⊠ 연구논문

병렬형 시스템의 부분적 가속수명검사를 위한 최적계획

박희창
창원대학교 통계학과
이석훈
충남대학교 통계학과

Optimal design of Partially Accelerated Life Testing for the Parallel Systems

Hee-Chang Park
Dept. of Statistics, Changwon National University
Suk-Hoon Lee
Dept. of Statistics, Chungnam National University

Abstract

We consider optimal designs of partially accelerated life testing which is deviced for parallel systems with the considerably long life time. In partially step-stress life testing, test items are first run simultaneously at use condition for a specified time, and the surviving items are then run at accelerated condition until a predetermined censoring time. In partially constant-stress life testing, test items are run at either use or accelerated condition only until a specified censoring time. The optimal criterion for each test is to minimize either the generalized asymptotic variance of maximum likelihood(ML) estimators of the hazard rates at use condition and the acceleration factors or the asymptotic variance of the ML estimators of the acceleration factors.

1. 서론

오늘날 다양한 품질관리기법과 기술의 급속한 발전으로 인하여 제품의 신뢰도와 예상수명이 상당히 향상되고 있다. 따라서 이들 제품의 수명에 관한 정보를 정상조건(사용조건)에서 얻는다는 것은 거의 불가능하거나 가능하다고 하더라도 검사기간이 현실적으로 받아 들일 수 없을 만큼 장시간을 요구하는 동시에 많은 비용이 소요된다. 이러한 경우 제품 또는 시스템의 수명검사를 위해 가속수명검사(accelerated life testing; ALT) 또는 부분적 가속수명검사(partially accelerated life testing; PALT)를 하게 된다. ALT에서는 가속조건에서만 검사를 수행하게 되는 반면에 PALT에서는 정상조건과 가속조건 모두에서 검사를 수행하게 된다. 특정한 하나의 가속조건에서만 검사를 수행하여 정상조건에서의 고장률을 외삽법에 의해 추정하고자 하는 경우에는 ALT보다 PALT가 더 바람직하다. ALT가 고정충격 수명검사(constant-stress life testing; CSLT)와 단계충격 수명검사(step-stress life testing; SSLT)로 구분되는 것과 마찬가지로 PALT도 부분적 고정충격 수명검사(partially constant-stress life testing; PCLT)와 부분적 단계충격 수명검사(partially step-stress life testing; PSLT)로 나누어진다. PSLT는 적당한 시간간격을 두고 정상조건에서 시작하여 단계적으로 조건을 변화시켜 가면서 시스템의 수명을 검사하는 것이고, PCLT는 각 검사가 진행되는 동안에는 조건을 변화시키지 않으면서 시스템 수명을 정상조건 또는 가속조건에서만 검사하는 것이다. 이 때 조건을 변화시키는 것을 충격을 가한 것으로 간주한다.

관심있는 시스템을 정상조건보다 열악한 어떤 정해진 조건에서 검사를 수행하는 CSLT는 공학분야(Glaser(1984), Kitagawa 등(1984), Fettel 등(1980)) 및 독성학과 의학분야(Armitage와 Doll(1961), Hartley와 Sielken(1977))에서 주로 그 사용의 예를 구체적으로 볼 수 있다. 이러한 수요에 따라 Mann 등(1974)이 CSLT에 관한 전반적인 개념을 정리하였고, Nelson(1970, 1980), Nelson과 Hahn(1972, 1973), Nelson과 Kielpinski(1975, 1976), Nelson과 Meeker(1978), 그리고 Bhattacharyya와 Soejoeti(1981) 등이 많은 연구결과를 발표하였다. 여러 개의 부품으로 구성된 시스템의 CSLT에 관한 연구는 Klein과 Basu(1980, 1982)에 의하여 각 부품의 수명분포가 와이블 분포로 서로 독립이며, 부품들이 직렬로 시스템을 구성하는 경우에 대하여 수행되었다. 반면에 적당한 시간간격을 두고 단계적으로 조건을 변화시켜 가면서 시스템의 수명을 검사하는 SSLT에 관한 연구결과 또는 실제 적용사례는 Nelson(1980), Miller와 Nelson(1983) 이석훈(1989), 이석훈 등(1992), Bai 등(1989), Bai와 Chun(1991), 박희창 등(1991), 그리고 박희창과 이석훈(1992, 1995a) 등의 연구에서 나타난다. 이들의 연구는 단순 SSLT에서의 모형의 개발 및 추론에 관한 연구와 최적 검사계획에 관한 연구의 두 분야로 나누어진다. Bai와 Chun(1991)은 시스템을 기본 단위로 생각해 오던 기존의 연구를 확장시키는 의미에서 여러 개의 부품의 수명분포가 지수분포로 서로 독립적이고, 시스템이 직렬인 경우에 Miller와 Nelson(1983)이 사용한 모든 가정하에서 단순 SSLT의 최적설계에 관한 결과를 발표하였다. 박희창 등(1991)은 두 개의 부품의 수

