요한 중앙점은 Musselman[8]과 Musselman과 Talavage[9]의 'Modified method of center'를 이용해서 구한다. 물론, 이 중앙점은 정수이어야 한다. 이를 위해서 우선 선형계획법 문제를 풀어서

증가 방향을 구한다. 그리고, 이 방향에 있는 점들 중에서 각 제약식과의 거리를 최대화하는 점을 구한다. 이점이 바로 중앙점이다. 중앙점이 결정되면 중앙점을 중심으로 실험구간의 크기가 D인 중앙복합모형에 내접하는 정사면체 모양의 실험계획을 한다. 그러므로, n-cell 모형의 실험구간의 크기는  $D/\sqrt{n}$ 를 넘지않는 최대 정수인  $\lfloor |D|/\sqrt{n} \rfloor$  이 된다. 이때 n은 결정변수의 수이다.

[시뮬레이션 실험] 단계에서는 각 실험점에서 시뮬레이션을 실시한다. 중앙점으로부터  $\lfloor |D|/\sqrt{n} \rfloor$  만큼씩 떨어진 점들을 실험점으로 잡는다. 그리고, 시뮬레이션에서 얻어진 각 반응값들과 실험점들의 좌표를 이용하여 추정치  $\hat{B}$ 와  $\hat{\Sigma}$ 를 계산한다.

[의사결정자와의 대화] 단계에서는 반응값들을 비교해서 ‘부분유효해’를 구한다(각 반복에서 나타나는 유효해를 부분유효해라고 정의함). 그리고, 의사결정자로 하여금 쌍대 비교 형태로 부분유효해들을 차례로 비교하도록 해서 가장 선호하는 해를 찾고 이것을 임시절충해  $\underline{x}^*$ 로 정한다.

$\underline{x}^*$ 가 결정되었으면, [절단면 구성] 단계에서는 우선 부분유효해들 간의 선호차이를 이용하여 다음과 같은 선호제약식을 구성한다.

$$IP_{st} + w\hat{B}[z_s - z_t] + (2w\hat{\Sigma}w)^{1/2}(K_\alpha) \geq 0, \text{ for all } (s, t).$$

그리고, 부분 tradeoff 비율 (local tradeoff ratio)  $w$ 를 구하기 위해서 다음과 같은 비선형계획법 문제를 푼다.

*Minimize*  $\sum IP_{st}$

*Subject to:*

$$IP_{st} + w\hat{B}[z_s - z_t] + (2w\hat{\Sigma}w)^{1/2}(K_\alpha) \geq 0, \text{ for all } (s, t).$$

(만약 의사결정자가  $y_s$ 를  $y_t$ 보다 선호한다면)

$$w'1 = 1$$

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$IP_{st} \geq 0$$

위 식에서 k는 유효해의 갯수,  $IP$ 는 ‘불일치 보상변수’를 나타낸다. 그리고,  $w\hat{B}[z_s - z_t]$ 는 반응의 평균변동이고,  $(2w\hat{\Sigma}w)^{1/2}(K_\alpha)$ 는 반응의 분산변동이며  $K_\alpha$ 는 표준정규분포의  $\alpha$ th percentile 값이다. 예를 들어서,  $\alpha=95\%$ 이면,  $K_\alpha=1.96$ 이다. 위 문제의 최적해로 부분 tradeoff 비율  $w^*$ 이 결정되면 다음과 같은 절단면을 만든다 :  $-w^*C'(x - x^*) \leq 0$ , 여기서  $C = [\nabla z_1^*, \nabla z_2^*, \dots, \nabla z_k^*]$ . 절단면은 임시절충해  $\underline{x}^*$ 를 지나는 제약식으로서 열등한 점들을 제외시킴으로서 가능영역의 크기를 줄인다. 이와 같은 4단계 과정을 정지기준을 만족할 때까지 반복함으로써 최적절충해나 그에 근접한 유효해를 구한다.

MPCSCP 방법은 의사결정자가 직접 문제 해결 과정에 관여하기 때문에 의사결정자가 만족할만한 결과를 얻었다고 판단하면 즉시 멈출 수 있다. 그러한 경우 외에도 부분해의 쌍대 비교시에 유일해가 존재하는 경우와 가능영역이 충분히 줄어들어서 실험계획이 어려운 경우에 멈출 수 있다. MPCSCP 방법을 단계별로 정리해서 알고리즘 형태로 나타내면 다음과 같으며 수치예는 부록에 제시한다:

단계 0: [초기화]

변수들의 범위, 제약식의 계수들, 의사결정 변수의 수, 그리고 초기해  $\underline{x}^0$ 를 결정한다.

