

☒ 연구논문

신뢰성이론에서의 피스 와이즈 와이블분포와 그 추정*

정해성

서원대학교 응용통계학과

A Piecewise Weibull Distribution in Reliability and its Estimation

Hai-Sung Jeong

Dept. of Applied Statistics, Seowon University

Abstract

In general, most industrial products exhibit bath-tub shaped curve for their failure rate functions. This distributional life model can be obtained by the Piecewise Weibull distribution. The least squares, maximum likelihood, and mixed methods of estimating the parameters of the Piecewise Weibull distribution are compared. The comparison is made by using the empirical mean squared errors of (a) the parameter estimates and (b) the estimated change-points, to summarize the results of 1000 simulated samples of three sizes - each 100, 150 and 200. The results are that the mixed method estimation comes to be the best as the sample sizes increase.

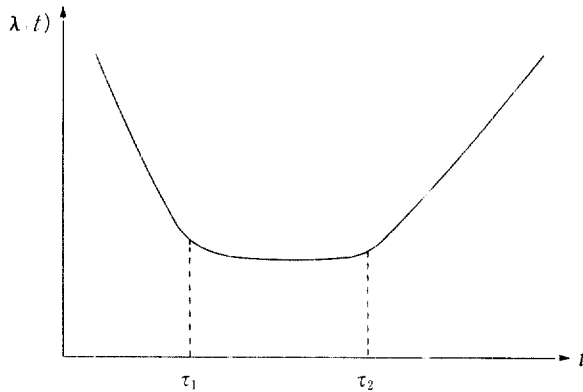
1. 서론

제품이나 설비의 신뢰성 및 보전성 향상을 위해서 시험대상의 고장시간의 분포 (life time distribution, 수명분포)를 추정하는 것은 대단히 중요하다. 신뢰성 이론에서 가정된 수명분포로 많이 쓰이는 것이 와이블분포이다. 왜냐하면 와이블분포는 형

* 이 논문은 1994년도 한국 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

상모수의 값이 1보다 적으면 감소 고장률(Decreasing Failure Rate ; DFR)인 수명분포이고, 형상모수가 1보다 크면 증가 고장률(Increasing Failure Rate ; IFR)인 수명분포가 되며 형상모수가 1이면 일정 고장률(Constant Failure Rate ; CFR)인 수명분포 즉 지수분포가 되기 때문이다.

일반적으로 제품이나 설비의 고장률 곡선은 아래 그림과 같은 욕조모양(bath-tub shaped)곡선을 갖는다.



이런 이유로 와이블 분포에 의해 제품이나 설비의 신뢰성을 추정하는 경우가 허다하다. 그러나 이것은 큰 잘못이다. 왜냐하면 와이블분포는 형상모수가 정해지면 DFR, IFR, CFR중 한 가지 형태의 수명분포가 되지, 욕조모양 곡선처럼 복합 고장모드를 갖는 것은 아니기 때문이다.

이제까지 고장률이 욕조모양 곡선을 갖는 수명분포의 모형으로서 혼합(Mixed) 와이블분포에 대한 논의는 많았다. Kao (1959)는 진공관의 고장시간을 설명하기 위해 혼합 와이블분포를 소개하였다. 또한 그는 혼합 와이블분포의 근사로 피스와이즈(Piecewise) 와이블분포 - Kao (1959)에서는 복합(Composite) 와이블분포로 소개된, - 를 이용하였다. Stich 등 (1975)는 미소회로의 고장시간이 혼합 분포를 따름을 밝혔다. 전기 기기에 대하여 Boardman과 Colvert (1978)는 구강세척기의 고장시간이 두 개의 혼합 와이블분포를 따름을 보였다. 그러나 Glaser (1980)은 고장률이 욕조모양 곡선을 갖는 수명분포의 충분조건을 제시하고, 혼합 와이블분포가 욕조모양 고장률 곡선을 갖지 않음을 보였다.