명분포가 지수분포로 서로 독립적이고 시스템이 병렬형인 경우의 최적계획에 관하여 연구하였다. 이석훈 등(1992)은 두 부품의 수명을 나타내는 확률변수가 Block과 Basu(1974)에 의하여 제안된 이변량 지수분포를 따르는 것으로 가정하고 이에 상응하는 충격누적에 관계되는 기본 모형인 CE모형(cumulative exposure model)을 이변량 CE모형으로 확장하여 두 부품이 서로 종속적인 직렬형 시스템의 최적검사계획에 관하여 연구하였다. 박희창과 이석훈(1992)은 Block과 Basu가 제안한 이변량 지수분포를 이변량 시스템의 수명함수로 고려하여 Nelson(1980)이 제안한 CE모형을 종속적인 병렬형 시스템에서 이용할 수 있도록 제안하였다. 또한 박희창과 이석훈(1995a)은 절단된 자료가 있는 병렬형 시스템의 단계적 충격수명검사를 위한 최적계획에 관하여 연구하였다.

PALT에 관한 연구로는 DeGroot와 Goel(1979)이 지수분포를 수명분포로 가정하여 PALT를 베이즈적(Bayesian)인 입장에서 접근하여 관심있는 모수의 추정과 최적 실험계획을 얻는 과정을 제안하였다. Bai와 Chung(1992)은 절단된 자료가 있는 경우에 대하여 수명분포를 지수분포로 가정하여 정상조건에서의 고장률과 가속인자에 대한 최우추정량을 구하고, 최적 검사계획에 관한 결과를 발표하였다. 또한 Bai 등(1993)은 수명이 대수정규분포를 따르는 시스템을 PSLT에 투입할 경우에 최적 실험계획방법을 발표하였다. 박희창(1995)은 각 부품의 수명분포가 지수분포로 서로 독립인 직렬형 시스템의 PCLT에 관한 최적 검사계획을 제안하였고, 박희창과 이석훈(1995b)은 서로 독립인 다수의 부품으로 구성된 직렬형 시스템의 단순 PSLT에 관한 최적 실험계획 문제를 논의하였다

본 연구에서는 직렬형 시스템의 최적 계획문제를 확장하여 서로 독립인 부품으로 구성된 병렬형 시스템의 단순 PALT에 관한 최적 실험계획문제를 고찰하고자 한다. 병렬형 시스템의 PALT에 관한 최적 검사계획문제는 예를 들어 비행기의 엔진이나 배의 엔진 등의 개념과 동일한 기계들을 대상으로 적용이 가능하리라고 본다. 여러 개의 부품으로 구성된 병렬형 시스템의 최적 계획은 두 개의 부품으로 구성된 병렬형 시스템의 단순한 확장에 불과하므로 이 논문에서는 두 개의 부품인 경우를 고려하였다. 최적화 기준으로는 각 부품의 가속인자와 정상조건하에서의 고장률에 관한 최우추정량의 일반화 점근분산의 합과 가속인자에 관한 최우추정량의 점근분산의 합을 이용한다. 전자는 각 부품의 가속인자와 정상조건에서의 고장률 모두를 추정하고자 하는 경우에 유용하고, 후자는 가속조건에서 관측된 고장데이터를 정상조건으로 외삽하는데 있어서 가속인자가 이용되는 경우에 유용한 기준이 된다. 제 2절에서는 본 연구에서 사용하고자 하는 기호와 기본 가정, 그리고 검사과정을 기술하여 PSLT와 PCLT 모형에 관한 문제를 논의하고, PSLT에서의 최적 변환시점의 결정방법과 PCLT에서의 최적 표본할당비율을 구하는 과정을 고찰한 후, 그 결과를 근거로 하여 제 3절에서는 예제를 통하여 최적설계에 관한 토의를 하고자 한다. 이 연구의 관심이 되는 병렬형 시스템에 관한 PALT의 검사계획과 관측과정은 다음과 같은 기호로 표현된다.