단계 1: [중앙점 찾기]

① 선형계획문제를 푼다.

Minimize  $M$

Subject to;

$$-M + a_{0i} + a'_i(x^0 + h) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, (m+l)$$

이때  $a_{0i}$ 는 제약식의 상수이고,  $a_i$ 는  $i$ 번째 제약식의 계수이다. 그리고,  $l$ 은 진행된 반복수이다.

▶ 만약에  $M^* \geq 0$  또는  $h^* = 0$  이면,  $\underline{x}^* = \underline{x}^0$  이므로 멈춘다.

② 정수계획문제를 푼다.

Minimize  $D$

Subject to;

$$-D \cdot \{a_{0i} + a'_i(x_i^* + \lambda h^*)\} / (a'_i, a_i)^{1/2} \leq 0$$

$$\underline{x}^* = \underline{x}^0 + \lambda \underline{h}^*$$

$$\lambda \geq 0$$

▶  $D^*$ 가 1보다 작을 경우에는 멈춘다.

▶  $\lfloor |D^*| \div \sqrt{n} \rfloor$ 의 크기가 1보다 작으면, 진행여부를 의사결정자에게 질문한다.

단계 2: [시뮬레이션 실험]

① n-cell모양의 실험계획을 한다.

② 각 실험점들이 가능영역 내에 있는지를 검사하여 가능영역 밖의 점들을 제거한다.

③ 실험점들에서 시뮬레이션을 실시한다. 그리고, 시뮬레이션으로부터 구한 반응값을 토대로  $\hat{B}$ 와  $\hat{\Sigma}$ 를 계산하고, 각각의 실험점들에 대해서  $\underline{z}_i' = (1, x_{1,i}, \dots, x_{n,i}, x_{1,i}^2, x_{1,i}x_{2,i}, \dots, x_{n-1,i}x_{n,i}, x_{n,i}^2)$ 를 계산한다.

단계 3: [의사결정자와의 대화]

▶ 부분유효해가 하나만 남으면 멈춘다.

① 부분유효해들을 가지고 의사결정자와의 쌍대비교 대화를 통해서 임시절충해  $\underline{x}^*$ 를 결정한다. 그리고 쌍대비교 과정에서 의사결정자가  $\underline{y}_s$ 를  $\underline{y}_t$ 보다 선호하면 선호제약식을

$$IP_{st} + w \hat{B}[z_s - z_t] + (2w' \hat{\Sigma} w)^{1/2} (K_\sigma) \geq 0$$

으로 만든다.

▶ 이 때, 의사결정자가 임시절충해에 만족하면 멈춘다.

②  $\underline{x}^*$ 에서의 선호함수 기울기의 추정치  $w$ 를 구하기 위해서 다음과 같은 비선형계획문제를 푼다:

Minimize  $\sum IP_{st}$

Subject to:

$$IP_{st} + w \hat{B}[z_s - z_t] + (2w' \hat{\Sigma} w)^{1/2} (K_\sigma) \geq 0, \text{ for all } (s, t).$$

(만약 의사결정자가  $\underline{y}_s$ 를  $\underline{y}_t$ 보다 선호한다면)

$$w' \underline{1} = 1$$

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$IP_{st} \geq 0$$

단계 4: [절단면 구성]

①  $\underline{x}^*$ 에서의 근사적인 선호함수 기울기로서  $\underline{C} = [\nabla z_1^*, \nabla z_2^*, \dots, \nabla z_k^*]$ 를 구한다.

② 절단평면을 구성한다.

$$w' \underline{C}' (\underline{x}^* - \underline{x}) \leq 0$$

$l = l+1$ 로 놓고, 단계 1로 되돌아 간다.

MPCSCP는 이론적으로 (i) 제약식들이 선형이고, (ii) 반응함수들이 볼록함수이고 미분 가능하며, (iii) 의사결정자의 선호도함수가 볼록이고 증가함수이며 미분가능하다면 최적절충해를 보장할 수 있다. 그러나 반응함수를 모르므로 이러한 이론적인 결과를 보장할 수 없다. 따라서, 여기에 제시된 방법은 발견적

기법이라고 말할 수 있다. 이와같은 점은 시뮬레이션 최적화 기법들에게는 피할 수 없는 공통적인 단점이다. 본 연구에서는 수치실험을 통해서 제시된 방법의 수행능력을 여러가지 측면에서 평가하여 효율성을 뒷바침 하였다.