이 연구는 복합 고장모드를 갖는 피스와이즈 와이블분포의 모수 추정을 위한 방법들을 제안하고 고장률 변화점(change-point ; 위 그림의 τ_1, τ_2 시점)을 추정할 것이다. 이 결과를 이용하여 제품이나 설비의 수명분포와 고장률 변화점을 정확히 추정함으로써 초기고장시간, 품질보증기간 등의 결정에 도움을 주고자 한다. 예를 들면, 초기 고장기에 제품의 기능과 수명 시험을 통하여 제품의 결함을 찾아내어 수정함으로써 기업은 우발 고장기에 들어갈 제품을 시장이 내놓게 된다. 또한 우발 고장기를

지나 마모 고장기에 이르는 시점을 앞으로써 품질보증기간의 결정에 중요한 정보를 얻게 될 것이다. 이로써 기업은 제품의 크레임률을 줄이고 품질 개선을 할 수 있게 되어 고객만족을 꾀하고 기업평판이 좋아질 것이다.

2. 이론

피스와이즈 와이블분포의 모수 추정을 위한 방법으로 최우추정법(maximum likelihood estimation), 최소제곱추정법(least squares estimation) 그리고 혼합추정법(mixed method estimation)을 고려해 보기로 한다. 먼저 우리의 관심의 대상인 피스와이즈 와이블분포의 확률밀도함수를 살펴보자. 시간축을 고장률 변화점 τ_1 과 τ_2 에 의해 세구간

$(0, \tau_1]$, $(\tau_1, \tau_2]$, (τ_2, ∞) 으로 나누면 확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{m_1}{\eta_1} \left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{m_1-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{m_1}\right\} I_{(0, \tau_1)} \\ &+ \frac{m_2}{\eta_2} \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{m_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{m_2}\right\} I_{(\tau_1, \tau_2)} \\ &+ \frac{m_3}{\eta_3} \left(\frac{t}{\eta_3}\right)^{m_3-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_3}\right)^{m_3}\right\} I_{(\tau_2, \infty)} \end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있다. 이제 t_i ($i=1, \dots, n$)를 i 번째 고장시간이라 하고 w_i 를 중도절단일 경우 0, 아닐 경우 1로 주어지는 중도절단 변수(censoring indicator)라 하자. 또한 $i=1, \dots, n$; $j=1, 2, 3$ 에 대하여

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \tau_{j-1} < t_i \leq \tau_j \\ 0, & \text{그 밖에.} \end{cases}$$

단, $\tau_0 = 0$, $\tau_3 = \infty$.

구간 $\tau_{j-1} < t \leq \tau_j$, $j=1, 2, 3$ 에서의 신뢰도함수 $R(t)$ 와 누적고장률함수 $\Lambda(t)$ 는

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_j}\right)^{m_j}\right\} \\ \Lambda(t) &= \left(\frac{t}{\eta_j}\right)^{m_j} \end{aligned}$$

이다. 따라서 각 구간 (τ_{j-1}, τ_j) , $j=1, 2, 3$ 에서 다음과 같은 선형관계를 만족한다.

$$\begin{aligned} \ln \{ \Lambda(t) \} &= m_j (\ln t - \ln \eta_j) \\ &= m_j \ln t + \lambda_j \quad \text{여기서 } \lambda_j = - \ln \eta_j^{m_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

2.1 최우추정

식 (1)에 고장률 변화점 τ_1 과 τ_2 에서의 연속성가정

$$m_j \ln \tau_j + \lambda_j = m_{j+1} \ln \tau_{j+1} + \lambda_{j+1}, \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

을 추가시키면 식 (1)은 다음과 같이 다시 표현될 수 있다.

$$\ln \{ \Lambda(t) \} = \lambda_1 + m_j \ln t + \sum_{r=2}^j (m_{r-1} - m_r) \ln \tau_{r-1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

단, 위의 식에서 $j = 1$ 일 때 $\sum_{r=2}^j$ 부분은 생략된다.