n : PALT에서 검사에 투입되는 시스템의 총수

n_{ui} : PALT에서 정상조건하에서 부품 i에 의해 고장난 시스템의 수(i=1, 2)

n_{ai} : PALT에서 가속조건하에서 부품 i에 의해 고장난 시스템의 수

n_{ci} : PSLT에서 부품 i에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

n_{c3} : PSLT에서 두 부품 모두에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

n_{uci} : PCLT에서 정상조건하에서 부품 i에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

n_{aci} : PCLT에서 가속조건하에서 부품 i에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

n_{uc3} : PCLT에서 정상조건하에서 두 부품 모두에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

n_{ac3} : PCLT에서 가속조건하에서 두 부품 모두에 의해 고장나지 않은 시스템의 수

λ_i : PALT에서 정상조건하에서 부품 i의 고장률

β_i : PALT에서 부품 i의 가속인자 (β_i>1)

τ : PSLT에서의 가속조건 변환시점

ψ : PALT에서 최종 검사시점($\tau<\psi$)

X : PSLT에서 정상조건하에서의 부품의 수명

T : PSLT에서 검사 전체에서의 부품의 수명

t_{uik} : PALT에서 정상조건하에서 부품 i에 의해 고장난 시스템 중 k번째 시스템의 수명(k=1, 2, ..., n_{ui})

t_{aij} : PALT에서 가속조건하에서 부품 i에 의해 고장난 시스템 중 j번째 시스템의 수명(j=1, 2, ..., n_{ai})

π : PCLT에서 가속조건검사에 투입되는 표본할당비율

$\bar{\pi}$: PCLT에서 정상조건검사에 투입되는 표본할당비율 ($\bar{\pi}=1-\pi$)

2. 최적화 과정

2.1 PSLT 모형

본 절에서는 단순 PSLT의 최적 계획을 수립하기 위해 필요한 기본적인 가정, 검사 및 관측과정, 부품의 고장률과 가속인자의 최우추정량, 그리고 최적 변환시점의 결정 방법 등에 관하여 알아 보고자 한다.

2.1.1 기본 가정

PSLT의 최적계획을 위해 다음과 같이 가정한다.

[가정 1] 검사에 투입되는 각 시스템의 수명 및 시스템을 구성하고 있는 각 부품의 수명은 서로 독립이다.

[가정 2] 정상조건하에서 시스템을 구성하고 있는 부품 $i(i=1,\ 2)$의 수명은 고장률이 λ_i인 지수분포를 따른다.

[가정 3] 시스템을 구성하고 있는 각 부품의 누적되는 충격과 수명과의 관계는 DeGroot와 Goel(1979)의 모형을 따른다. 즉,

$$T = \begin{cases} X, & X \le \tau \\ \tau + \dfrac{(X-\tau)}{\beta}, & X > \tau \end{cases}$$

이다.

2.1.2 검사 및 관측과정

1. 검사에 투입되는 n개의 시스템을 먼저 정상조건하에서 검사한다.
2. 시간 τ가 되기 전에 고장난 시스템의 경우는 고장날 때까지의 시간을 마지막까지 작동한 부품의 확인과 함께 관측값으로 받아들인다. 시간 τ가 될 때까지 고장나지 않은 시스템은 가속조건하에서 최종 검사시점인 ψ까지 계속 작동하도록 하여 각 조건하에서 고장난 시스템의 수와 고장난 시간, 그리고 고장나지 않은 시스템의 수를 관측값으로 받아 들이며, 이들은 모두 확률변수가 된다.