4. MPCSCP의 수행도 분석

MPCSCP는 반응값이 불확실한 시뮬레이션 최적화에 적용되기 때문에 그 수행도도 여러가지 입력 파라미터와 문제의 조건에 따라서 달라질 수 있다. 여기에서는 10개의 실험문제를 문헌에서 선정하여 다양한 각도에서 MPCSCP방법의 수행도를 평가하였다. MPCSCP는 시뮬레이션 결과를 근거로 근사적인 반응함수를 사용하고 시뮬레이션의 반복횟수도 제한적이기 때문에 실제의 문제를 풀어서 구한 결과값이 확정적인 경우에서 얻을 수 있는 이론적인 값과 꼭 같을 수가 없다. 그러므로, 반복실행에서 구한 해가 이론적 최적해에 얼마나 근접하는지를 수행도의 기준으로 정하여 분석하였다. 최적해를 찾는 MPCSCP의 성능을 평가하기 위해서 FORTRAN 언어로 프로그램하고, Ringuest와 Gulledge[11]에서 10개의 문제를 발췌하여 여러가지 조건하에서 문제를 풀어보았다. 이들 실험문제를 각각 5회씩 반복해서 풀었고 다음과 같은 5가지 수행도 평가척도의 평균치와 분산을 계산하였다:

1. 반복횟수: 반복횟수가 커질수록 문제해결 시간이 많이 소요되고 의사결정자의 일관성도 보장하기 어렵게 된다. 그러므로, 반복

횟수는 수행도를 평가하는데 있어서 중요한 요인이 된다.

2. 총 비교횟수: 비교횟수란 각 반복에 있어서 의사결정자와의 대화 횟수를 말한다. 비교횟수가 증가하면 의사결정자의 부담이 커지고 이에 따라서 일관성이 나빠지고 소요시간도 늘어나므로 수행도가 좋지 못하다.

3. 선호도 차이: 이것은 각 실행에서 구한 최적해의 선호함수값과 이론적 최적해의 선호도함수값 간의 상대적인 차이이다.

$$\frac{1}{\text{실행횟수}} \sum_{k=1}^{\text{실행횟수}} \frac{(\text{이론적 선호함수값} - k\text{번째 실행의 선호함수값})}{\text{이론적 선호함수값}}$$

즉, 의사결정자가 판단하기에 얼마나 만족할 만한 답을 제공할 수 있는지를 나타낸다.

4. 변수간의 거리: 이는 선호도 차이와 달리, 결정공간에서 어느 정도까지 실제의 최적해에 가까이 접근할 수 있는지를 나타낸다.

5. 각 반복시 선호함수값의 상대적 증가량: 반복이 진행됨에 따라서 반복당 선호함수값이 상대적으로 얼마나 증가하는지를 알아보았다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\text{실행횟수}} \sum_{k=1}^{\text{실행횟수}} \frac{(k\text{번째 반복시의 선호함수값} - (k-1)\text{번째 실행의 선호함수값})}{\text{이론적 선호함수값}}$$

이 수치를 통하여, 몇 번 정도의 반복을 수행하면 어느 정도 근사한 해를 구할 수 있는지를 알 수 있다.

표본오차의 크기가 MPCSCP의 수행도에 미치는 영향:

MPCSCP가 표본오차의 크기에 얼마나 영향을 받는지 알아보기 위하여, 표본오차의 분산을 (1.0, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1)으로 변화시켜 보았다. 이것을 통하여 시뮬레이션의 불확실

성에 대한 MPCSCP의 강건성을 평가할 수 있다. 표 1에 나타난 결과를 분석해 보면 분산이 작아짐에 따라서 [총 비교횟수]와 [반복횟수]에는 별다른 차이가 없지만 [선호도의 상대적 차이]와 [이론적 최적점과의 거리]가 상대적으로 작아짐을 알 수 있다. 이 결과는 기대되었던 것으로써 오차가 적을수록 좋은 해를 구한다는 것을 의미한다. 따라서, 산포도가 지나치게 큰 경우에는 반복횟수를 늘리거나 시뮬레이션 길이를 길게 하여서 산포도를 줄이는 것이 바람직하다고 하겠다. 물론, 표본오차가 전혀 없는 경우에는 불확실성이 없으므로 이론적인 최적해를 항상 찾아갈 수 있다.