이제 i 번째 고장시간에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ln \{ \Lambda(t_i) \} = \lambda_1 + \sum_{j=1}^3 c_{ij} \{ m_j \ln t_i + \sum_{r=2}^j (m_{r-1} - m_r) \ln \tau_{r-1} \} \quad (3)$$

이로부터 고장률함수 $\lambda(t_i)$ 는

$$\begin{aligned} \lambda(t_i) &= \Lambda(t_i) \sum_{j=1}^3 c_{ij} \frac{m_j}{t_i} \\ &= \frac{\Lambda(t_i)}{t_i} \prod_{j=1}^3 m_j^{c_{ij}} \end{aligned}$$

로 쓸 수 있고, 또한 (t_i, w_i) 에 대한 우도함수는

$$\begin{aligned} L(t_i, w_i) &= \begin{cases} S(t_i) = \exp \{ -\Lambda(t_i) \}, & w_i = 0 \\ f(t_i) = \lambda(t_i) \exp \{ -\Lambda(t_i) \}, & w_i = 1 \end{cases} \\ &= [\lambda(t_i) \exp \{ -\Lambda(t_i) \}]^{w_i} [\exp \{ -\Lambda(t_i) \}]^{1-w_i} \end{aligned}$$

이다. 대수우도함수 L_i 는

$$\begin{aligned}
L_i &= \ln L(t_i, w_i) \\
&= w_i \{ \ln \lambda(t_i) - \Lambda(t_i) \} + (1 - w_i) \{ -\Lambda(t_i) \} \\
&= w_i \{ \ln \Lambda(t_i) - \ln t_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} \ln m_j \} - \Lambda(t_i) \\
&= w_i \sum_{j=1}^3 c_{ij} \ln m_j - w_i \ln t_i + w_i \ln \Lambda(t_i) - \Lambda(t_i)
\end{aligned}$$

로 표현된다. 따라서 모든 (t_i, w_i) 에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^n L_i \\
&= \sum_{i=1}^n \{ w_i \sum_{j=1}^3 c_{ij} \ln m_j - w_i \ln t_i + w_i \ln \Lambda(t_i) - \Lambda(t_i) \}.
\end{aligned}$$

이제 m_j 의 최우추정량(maximum likelihood estimate ; m.l.e.)을 구해 보자.

$$\frac{\partial \ln \Lambda(t_i)}{\partial m_j} = c_{ij} \ln t_i + (1 - \delta_{j,3}) \sum_{s=j+1}^3 c_{is} \ln \tau_s - (1 - \delta_{j,1}) \sum_{s=j}^3 c_{is} \ln \tau_{s-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial m_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_i c_{ij}}{m_j} + \{ w_i - \Lambda(t_i) \} \{ c_{ij} \ln t_i + (1 - \delta_{j,3}) \sum_{s=j+1}^3 c_{is} \ln \tau_s \right. \\
&\quad \left. - (1 - \delta_{j,1}) \sum_{s=j}^3 c_{is} \ln \tau_{s-1} \right]
\end{aligned}$$

이 된다. 다시 쓰면

$$\frac{\partial L}{\partial m_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{w_i c_{ij}}{m_j} + \{ w_i - \Lambda(t_i) \} d_{ij} \right] \quad (4)$$

이다. 여기서 $\delta_{j,1}$ 과 $\delta_{j,3}$ 은 각각 $j=1$ 과 $j=3$ 일 때 1이고 그 밖에는 0이며 d_{ij} 는 다음과 같이 치환한 것이다.

$$d_{ij} = c_{ij} \ln t_i + (1 - \delta_{j,3}) \sum_{s=j+1}^3 c_{is} \ln \tau_s - (1 - \delta_{j,1}) \sum_{s=j}^3 c_{is} \ln \tau_{s-1}.$$

이제 식 (4)으로 부터 m_j 의 m.l.e.를 구할 수 있다.

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_i c_{ij}}{\sum_{i=1}^n \{ \Lambda(t_i) - w_i \} d_{ij}}, \quad j=1, 2, 3.$$

η_1 의 m.l.e.는 중도절단자료에서의 최우추정법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다 (Bain(1978), p. 209).

$$\hat{\eta}_1 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{r_1} t_{(i)}^{\hat{m}_1} + (n-r_1)t_{(r_1)}^{\hat{m}_1}}{r_1} \right]^{\frac{1}{\hat{m}_1}}.$$

여기서 $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$ 는 t_1, \dots, t_n 의 순서통계량이고 $r_1 = \sum_{i=1}^n c_{i1}$ 이다. λ_j 의 m.l.e는