2.1.3 최적 변환시점의 결정

검사 및 관측과정으로부터 얻어지는 자료로부터 우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L(\beta,\lambda) = \ & \Big(\prod_{i=1}^{2}\prod_{k=1}^{n_{ui}}\lambda_i \exp[-\lambda_i\, t_{uik}]\{1-\exp[-(\lambda_{.}-\lambda_i)t_{uik}]\}\Big) \\ & \times\Big(\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{n_{ai}}\beta_i\lambda_i \exp[-\lambda_i\{\tau+\beta_i(t_{aij}-\tau)\}] \\ & \qquad \times\{1-\exp[-(\lambda_{.}-\lambda_i)\{\tau+(\beta_{.}-\beta_i)(t_{aij}-\tau)\}]\}\Big) \\ & \times\Big(\prod_{i=1}^{2}\exp[-(n_{ci}+n_{c3})\{\tau+\beta_i(\psi-\tau)\}] \\ & \qquad \times\ \{1-\exp[-(\lambda_{.}-\lambda_i)\{\tau+(\beta_{.}-\beta_i)(\psi-\tau)\}]\}^{n_{ci}}\Big) \qquad (1) \end{aligned}$$

여기서 $\lambda_{.} = \lambda_1 + \lambda_2$이고, $\beta_{.} = \beta_1 + \beta_2$이다.

모수 β_i와 $\lambda_i(i=1,\ 2)$의 최우추정량은 식(1)에 대수를 취하여 대수우도함수를 구한 후 각 모수에 관하여 편미분한 두 개의 우도방정식의 해로부터 구할 수 있다.

일반적으로 PSLT에서는 가속조건 변환시점을 결정하기 위한 최적화 기준으로 최우추정량들의 점근분산을 고려한다. 본 연구에서는 시스템이 2개의 부품으로 이루어진 병렬형이므로 2차 편도함수를 계산하여 β_i와 λ_i에 관한 정보행렬을 구한 후 다음

과 같이 얻어진 $\widehat{\beta_i}$ 와 $\widehat{\lambda_i}$ 의 일반화 점근분산의 합인 V_{sg}, $\widehat{\beta_i}$ 의 점근분산의 합인 $V_{s\beta}$, 그리고 $\widehat{\lambda_i}$ 의 점근분산의 합인 $V_{s\lambda}$ 를 변환시점을 결정하기 위한 최적화 기준으로 한다.

$$
\begin{aligned}
V_{sg} &= \sum_{i=1}^{2} GeAsVar\,(\widehat{\beta_i},\ \widehat{\lambda_i}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\beta_i^2 \lambda_i^2}{P_{i11}P_{i22} - P_{i12}^2} \\
V_{s\beta} &= \sum_{i=1}^{2} AsVar(\widehat{\beta_i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} \frac{\beta_i^2 P_{i22}}{P_{i11}P_{i22} - P_{i12}^2} \\
V_{s\lambda} &= \sum_{i=1}^{2} AsVar(\widehat{\lambda_i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i^2 P_{i11}}{P_{i11}P_{i22} - P_{i12}^2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
P_{i11} =\ & A_{i1} - B_{i1} + \beta_i^3\lambda_i^3(\psi-\tau)^2(B_{i5} - B_{i3}) \\
& + 2\beta_i^2\lambda_i^2\{(\beta\lambda)_{\cdot} - \beta_i\lambda_i\}\{A_{i7} - (\psi-\tau)B_{i6} - B_{i7}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{i12} =\ & A_{i2} - B_{i2} - \beta_i\lambda_i B_{i4} - \beta_i\lambda_i(1-\lambda_i\tau)\{(\beta\lambda)_{\cdot} - \beta_i\lambda_i\}\{A_{i6} - (\psi-\tau)B_{i5} - B_{i6}\} \\
& + \beta_i^2\lambda_i^2\{(\beta\lambda)_{\cdot} - \beta_i\lambda_i\}\{2A_{i7} - (\psi-\tau)^2 B_{i5} - 2(\psi-\tau)B_{i6} - 2B_{i7}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{i22} =\ & A_{i3} - B_{i1} - \lambda_i^2 A_{i4} + \lambda_i^2\{(\beta\lambda)_{\cdot} - \beta_i\lambda_i\}[\tau^2 A_{i5} - \{\tau + \beta_i(\psi-\tau)\}^2 B_{i5}] \\
& + 2\beta_i\lambda_i^2\{(\beta\lambda)_{\cdot} - \beta_i\lambda_i\}[\tau A_{i6} - \{\tau + \beta_i(\psi-\tau)\}B_{i6} + \beta_i(A_{i7} - B_{i7})]
\end{aligned}
$$