를 얻기 위한 것이다. 이러한 실험계획을 할 때, 실험구간의 크기가 수행도에 어떤 영향을 미치는지 알아보기 위해서 실험점들 간의 거리를  $D\sqrt{n}$  의 (1.0, 0.75, 0.5, 0.25)배 크기로 변화시켰다. 표 2에서 보는 것과 같이, 실험구간의 크기가 작아짐에 따라서 [총 비교횟수]와 [반복횟수]는 줄어들고, [선호도의 상대적 차이]와 [이론적 최적점과의 거리]는 상대적으로 많이 증가했다. 이는 실험구간의 크기가 작아질수록 가능해 영역의 일부분 밖에 탐색하지 못하여서 시작점과 실험점 간의 값 차이가 커져서 유일해가 발생할 가능성이 커지므로, 첫 번째 시행에서 정지기준을 만나 수행도가 나빠진 것으로 분석되었다. 결과적

표 1. 분산변화시의 수행도(평균/분산)

분산 \ 척도	총 비교횟수	반복횟수	선호함수값의 상대적 차이(%)	이론적 최적점과의 거리	정지 기준	
					유일해	실험계획 불가능
1.0	10.10	4.58	8.08	16.34	38	12
	10.56	2.13	10.79	18.81		
0.75	12.62	4.84	8.08	14.48	39	11
	26.29	3.32	12.99	19.27		
0.5	11.76	4.98	7.17	14.04	39	11
	22.12	4.07	14.62	19.54		
0.25	12.24	4.80	7.18	12.94	42	8
	24.57	3.66	17.30	19.95		
0.1	8.52	4.26	7.75	11.72	38	12
	14.92	2.66	18.24	21.45		

실험계획의 크기가 MPCSCP의 수행도에 미치는 영향:

실험계획을 이용하는 이유는 적은 수의 점들을 실험하면서도 되도록 많은 통계적 정보

으로, 실험구간을 될 수 있으면 크게 설정하는 것이 결정공간 전체를 효과적으로 탐색하는데 유리함을 알 수 있다.



표 2. 실험계획 크기 변화시의 수행도(평균/분산)

실험 크기 \ 척도	총 비교횟수	반복횟수	선호함수값의 상대적 차이(%)	이론적 최적점과의 거리	정지 기준	
					유일해	실험계획 불가능
1.0	10.10	4.58	8.08	16.34	38	12
	10.56	2.13	10.79	18.81		
0.75	9.78	4.52	9.94	22.29	42	8
	10.52	2.33	14.25	22.21		
0.5	8.98	4.34	10.95	23.36	39	11
	10.57	2.76	13.10	19.55		
0.25	4.64	2.58	16.92	28.30	44	6
	8.14	2.37	21.33	19.99		

여유율이 MPCSCP의 수행도에 미치는 영향:

MPCSCP는 발견적인 방법이므로 절단면에 의해서 최적절충해가 잘려나갈 위험을 갖고 있다. 이러한 가능성에 대비하기 위해서, 가능해 영역을 축소시키는 새로운 절단면을 정할 때 여유율을 주었다. 즉, 절단면을 만들

때, 여유율  $\alpha$  배 되는 점을 기준으로 제약식을 만들어서 원래의 제약식보다 가능해 영역을 덜 잘라내는 제약식을 만드는 것이다. 즉,  $-w^*C'(x - \alpha \cdot x^*) \leq 0$ . 여기서는 4가지 여유율 ( $\alpha = 1.0, 0.9, 0.8, 0.7$ )에 대해서 MPCSCP의 수행도를 평가하였다. 표 3을 보면 여유율이 커짐에 따라서 [총 비교횟수]와 [반복횟

표 3. 여유율이 주어졌을 때의 수행도(평균/분산)

여유율 \ 척도	총 비교횟수	반복횟수	선호함수값의 상대적 차이(%)	이론적 최적점과의 거리	정지 기준	
					유일해	실험계획 불가능
1.0	10.10	4.58	8.08	16.34	38	12
	10.56	2.13	10.79	18.81		
0.9	16.66	4.86	8.16	16.32	38	12
	35.16	4.20	8.61	17.53		
0.8	12.02	4.82	7.55	13.63	33	17
	22.44	3.55	8.28	15.35		
0.7	14.44	4.58	7.47	15.91	36	14
	32.29	4.39	9.89	18.18		

수]에는 별다른 차이가 없지만, [선호도의 상대적 차이]와 [이론적 최적점과의 거리]가 상대적으로 조금 줄어들었음이 결과로 나타난다. 이것은 여유율을 적절히 주는 것이 MPCSCP의 수행도를 높이는데 유효하다는 사실을 부분적으로 뒷받침해 준다.