식 (1)과 식 (2)으로부터

$$\hat{\lambda}_1 = -\hat{m}_1 \ln \hat{\eta}_1,$$

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_1 + (\hat{m}_1 - \hat{m}_2) \ln \tau_1,$$

$$\hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_1 + (\hat{m}_1 - \hat{m}_2) \ln \tau_1 + (\hat{m}_2 - \hat{m}_3) \ln \tau_2$$

와 같이 구할 수 있고 η_2 과 η_3 의 m.l.e는 식 (1)으로부터 $\hat{\eta}_2 = \exp\{-\frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{m}_2}\}$ 와

$\hat{\eta}_3 = \exp\{-\frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{m}_3}\}$ 로 구할 수 있다.

2.2 최소제곱추정

최소제곱추정은 식 (1)으로부터의 다음과 같은 선형관계에 의한 추정법이다.

$$y_i = a_j + b_j x_i.$$

여기서 $y_i = \ln(t_i)$, $x_i = \ln A(t_i)$, $a_j = \ln(\eta_j)$ 그리고 $b_j = \frac{1}{m_j}$ 이다.

각 구간 $(\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j=1, 2, 3$ 에서 $A(t_i)$ 를 중도절단 자료에서는 Nelson (1972

추정량 $\hat{A}(t_i) = \sum_{k \leq i} \frac{w_k}{n-k+1}$ 이나 $\hat{A}(t_i) = -\ln \hat{S}(t_i)$ (단, $\hat{S}(t_i)$ 는 Kaplan & Meier (1958)의 추정량)으로 추정하고, 완전 자료에서는 경험적 누적고장률

$\hat{A}(t_i) = \sum_{k \leq i} \frac{1}{n-k+1}$ 이나 $\hat{A}(t_i) = -\ln [1 - \hat{F}(t_i)]$ (단, $\hat{F}(t_i)$ 는 경험적 누적분포함수로 $\frac{i}{n}$ 이나 $\frac{i}{n+1}$ 등을 사용)으로 추정한다. 이로부터 단순회귀를 이용한

a_j 와 b_j 의 추정값 \hat{a}_j , \hat{b}_j 을 구할 수 있다. 따라서 $\hat{m}_j = \frac{1}{\hat{b}_j}$ 이고,

$\hat{\eta}_j = \exp\{\hat{a}_j\}$ 이다.

2.3 혼합추정

혼합추정에서는 m_j 의 추정량은 최우추정에서와 같은 \hat{m}_j 를 이용하고 η_j 의 추정은 각 구간 (τ_{j-1}, τ_j) , $j = 1, 2, 3$ 에서의 식 (1)의 선형관계로부터 구한 다음과 같은 $\hat{\eta}_j$ 를 추정량으로 사용한다.

$$\hat{\eta}_j = \exp \left[\frac{1}{r_j \hat{m}_j} \left\{ \hat{m}_j \sum_{i=1}^n c_{ij} \ln t_i - \sum_{i=1}^n c_{ij} \ln \hat{\Lambda}(t_i) \right\} \right]$$

$$\text{단, } r_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} .$$

3. 모의실험

제안된 세 가지 추정량의 효율을 비교하기 위하여 FORTRAN Ver5.0 프로그램과 IMSL 패키지를 이용하여 완전 자료와 중도절단 자료에서의 모의실험을 실시하였다. 완전자료에 대하여서는 피스와이즈 와이블분포의 형상모수를 $m_1 = 0.25, 0.50, 0.75, m_2=1.0, m_3=1.5, 2.0, 3.0$ 으로 변화시키고 이 9개의 모수군 (m_1, m_2, m_3) 에 대하여 고정된 척도모수 $\eta_1 = 1.2, \eta_2 = 1.2, \eta_3 = 1.5$ 를 주고서 반복수 1000에서의 경험적 평균제곱오차(MSE)를 세 가지 표본크기 $n = 100, 150, 200$ 에서 구했다. 중도절단 자료에 대하여서는 $m_1 = 0.50, m_2 = 1.0$ 를 고정시키고 $m_3 = 1.5, 2.0, 3.0$ 으로 변화시키면서 이 세 가지의 모수군 (m_1, m_2, m_3) 에 대하여 주어진 $\eta_1 = 1.2, \eta_2 = 1.2, \eta_3 = 1.5$ 와 표본크기 $n = 200$ 에서의 반복수 1000의 경험적 평균제곱오차를 세 가지 중도절단률 5%, 10%, 20%에서 구했다.