$$
A_{i1} = a_i - \frac{\beta_i\lambda_i}{(\beta\lambda)_{\cdot}}\, a_{\cdot}, \qquad A_{i2} = a_i - \frac{\beta_i^2\lambda_i^2}{(\beta\lambda)_{\cdot}^2}\, a_{\cdot}
$$

$$
A_{i3} = 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_{\cdot}}\, a_{\cdot} - \frac{\beta_i\lambda_i}{(\beta\lambda)_{\cdot}}\, a_{\cdot} - \frac{1}{(\lambda_{\cdot} - \lambda_i)\tau}\left(1 - \frac{a_{\cdot}}{a_i}\right) + \frac{\lambda_{\cdot} - \lambda_i}{\lambda_{\cdot}^2\tau}(1 - a_{\cdot})
$$

$$
A_{i4} = \frac{\tau}{(1-a_i)^2}\left\{\tau a_{\cdot} - \frac{(\lambda_{\cdot} - \lambda_i)\tau}{\lambda_{\cdot}}\, a_{\cdot} a_i - \frac{1}{\lambda_{\cdot} - \lambda_i}(a_i - a_{\cdot}) + \frac{\lambda_{\cdot} - \lambda_i}{\lambda_{\cdot}^2}\, a_i(1 - a_{\cdot})\right\}
$$

$$
A_{i5} = a_{\cdot}\left\{\frac{1}{(\beta\lambda)_{\cdot}} - \frac{1}{(\beta\lambda)_{\cdot} + \beta_i\lambda_i}\, a_i\right\}, \quad A_{i6} = a_{\cdot}\left[\frac{1}{(\beta\lambda)_{\cdot}^2} - \frac{1}{\{(\beta\lambda)_{\cdot} + \beta_i\lambda_i\}^2}\, a_i\right]
$$

$$
A_{i7} = a_{\cdot}\left[\frac{1}{(\beta\lambda)_{\cdot}^3} - \frac{1}{\{(\beta\lambda)_{\cdot} + \beta_i\lambda_i\}^3}\, a_i\right], \qquad B_{i1} = b_i - \frac{\beta_i\lambda_i}{(\beta\lambda)_{\cdot}}\, b_{\cdot}
$$

$$
B_{i2} = b_i - \frac{\beta_i^2\lambda_i^2}{(\beta\lambda)_{\cdot}^2}\, b_{\cdot}\{1 + (\beta\lambda)_{\cdot}(\psi - \tau)\}, \qquad B_{i3} = \frac{1}{(\beta\lambda)_{\cdot} + \beta_i\lambda_i}\, b_{\cdot} b_i
$$

$$B_{i4} = b_{.}(1-b_i)(\psi-\tau)[1-\lambda_i\{\tau+\beta_i(\psi-\tau)\}],\ B_{i5} = b_{.}\left\{\frac{1}{(\beta\lambda)_{.}} - \frac{1}{(\beta\lambda)_{.}+\beta_i\lambda_i}\,b_i\right\}$$

$$B_{i6} = b_{.}\left[\frac{1}{(\beta\lambda)_{.}^2}\ \frac{-1}{\{(\beta\lambda)_{.}+\beta_i\lambda_i\}^2}\,b_i\right], \quad B_{i7} = b_{.}\left[\frac{1}{(\beta\lambda)_{.}^3}\ \frac{-1}{\{(\beta\lambda)_{.}+\beta_i\lambda_i\}^3}\,b_i\right]$$

$$a_i = \exp[-\lambda_i\tau], \quad b_i = \exp[-\lambda_i\{\tau+\beta_i(\psi-\tau)\}], \quad a_{.} = a_1a_2\ , \quad b_{.} = b_1b_2$$

이다.

2.2 PCLT 모형

본 절에서는 단순 PCLT의 최적 계획을 수립하기 위해 필요한 기본적인 가정, 검사 및 관측과정, 부품의 고장률과 가속인자의 최우추정량, 그리고 최적 표본할당비율의 결정방법 등에 관하여 알아 보고자 한다.

2.2.1 기본 가정

PCLT의 최적계획을 위해 다음과 같이 가정한다.

[가정 1] 검사에 투입되는 각 시스템의 수명 및 시스템을 구성하고 있는 각 부품의 수명은 서로 독립이다.