일관성 결여정도가 MPCSCP의 수행도에 미치는 영향:

실제의 문제에서 의사결정자가 대안을 비교하는 쌍대비교 과정 중에 언제나 일관성있는 응답을 한다고 보장할 수 없다. 여기에서는 비교되는 두 유효점간의 선호도 차이가 이론적 최적해 선호함수값의  $\beta$ 배 ( $\beta = 0.1, 0.25, 0.50$ )보다 작을 경우에는 의사결정자가 일관성이 없다고 가정하여 난수를 이용하여 50%의 확률로 오판하도록 하였다. 표 4에서 의사결정자의 일관성이 줄어들어 따라서 [총 비교횟수]와 [반복횟수]에는 별다른 차이가 없지만, [선호도의 상대적 차이]와 [이론적 최적점과의 거리]는 상대적으로 눈에 띄게 증

가하고 분산도 상당히 커짐을 볼 수 있다. 이것은 의사결정자가 대화중에 일관성이 없으면 MPCSCP의 수행도가 나빠짐을 나타내는 것으로써 기대했던 결과이다. 이러한 가능성을 줄이기 위해서 MPCSCP는 의사결정자에게 가장 부담이 적은 대화방식으로 알려져 있는 쌍대비교를 이용하고 있는 것이다. 또한, 인공신경망을 이용해서 의사결정자가 일관성을 유지하도록 지원하는 방법을 개발하였는데 지면 관계상 이곳에서는 생략하므로 Kim[6]을 참조하기 바란다.

MPCSCP가 얼마나 빨리 최적절충해에 접근하는지를 분석하기 위해서 각 반복당 선호도의 상대적 증가량의 평균치를 계산해서 그림 3에 나타내었다. [1회 반복]에서 해의 평균값이 이론적 최적해의 거의 90%정도까지 접근하고 있음을 볼 수 있다. 그리고, 문제의 여러 조건들 중에서 일관성이 보장되지 않은 경우의 영향으로, 5회 반복부터는 오히려 이론적 최적해에서 조금 멀어지는 현상도 나타

표 4. 일관성을 변화시켰을 때의 수행도(평균/분산)

차이 \ 척도	총 비교횟수	반복횟수	선호함수값의 상대적 차이(%)	이론적 최적점과의 거리	정지 기준	
					유일해	실험계획 불가능
0	10.10	4.58	8.08	16.34	38	12
	10.56	2.13	10.79	18.81		
0.1	14.84	5.44	14.63	30.97	34	16
	24.65	3.54	15.89	26.91		
0.25	10.78	4.88	15.67	35.88	38	12
	9.90	2.77	16.11	28.30		
0.5	14.32	5.46	20.83	39.32	38	12
	18.00	3.13	18.34	28.27		

났다. 이것은 기존 다기준 최적화 방법의 결과와 마찬가지로의 결과로써 대화형 방법들이 초기에 빠르게 최적해에 접근하는 사실을 증명하는 것이다. 이 결과는 시뮬레이션 최적화에서는 아주 실용적인 결과로써 1-2회의 시뮬레이션 실험계획에 근거한 MPCSCP의 적용으로도 좋은 해를 구할 수 있다는 것을 뒷받침한다.

탐색하는데 유리하다.

3. 실제의 최적질층해 값이 절단면에 의해서 잘려나가는 위험을 줄이기 위하여 적절한 여유율을 이용하는 것도 바람직하다.

4. 의사결정자의 일관성 유지에 주의해야 한다. 일관성 유지에 자신이 없으면 별도의 대책이 필요하다. (Kim[6] 참조 바람)