제안된 추정량들은 고장률 변화점 τ_1 과 τ_2 를 안다는 가정에서 구해질 수 있다. 그러나 일반적으로 고장률 변화점을 모르는 경우가 많다. 따라서 고장률함수를 그려보든가 확률지에 타점을 해봄으로써 고장률 변화점을 예측해보고 그 근방에서 가능성이 있는 여러 점들 중 차례로 한 개씩을 고장률 변화점으로 가정하고 위의 추정법들을 적용시킨다. 단, 가정된 고장률 변화점들 중에서 최소제곱추정에서는 잔차평균제곱(residual mean square)을 최소로 하는 것을 취하고, 최우추정과 혼합추정에서는 우도함수를 최대로 하는 것을 택했다.

최우추정과 혼합추정에 의한 모수 추정 과정은 다음과 같다.

(1) 예상되는 고장률 변화점의 집합 $\{ (\tau_{11}, \tau_{21}), (\tau_{12}, \tau_{22}), \dots, (\tau_{1l}, \tau_{2l}) \}$ 을 구한다.

(2) $k \leftarrow 1$, $\Lambda(t_i)$ 의 추정량으로 $\hat{\Lambda}(t_i) = \sum_{k \leq i} \frac{w_k}{n-k+1}$ 을 이용한다.

- (3) 고장률 변화점을 $\tau_1 = \tau_{1k}, \tau_2 = \tau_{2k}$ 로 가정하고 추정공식에 $\Lambda(t_i)$ 대신에 $\hat{\Lambda}(t_i)$ 를 대입하여 $\hat{m}_j, \hat{\eta}_j, j=1, 2, 3$ 을 구한다.
- (4) (3)에서 구한 \hat{m}_j 와 $\hat{\lambda}_1 = -\hat{m}_1 \ln \hat{\eta}_1$ 을 이용하여 식 (3)으로부터 새로운 $\Lambda(t_i)$ 의 추정량 $\hat{\Lambda}(t_i)$ 를 구한다.
- (5) \hat{m}_j 가 수렴할 때까지 3.과 4.의 과정을 반복한다.
- (6) 수렴된 \hat{m}_j 와 $\Lambda(t_i)$ 의 추정량 $\hat{\Lambda}(t_i)$ 을 이용하여 우도함수값을 구한다.
- (7) $k=l$ 가 될 때까지 k 값을 증가시키면서 3.에서 6.의 과정을 되풀이 한다.
- (8) 6.의 우도함수값을 최대로 하는 $\hat{m}_j, \hat{\eta}_j$ 와 τ_{1k}, τ_{2k} 을 최우추정과 혼합추정에 의한 모수 추정값으로 정한다.

최소제곱추정에 의한 모수 추정 과정은 다소 단순하다.

- (1) 예상되는 고장률 변화점의 집합 $\{(\tau_{11}, \tau_{21}), (\tau_{12}, \tau_{22}), \dots, (\tau_{1l}, \tau_{2l})\}$ 을 구한다.
- (2) $k \leftarrow 1$, $\Lambda(t_i)$ 의 추정량으로 $\hat{\Lambda}(t_i) = \sum_{k \leq i} \frac{w_i}{n-k+1}$ 을 이용한다.
- (3) 고장률 변화점들 $\tau_1 = \tau_{1k}, \tau_2 = \tau_{2k}$ 로 가정하고 각 구간 $(\tau_{j-1}, \tau_j]$ 에서 단순회귀를 이용하여 $\hat{m}_j, \hat{\eta}_j, j=1, 2, 3$ 을 구한다.
- (4) 단순회귀에 의한 각 구간 $(\tau_{j-1}, \tau_j]$ 에서의 잔차평균제곱들을 구한다.
- (5) $k=l$ 가 될 때까지 k 값을 증가시키면서 3.에서 4.의 과정을 되풀이 한다.
- (6) 4.의 잔차평균제곱들의 합을 최소로 하는 $\hat{m}_j, \hat{\eta}_j$ 와 τ_{1k}, τ_{2k} 를 최소제곱추정에 의한 모수 추정값으로 정한다.