[가정 2] 정상조건에서 검사에 투입되는 시스템을 구성하고 있는 부품 $i(i=1,\ 2)$의 수명은 고장률이 λ_i인 지수분포를 따른다.

[가정 3] 가속조건에서 검사에 투입되는 시스템을 구성하고 있는 부품 i의 수명은 고장률이 $\beta_i\lambda_i$인 지수분포를 따른다.

[가정 4] 각 검사가 진행되는 동안에는 조건을 변화시키지 않는다.

2.2.2 검사 및 관측과정

1. 검사에 투입되는 시스템 중에서 임의의 $n\bar{\pi}$개의 시스템은 정상조건검사에 투입하고, 나머지 $n\pi$개의 시스템은 가속조건검사에 투입한다.

2. 각 검사에 투입된 시스템은 최종검사시점인 ψ까지 작동하도록 하여 각 조건에서 마지막까지 작동한 부품의 확인과 함께 고장난 시스템의 수와 고장날 때까지의 시간, 그리고 고장나지 않은 시스템의 수를 관측값으로 받아들인다. 여기서 고장날 때까지의 시간 t 뿐만 아니라 고장난 시스템의 수를 나타내는 n_{ui}와 n_{ai}, 그리고 고장나지 않은 시스템의 수인 n_{uc}와 n_{ac}도 확률변수가 된다.

2.2.3 최적 표본할당비율의 결정

먼저 검사 및 관측과정으로부터 얻어지는 자료를 이용하여 부품 $i(i=1,\ 2)$의 우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}L_i \;=\;& \Big(\prod_{k=1}^{n_{ui}} \lambda_i \,\exp[-\lambda_i t_{uik}]\{1-\exp[-(\lambda_{.}-\lambda_i)t_{uik}]\}\Big)\\
&\times\Big(\prod_{k=1}^{n_{uci}} \exp[-\lambda_i\psi]\{1-\exp[-(\lambda_{.}-\lambda_i)\psi]\}\Big)\\
&\times\Big(\prod_{j=1}^{n_{ai}} \beta_i\lambda_i \exp[-\beta_i\lambda_i t_{aij}]\{1-\exp[-\{(\beta\lambda)_{.}-\beta_i\lambda_i\}t_{aij}]\}\Big)\\
&\times\Big(\prod_{j=1}^{n_{aci}} \exp[-\beta_i\lambda_i\psi]\{1-\exp[-\{(\beta\lambda)_{.}-\beta_i\lambda_i\}\psi]\}\Big)\\
&\times \exp[-(n_{uc3}\lambda_i + n_{ac3}\beta_i\lambda_i)\psi] \qquad (3)\end{aligned}$$

여기서 $\lambda_{.} = \lambda_1 + \lambda_2$이고, $(\beta\lambda)_{.} = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2$이다. 식(3)으로부터 얻어지는 시스템에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L = L_1 \cdot L_2$$

모수 β_i와 λ_i의 최우추정량은 각 모수에 관하여 편미분한 우도방정식의 해로부터 얻어지며, 일반적으로 PLCT에서 표본할당비율을 결정하기 위한 최적화 기준으로는 2.1.3절과 동일한 과정에 의해서 다음과 같이 얻어진 최우추정량 $\hat{\beta}$와 $\hat{\lambda}$의 일반화 점근분산, $\hat{\beta}$의 점근분산, $\hat{\lambda}$의 점근분산 등을 고려한다.

$$\begin{aligned}V_{cg} &= \sum_{i=1}^{2} GeAsVar(\hat{\beta}_i,\ \hat{\lambda}_i) = \frac{1}{n^2\pi}\sum_{i=1}^{2}\frac{\beta_i^2\lambda_i^2}{P_{ui}P_{ai}-D_i\pi}\\
V_{c\beta} &= \sum_{i=1}^{2} AsVar(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{2}\frac{\beta_i^2\{P_{ui}-(P_{ui}-P_{ai})\pi\}}{P_{ui}P_{ai}-D_i\pi}\\
V_{c\lambda} &= \sum_{i=1}^{2} AsVar(\hat{\lambda}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda_i^2 P_{ai}}{P_{ui}P_{ai}-D_i\pi} \qquad (4)\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}D_i &= (P_{ui}-P_{ai})P_{ai} + R_i^2\\
P_{ui} &= (1-A_1)(1-A_2) + \frac{\lambda_i^2\psi^2 A_{.}}{1-A_i} - \left\{\frac{1}{\psi} - \frac{\lambda_i^2\psi A_i}{(1-A_i)^2}\right\}Q_{ui}\\
P_{ai} &= (1-B_1)(1-B_2) + \frac{\beta_i^2\lambda_i^2\psi^2 B_{.}}{1-B_i} - \left\{\frac{1}{\psi} - \frac{\beta_i^2\lambda_i^2\psi B_i}{(1-\beta_i)^2}\right\}Q_{ai}\end{aligned}$$