5. 실제로 처음 3번째 반복정도의 수행만

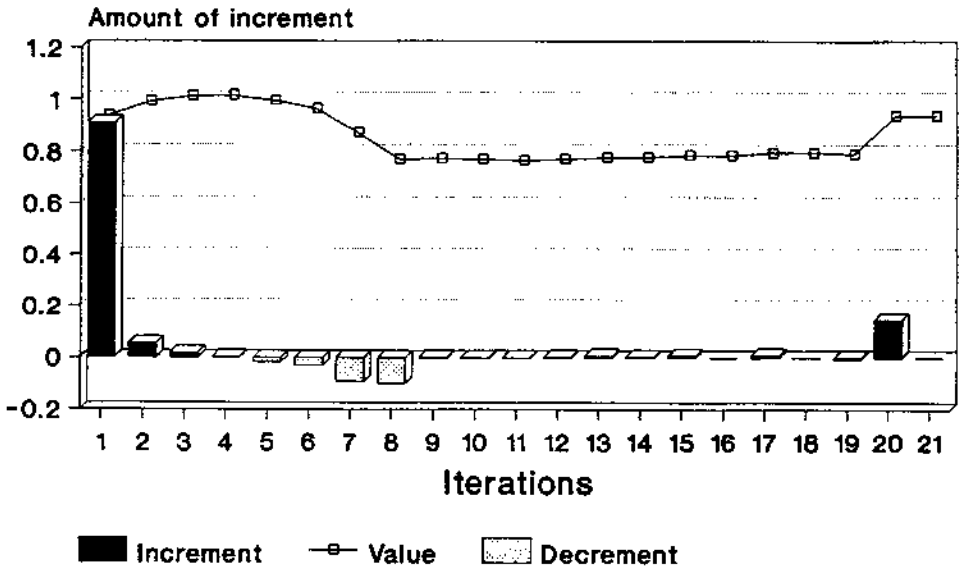


그림 3. 반복당 선호함수값의 상대적 평균 증가량

MPCSCP의 수행도를 수치실험을 통해서 평가한 결과를 요약하면 다음과 같으며 이것은 MPCSCP를 효과적으로 응용하기 위한 자료로 쓰일 수 있다:

1. 표본오차의 분산의 크기가 지나치게 크면 시뮬레이션 환경을 조정해서 다소간 줄이는 노력이 필요하다.
2. 실험계획의 크기를 가능한 한 크게 만드는 것이 가능영역을 전체적으로 폭 넓게

이로도 이론적 최적해에 가까운 결과를 얻을 수 있으므로 조기에 멈추는 것이 큰 위험요소가 되지 않는다.

### 5. 결 론

본 논문은 다반응함수를 갖는 추계적 시뮬레이션을 최적화하여서 정수해를 구하는 기법인 MPCSCP를 제시하였다. 이 방법은 의

사결정구간의 중앙점을 중심으로 정사면체 형태로 평가하는 실험계획을 이용함으로써 가능해 영역을 폭넓게 탐색하고 절단면을 이용해서 고려대상 영역을 축차적으로 축소해 나간다는 특징이 있다. MPCSCP의 수행도를 평가하기 위하여 여러가지 조건하에서 실험 문제들을 풀어보고 그 결과를 분석하였다. 그 결과, 대부분의 경우 제시한 방법이 비교적 우수한 수행도를 나타냈으며, 특히 빠른 시간(2~3회 반복)내에 적은 수의 대화횟수(6~7회)만으로도 이론적 최적해의 98% 정도까지 접근한다는 것이 나타났다. 절단면을 이용하는 기존의 방법이 없어서 상대적인 비교는 어렵지만, 이러한 결과는 상당히 바람직한 결과라고 판단된다. 본 연구에서는 결정변수가 2개와 3개일 경우의 작은 문제에 대해서 실험하였고 실험 반복횟수가 또한 적어서 현실감있는 분석이 되지 못하였다. MPCSCP를 더 큰 문제를 이용해서 실험 및 평가하고 실질적인 사례에 적용하여 보는 것이 추후에 고려되어야 할 과제이다.

## 참 고 문 헌

- [1] Boyle, C R. and Shin W. S., "An Interactive Multiple-Response Simulation Optimization Method," (Forthcoming), IIE Transactions, 1996.
- [2] Farrell, W., "Literature Review and Bibliography of Simulation Optimization," Proceedings of the 1977 Winter Simulation Conference, 117-124, 1977.
- [3] Garcia-Diaz, A., Hogg G. L. and Tari, F. G., "Combining Simulation and Optimization to solve the multimachine Interference Problem," Simulation, 28, 193-201, 1981.
- [4] Hader, R. J. and Park, Sung H., "Slope-Rotatable Central Composite Designs," Technometrics, 20, 413-417, 1978.
- [5] Jacobson, S. H. and Schruben, L. W., "Techniques for Simulation Optimization Response Optimization," Operation Research Letters, 8, 1-9, 1989.
- [6] Kim, Jae-Young., "An Interactive Method for Multicriteria Simulation Optimization Response Optimization," Unpublished Master's Thesis, Dept. of Industrial Engineering, Sung Kyun Kwan University, Korea, 1995.
- [7] Montgomery, D. C. and Talavage, J. J., "Multiple Response Surface Methods in Computer Simulation," Simulation, 29, 113-121, 1977.
- [8] Musselman, K. J., "An Interactive, Tradeoff Cutting Plane Approach to continuous and discrete Multiple Objective Optimization" unpublished Ph.D. dissertation, Dept. of Industrial Engineering, Purdue University, 1978.
- [9] Musselman, K. J. and Talavage, J. J., "A Tradeoff Cut Approach to Multiple Objective Optimizations," Operations Research, 28, 1424-1435, 1980.
- [10] Rees, L. P., Clayton E. R. and Taylor III, B. W. "Solving Multiple Response Simulation Models Using Modified Response Surface Methodology Within a Lexicographic Goal Programming Framework,"