제안된 세 가지 방법들은 1) 모수추정과 2) 고장률 변화점추정의 두 가지 관점에서 비교되었다.

<표 1>은 표본크기 $n = 200$ 일 때 9가지의 모수군 (m_1, m_2, m_3) 에 대하여 세 가지 추정방법(1. Least Squares estimation(LS), 2. Maximum Likelihood estimation(ML), 3. Mixed Method estimation(MM))에 의한 모수추정량과 고장률 변화점추정량의 경험적 평균제곱오차를 구했다. m_3 의 추정의 경우만 제외하고는 거의 모든 경우 MM의 효율이 제일 좋다. ML의 효율은 MM의 효율과 같거나 조금 떨어진다. m_3 의 추정의 경우만 제외하고는 모든 경우 LS의 효율이 제일 떨어진다. m_3 의 추정의 경우 LS의 효율이 제일 좋은 이유는 모의실험 결과 구간 (τ_2, ∞) 에서의 표본수가 적는데 기인한다는 것을 알 수 있었다. 즉, 표본크기가 작을 때 LS의 효율이 제일 좋다. <표 1>은 <표 2>로 요약될 수 있다.

<표 2>에서는 주어진 모수군 (m_1, m_2, m_3) 에 대하여 세가지 모수 m_j, η_j, τ_j 에 대

한 경험적 평균제곱오차의 평균과 9개의 모수군 (m_1, m_2, m_3)들의 전체평균을 구했다. 이로부터 표본크기 $n = 200$ 일 때 평균적으로 MM의 효율이 제일 좋고 ML의 효율은 MM의 효율보다 조금 떨어진다는 것을 알 수 있다.

<표 3>은 표본크기 $n = 200$ 일 때 세 가지의 모수군 (m_1, m_2, m_3)에 대하여 모수 추정량과 고장률 변화점추정량의 경험적 평균제곱오차를 세 가지 중도절단률 5%, 10%, 20%에서 구한 것이다. ML과 MM의 효율은 중도절단률의 영향을 거의 받지 않으며 MM의 효율은 ML의 효율과 같거나 조금 떨어진다. <표 3>으로부터 중도절단의 경우 전체적으로 ML의 효율이 제일 좋으며 중도절단률이 커짐에 따라 LS에서 척도모수 η_j 에 대한 효율이 급격히 나빠진다는 것을 알 수 있다.

< 표 1 > m_j, η_j 와 τ_j 의 추정량들의 경험적 평균제곱오차

(m_1, m_2, m_3)		m_1	m_2	m_3	η_1	η_2	η_3	τ_1	τ_2
(.25, 1., 1.5)	LS	.0007	.0317	.0917	.9976	.0142	.0388	.0170	.0271
	ML	.0004	.0216	.1001	.2384	.0124	.0358	.0049	.0232
	MM	.0004	.0210	.1032	.1904	.0121	.0367	.0043	.0220
(.25, 1., 2.)	LS	.0007	.0575	.0857	.9938	.0147	.0111	.0161	.0098
	ML	.0004	.0316	.0998	.2413	.0126	.0101	.0059	.0049
	MM	.0004	.0317	.0992	.1895	.0119	.0097	.0044	.0047
(.25, 1., 3.)	LS	.0007	.0946	.1502	.9907	.0152	.0038	.0156	.0044
	ML	.0004	.0478	.1656	.2503	.0127	.0032	.0053	.0011
	MM	.0004	.0470	.1648	.1918	.0122	.0032	.0045	.0011
(.5 , 1., 1.5)	LS	.0029	.0314	.0915	.1397	.0139	.0386	.0113	.0276
	ML	.0017	.0231	.1018	.0509	.0131	.0343	.0069	.0232
	MM	.0017	.0219	.1036	.0478	.0125	.0363	.0063	.0218
(.5 , 1., 2.)	LS	.0029	.0572	.0855	.1392	.0142	.0111	.0113	.0099
	ML	.0017	.0349	.0999	.0521	.0133	.0097	.0074	.0048
	MM	.0017	.0324	.1003	.0472	.0122	.0096	.0063	.0046
(.5 , 1., 3.)	LS	.0029	.0932	.1501	.1390	.0144	.0038	.0112	.0045
	ML	.0017	.0594	.1694	.0523	.0125	.0033	.0066	.0012
	MM	.0017	.0490	.1663	.0470	.0123	.0032	.0063	.0011
(.75, 1., 1.5)	LS	.0066	.0315	.0917	.0538	.0138	.0388	.0100	.0277
	ML	.0038	.0256	.1012	.0217	.0141	.0327	.0068	.0228
	MM	.0038	.0245	.1030	.0216	.0132	.0358	.0066	.0217
(.75, 1., 2.)	LS	.0066	.0568	.0853	.0537	.0139	.0110	.0100	.0100
	ML	.0038	.0379	.1006	.0224	.0138	.0095	.0069	.0047
	MM	.0039	.0372	.1004	.0216	.0128	.0096	.0066	.0046
(.75, 1., 3.)	LS	.0066	.0929	.1508	.0537	.0142	.0038	.0100	.0045
	ML	.0039	.0561	.1685	.0231	.0135	.0033	.0064	.0013
	MM	.0039	.0576	.1656	.0216	.0130	.0032	.0068	.0011