$$R_i = \beta_i\lambda_i Q_{a.} + \beta_i\lambda_i\psi B_i\left\{\frac{1-B_.}{B_i} + \frac{\beta_i\lambda_i\psi B_.}{B_i(1-B_i)}\right\} - \beta_i\lambda_i\left\{\frac{1}{1-B_i} - \frac{\beta_i\lambda_i\psi B_i}{(1-B_i)^2}\right\}Q_{ai}$$

$$Q_{ui} = \frac{1}{\lambda_. - \lambda_i}\left(1 - \frac{A_.}{A_i}\right) - \psi\frac{A_.}{A_i} + \frac{\lambda_. - \lambda_i}{\lambda_.}\psi A_. - \frac{\lambda_. - \lambda_i}{\lambda_.^2}(1 - A_.)$$

$$Q_{ai} = \frac{1}{(\beta\lambda)_. - \beta_i\lambda_i}\left(\frac{1-B_.}{B_i}\right) - \psi\frac{B_.}{B_i} + \frac{(\beta\lambda)_. - \beta_i\lambda_i}{(\beta\lambda)_.}\psi B_. - \frac{(\beta\lambda)_. - \beta_i\lambda_i}{(\beta\lambda)_.^2}(1-B_.)$$

$$A_i = \exp[-\lambda_i\psi], \qquad B_i = \exp[-\beta_i\lambda_i\psi]$$

$$A_. = A_1A_2, \qquad B_. = B_1B_2, \qquad Q_{a.} = Q_{a1} + Q_{a2}$$

이다.

먼저 $\hat{\beta}_i$와 $\hat{\lambda}_i$의 일반화 점근분산의 합인 V_{cg}를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 π_g를 구하기 위해 V_{cg}를 φ에 관하여 미분한 후 0으로 놓고 방정식을 풀면 다음과 같은 π_g의 해를 얻는다.

$$\pi_g = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_{ui}P_{ai}}{2\sum_{i=1}^{2} D_i} \tag{5}$$

다음에는 $\hat{\beta}_i$의 일반화 점근분산의 합인 $V_{c\beta}$를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율 π_β를 구하기 위해 위에서와 같은 방법으로 구하면 다음과 같은 두 개의 해가 얻어진다.

$$\pi_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{2}P_{ui}D_i - \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2}P_{ui}D_i\right)^2 + \left\{\sum_{i=1}^{2}(P_{ai}-P_{ui})D_i\right\}\left(\sum_{i=1}^{2}P_{ui}^2P_{ai}\right)}}{\sum_{i=1}^{2}(P_{ai}-P_{ui})D_i}$$

$$\pi_2 = \frac{-\sum_{i=1}^{2}P_{ui}D_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2}P_{ui}D_i\right)^2 + \left\{\sum_{i=1}^{2}(P_{ai}-P_{ui})D_i\right\}\left(\sum_{i=1}^{2}P_{ui}^2P_{ai}\right)}}{\sum_{i=1}^{2}(P_{ai}-P_{ui})D_i} \tag{6}$$

여기서 π는 표본할당비율이므로 양의 값이어야 한다. 따라서 π_2를 최적 표본할당비율 π_β로 선정한다. 마지막으로 $\hat{\lambda}_i$의 일반화 점근 분산의 합인 $V_{c\lambda}$를 최소가 되게

하는 φ_λ는 0.0의 단순해(trivial solution)를 갖는다. 이는 모든 시스템을 정상조건하에서만 검사하는 것을 의미하므로 $V_{c\lambda}$는 최적화 기준으로 적합하지 않다.

3. 예제 및 토의

이 절에서는 예제를 통하여 가속인자와 고장률의 변화에 따른 최적 변환시점을 탐색하는 동시에 최적 표본할당비율을 결정하는 문제에 관하여 토의하고자 한다. 먼저 최적 변환시점을 탐색하는 문제에 관하여 고찰해보자.