- IIE Transactions, 17, 47-57, 1985.
- [11] Ringuest, J. L. and Gullidge, T. R., "Interactive Multiobjective Complex Search," European Journal of Operations Research, 19, 362-371, 1985.
- [12] Safizadeh, M. H., "Optimization in Simulation: Current Issues and Future Outlook," Naval Research Logistics, 37, 807-825, 1990.
- [13] Shin, W. S. and Ravindran, A., "Interactive Multiple Objective Optimization: Survey I-Continuous Case," Computers and Operations Research, 18, 97-114, 1991.
- [14] Smith, D. E., "An Empirical Investigation of Optimum-Seeking in the Computer Simulation Situation," Operations Research, 21, 475-497, 1973.

---

96년 3월 최초 접수, 96년 10월 최종 수정

## 부 록

여기에서는 수치예제를 통하여 MPCSCP 방법의 실질적인 계산과정을 설명한다. 다음과 같은 임의의 문제를 고려해보자:

$$\begin{aligned}
 &MAX \quad y_1 = -.1x_1 + \epsilon_1 \\
 &MAX \quad y_2 = -.1x_2 + \epsilon_2 \\
 &subject \ to \quad 4-.7x_1-.1x_2 \leq 0 \\
 &\quad \quad \quad 3-.3x_1-.1x_2 \leq 0 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 100
 \end{aligned}$$

예시를 위해서 시뮬레이션 문제를 사용하는 것이 바람직하겠지만, 그 경우에는 반응함수를 알지 못하므로 제시된 방법이 어떻게 해를 찾는지 분석하기가 어렵다. 그래서, 수리계획법 문제에 표본오차  $\epsilon \sim N(0, 0.1)$ 를 포함시켜서 수치예제로 고려하였다. 의사결정자의 선호도함수도 미지이므로 다음과 같은 선호함수를 갖고 선호도를 표시한다고 가정하였다:

$$\begin{aligned}
 U(y_1, y_2) = & 100 + 32(1-EXP(-0.13 y_1)) + 57(1-EXP(-0.04 y_2)) \\
 & + 10.7(1-EXP(-0.13 y_1))(1-EXP(-0.04 y_2))
 \end{aligned}$$

### 단계 0: 초기화

초기해는  $\underline{x}^0 = (20, 20)$ 이라고 가정하자.

<반복 1>

단계 1: 중앙점 찾기

①  $\underline{h}^*$ 을 구하기 위하여 다음의 선형계획문제를 푼다.

*MIN M*

*Subject to;*

$$-M + 4 - 0.7(20 + h_1) - 0.1(20 + h_2) \leq 0$$

$$-M + 3 - 0.3(20 + h_1) - 0.1(20 + h_2) \leq 0$$

이 문제를 풀면  $M^* = -26.43$ 와  $\underline{h}^* = (53.57, 53.57)$ 가 최적해가 된다. 이를 절대값이 큰 값을 기준으로 scaling하여  $\underline{h}^* = (1.0, 1.0)$ 를 구한다.

② 다음은 중앙점을 찾기 위하여 정수계획문제를 푼다. 이때 위에서 구한  $\underline{h}^*$ 값을 대입하여 거리( $D$ )와 진행폭  $\lambda^*$ 를 구한다.

*MIN D*

*Subject to;*

$$D + \{0.7(20 + 1.0 * \lambda_1) + 0.1(20 + 1.0 * \lambda_2) - 4\} / \sqrt{(0.7)^2 + (0.1)^2} \geq 0$$

$$D + \{0.3(20 + 1.0 * \lambda_1) + 0.1(20 + 1.0 * \lambda_2) - 3\} / \sqrt{(0.3)^2 + (0.1)^2} \geq 0$$

$$D - \lambda_1 \geq -80$$

$$D - \lambda_2 \geq -80$$

$$D + \lambda_1 \geq -20$$

$$D + \lambda_2 \geq -20$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$x_1 = 20 + 1.0 * \lambda_1$$

$$x_2 = 20 + 1.0 * \lambda_2$$

이 문제의 최적해로  $D^* = -50$ ,  $\underline{\lambda}^* = (30, 30)$ 가 결정된다. 따라서, 실험계획구간의 크기는  $\lfloor |D^*| \div \sqrt{n} \rfloor = \lfloor 50 \div \sqrt{2} \rfloor = 35$ 가 되고, 위의 ①번, ②번에서 구한  $\underline{h}^*$ ,  $\lambda^*$ 값에서 중앙점( $x^*$ )는  $(50, 50)$ 이 된다.