표본크기 $n = 100, 150, 200$ 에 대해 <표 2>의 “9개의 모수군에 대한 평균” 부분을 구한 것이 <표 4>이다. <표 4>에서 표본크기가 커짐에 따라 1) 세 가지 추정량의 경험적 평균제곱오차가 전체적으로 준다는 것과 2) MM의 효율이 상대적으로 점점 좋아진다는 것을 알 수 있다.

〈 표 2 〉 각 추정량에 대한 경험적 평균제곱오차의 평균값

(m_1, m_2, m_3)		$\sum_{j=1}^3 \text{MSE}(\hat{m}_j)/3$	$\sum_{j=1}^3 \text{MSE}(\hat{\eta}_j)/3$	$\sum_{j=1}^2 \text{MSE}(\hat{\tau}_j)/3$
(.25, 1., 1.5)	LS	.0414	.3502	.0221
	ML	.0407	.0955	.0140
	MM	.0415	.0797	.0132
(.25, 1., 2.)	LS	.0480	.3399	.0130
	ML	.0439	.0880	.0054
	MM	.0438	.0704	.0045
(.25, 1., 3.)	LS	.0818	.3366	.0100
	ML	.0713	.0887	.0032
	MM	.0707	.0691	.0028
(.5, 1., 1.5)	LS	.0419	.0641	.0194
	ML	.0422	.0328	.0150
	MM	.0424	.0322	.0141
(.5, 1., 2.)	LS	.0485	.0548	.0106
	ML	.0455	.0250	.0061
	MM	.0448	.0230	.0055
(.5, 1., 3.)	LS	.0821	.0524	.0078
	ML	.0768	.0227	.0039
	MM	.0723	.0208	.0037
(.75, 1., 1.5)	LS	.0433	.0355	.0188
	ML	.0435	.0228	.0148
	MM	.0438	.0235	.0142
(.75, 1., 2.)	LS	.0496	.0262	.0100
	ML	.0474	.0152	.0058
	MM	.0472	.0147	.0056
(.75, 1., 3.)	LS	.0834	.0239	.0072
	ML	.0762	.0133	.0038
	MM	.0757	.0126	.0039
9개의 모수군 에 대한 평균	LS	.0578	.1426	.0132
	ML	.0542	.0449	.0080
	MM	.0536	.0384	.0075