단계 2: 실험계획

중앙점에서부터 n-cell 모양으로 35만큼씩 떨어진 점들을 실험점으로 결정하고, 중앙점에서 반복실험을 한다. 실험계획의 각각의 점들과 반응값들이 표 5에 있다.

표 5. 실험점들과 반응값

실험점 번호	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
1	20	20	-1.9501	-2.0939
2	50	50	-5.1264	-5.1921
3	15	15	-1.4084	-1.7636
4	15	50	-1.6653	-4.8207
5	85	85	-8.4911	-8.6947
6	85	15	-8.4912	-1.3126
7	85	50	-8.7156	-4.7882
8	15	85	-1.8394	-8.4602
9	50	15	-5.0174	-1.8655
10	50	85	-5.1538	-8.4308
11	50	50	-5.4748	-4.8131
12	50	50	-5.1407	-5.0974
13	50	50	-4.8754	-4.4121
14	50	50	-4.8573	-4.5996

단계 3: 유효해 결정

위에서 정한 실험점들로  $\hat{B}$ 와  $\hat{\Sigma}$ 의 최소자승 추정치를 구한다.

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.26510 & -0.10051 & -0.01283 & -0.00003 & 0.00009 & 0.00006 \\ -0.72232 & 0.00244 & -0.06899 & 0.00005 & -0.00013 & -0.00023 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.01971 & 0.01340 \\ 0.01340 & 0.03724 \end{bmatrix}$$

그리고, 반응값들을 비교하여 유효해들을 찾는다. 이 때의 유효해들은 표 6과 같다.

표 6. 유효해들과 선호함수값

실험점 번호	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	의사결정자의 선호도
3	15	15	-1.4084	-1.7636	89.561
6	85	10	-8.4912	-1.3127	33.585

이들 유효해 중에서 의사결정자가 가장 선호하는 해는  $\underline{x}^*=(15, 15)$ 이고,  $\underline{x}^0=(85, 10)$ 과의 쌍대비교에 의한 선호제약식은 다음과 같다:

$$IP_{12} + \underline{w}'\hat{B}[z_1 - z_2] + (2\underline{w}'\hat{\Sigma}\underline{w})^{1/2}(1.645) \geq 0$$

$$z_1 = (1, 15, 15, 15^2, 15*15, 15^2)$$

$$z_2 = (1, 85, 15, 85^2, 85*15, 15^2)$$

즉,  $IP_{12} + 7.9939 w_1 + 0.6763 w_2 \geq 0$

이상에서 만들어진 선호제약식은 아래의 수리계획법 문제에 이용된다.

MIN  $IP_{12}$   
 Subject to  $IP_{12} + 7.9939 w_1 + 0.6763 w_2 \geq 0$   
 $w_1 + w_2 = 1$   
 $w_1, w_2, IP_{12} \geq 0$

이 문제로부터  $\underline{w}^*=(0.49377, 0.50623)$ 를 구했다.

**단계 4: 절단면 구성**

$f(\underline{x})$ 는  $\hat{B}\underline{z} = \hat{B}(1, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1^2, \hat{x}_1\hat{x}_2, \hat{x}_2^2)$ 에 의해서 구할 수 있으므로,  $\Delta f(20, 20)$ 을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{B} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2(20) & 0 \\ 20 & 20 \\ 0 & 2(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10007 & 0.00196 \\ -0.00979 & -0.07789 \end{bmatrix} = \underline{C}$$

위에서 구한  $\underline{C}$ 를 이용하여 가능영역내의 절단면을 구성하면,  $-\underline{w}'\underline{C}(\underline{x} - (20, 20)) = 0.04845x_1 + 0.04438x_2 - 1.39233 \leq 0$ 이 된다.

현재점을  $\underline{x} = (15, 15)$ 라 놓고 단계 1로 되돌아 간다.

**<반복 2>**

위와 같은 단계를 반복하면 임시절충해가  $\underline{x}^* = (10, 3)$ 이 되고 이 때의 새로운 절단면으로  $0.02788x_1 + 0.02027x_2 - 0.33964 \leq 0$ 이 구해진다.

**<반복 3>**

반복 3에서는 임시절충해가  $\underline{x}^* = (10, 2)$ 가 되고, 이때는 유효해가 하나밖에 없으므로 여기



서 멈춘다. 따라서, 최적질층해의 결정변수값과 반응값은 각각 (10, 2)와 (-0.8755, 0.3878)이 되고, 이때의 의사결정자의 선호도는 97.000이다. 참고로, 이 문제는 표본오차가 없으면 최적해가 (10, 0)이고 이 점에서의 선호함수값은 95.557이다.