〈 표 3 〉 $p\%$ 중도절단률에서의 m_j, η_j 와 τ_j 의 추정량들의 경험적 평균제곱오차

p	(m_1, m_2, m_3)		m_1	m_2	m_3	η_1	η_2	η_3	τ_1	τ_2
5	(.5, 1., 1.5)	LS	.0029	.0315	.0978	.2288	.0179	.0442	.0114	.0272
		ML	.0016	.0192	.1007	.0539	.0122	.0293	.0058	.0225
		MM	.0016	.0203	.0998	.0611	.0174	.0455	.0070	.0230
	(.5, 1., 2.)	LS	.0029	.0564	.0882	.2287	.0178	.0127	.0112	.0097
		ML	.0016	.0311	.0991	.0537	.0118	.0090	.0058	.0048
		MM	.0016	.0323	.0994	.0618	.0171	.0133	.0068	.0049
	(.5, 1., 3.)	LS	.0029	.0945	.1544	.2286	.0182	.0043	.0113	.0045
		ML	.0016	.0496	.1663	.0539	.0116	.0031	.0058	.0012
		MM	.0016	.0504	.1674	.0626	.0168	.0044	.0063	.0013
10	(.5, 1., 1.5)	LS	.0029	.0301	.1053	.3890	.0122	.0289	.0112	.0267
		ML	.0016	.0188	.0878	.0549	.0122	.0289	.0058	.0221
		MM	.0017	.0201	.0878	.1019	.0318	.0577	.0080	.0227
	(.5, 1., 2.)	LS	.0029	.0551	.0933	.3885	.0299	.0178	.0110	.0097
		ML	.0016	.0303	.0936	.0549	.0117	.0093	.0057	.0048
		MM	.0016	.0322	.0949	.1072	.0311	.0195	.0077	.0050
	(.5, 1., 3.)	LS	.0029	.0923	.1628	.3889	.0299	.0063	.0110	.0047
		ML	.0016	.0500	.1594	.0547	.0118	.0033	.0057	.0013
		MM	.0016	.0527	.1590	.1118	.0304	.0067	.0067	.0013
20	(.5, 1., 1.5)	LS	.0029	.0294	.1212	1.0223	.0846	.0982	.0111	.0271
		ML	.0015	.0189	.0792	.0539	.0128	.0392	.0056	.0183
		MM	.0017	.0211	.0755	.2913	.0937	.0688	.0088	.0197
	(.5, 1., 2.)	LS	.0029	.0546	.1040	1.0213	.0841	.0377	.0111	.0098
		ML	.0015	.0290	.0856	.0540	.0121	.0113	.0055	.0047
		MM	.0017	.0340	.0853	.3055	.0941	.0313	.0084	.0049
	(.5, 1., 3.)	LS	.0029	.0960	.1789	1.0215	.0840	.0142	.0110	.0048
		ML	.0015	.0488	.1604	.0536	.0118	.0040	.0056	.0013
		MM	.0016	.0538	.1587	.3266	.0920	.0124	.0080	.0014

〈 표 4 〉 표본크기에 따른 m_j , η_j 와 τ_j 의 추정량들에 대한 경험적 평균제곱오차의 평균값의 9개의 모수군에서의 평균

표본크기		m_j 의 추정량	η_j 의 추정량	τ_j 의 추정량
100	LS	.1501	.5742	.0195
	ML	.9667	.1520	.0527
	MM	.9602	.1030	.0501
150	LS	.0913	.2574	.0158
	ML	.0971	.0754	.0181
	MM	.0974	.0599	.0172
200	LS	.0578	.1426	.0132
	ML	.0542	.0449	.0080
	MM	.0536	.0384	.0075

참고문헌

- [1] Boardman, T. J. and Colvert, R. E. (1978), "Estimation in the Piece-Wise Constant Hazard Rate Model When the Data are Grouped," *Communications in Statistics* 8(5), pp. 417-432.
- [2] Bain, L. J. (1978), *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [3] Glaser, R. E. (1980), "Bathtub and Related Failure Rate Characterizations," *Journal of the American Statistical Association* 75, pp. 667-672.
- [4] Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958), "Nonparametric Estimation from Incomplete Observations," *Journal of the American Statistical Association* 53, pp. 457-481.
- [5] Kao, J. H. (1959), "A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life-Testing of Electron Tubes," *Technometrics* 1, pp. 389-407.
- [6] Nelson, W. (1972), "Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data," *Technometrics* 14, pp. 945-966.
- [7] Stitch, M., Johnson, G. M., Kirk, B. P. and Brauer, J. B. (1975), "Microcircuit Accelerated Testing Using High Temperature Operation Tests," *IEEE Transactions On Reliability* 24, pp. 238-250.