최적화 기준으로는 위에서 논의한 일반화 점근분산의 합과 가속인자의 점근분산의 합, 그리고 고장률의 점근분산으로 하였고, 이를 최소화하는 최적 변환시점을 Brent (1973)의 방법을 이용하여 수치해석적으로 구하였다. <표 1>은 최종 검사시점 ϕ를 100으로 하고, 각 부품의 고장률을 모두 0.01로 하여 각 부품의 가속인자의 값을 여러 가지로 변화시켰을 때, 일반화 점근분산의 합인 V_{sg}를 최소가 되게 하는 최적 변환시점의 변화하는 양상을 나타낸 것이다. 이 표에서 보는 바와 같이 부품의 가속인자의 값이 커질수록, 즉 검사가 정상조건보다 더 열악한 조건에서 행해질수록 가속조건 변환시점인 τ의 값이 커짐을 알 수 있다. <표 2>는 위의 예에 대하여 가속인자의 점근분산의 합인 $V_{s\beta}$를 최소화하는 최적 변환시점의 변화를 나타낸 것이다. 최적화 기준이 V_{sg}인 경우와 마찬가지로 검사가 정상조건보다 더 열악한 조건에서 행해질수록 τ의 값이 커지는 것을 알 수 있다. 또한 고장률의 점근분산의 합인 $V_{s\lambda}$를 최적화 기준으로 선택한 경우에는 고장률과 가속인자의 크기에 관계없이 항상 최적 변화시점 τ와 최종검사시점 ϕ가 일치하는데, 이는 모든 시스템을 정상 조건에서만 검사하는 것을 의미하므로 최적화 기준으로 적합하지 않다.

< 표 1 > 가속인자의 변화에 따른 최적 변환시점(최적화기준: V_{sg})

β_2 \ β_1	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
5.0	67.7234	68.0334	68.5302	69.1401	69.8347	70.5920
6.0	68.0334	68.4951	69.1015	69.7800	70.5036	71.2568
7.0	68.5302	69.1015	69.7630	70.4641	71.8668	71.9179
8.0	69.1401	69.7800	70.4641	71.1633	71.8668	72.5699
9.0	69.8347	70.5036	71.1856	71.8668	72.5427	73.2114
10.0	70.5920	71.2568	71.9179	72.5699	73.2114	73.8428

< 표 2 > 가속인자의 변화에 따른 최적 변환시점(최적화 기준: $V_{s\beta}$)

β_2 \ β_1	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
5.0	71.5740	71.6615	71.8401	72.0670	72.3571	72.7215
6.0	71.6615	71.9315	72.2954	72.6885	73.1042	73.5468
7.0	71.8401	72.2954	72.7914	73.2859	73.7747	74.2626
8.0	72.0670	72.6885	73.2859	73.8491	74.3839	74.8991
9.0	72.3571	73.1042	73.7747	74.3839	74.9473	75.4779
10.0	72.7215	73.5468	74.2626	74.8991	75.4779	76.0149

위에서 고찰한 가속인자와 고장률의 변화에 따른 최적 변환시점의 변화하는 양상을 고찰하였는데, 위에서 토의한 모든 결과는 박희창 등(1995b)이 연구한 직렬형 시스템에서의 결과와 일치한다는 것을 알 수 있다.

다음으로 가속인자와 고장률의 변화에 따른 최적 표본할당문제에 관하여 토의하고자 한다. 최적화 기준으로 일반화 점근분산의 합인 V_{cg}를 최소화하는 π_g에 관하여 고찰해 보자. 각 부품의 고장률을 모두 0.01로 하고, 최종 검사시간 ϕ를 50으로 하여 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당비율을 계산한 결과 <표 3>과 같다. 이 표에서 보는 바와 같이 가속인자의 값이 클수록 π_g의 값이 커진다. 마지막으로 $\widehat{\beta_i}$의 점근 분산의 합인 $V_{c\beta}$를 최소화하는 π_β에 관하여 고려해 보고자 한다. 위의 예에서와 마찬가지로 각 부품의 고장률을 모두 0.01로 하고, 최종 검사시간 ϕ를 50으로 하여 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당비율을 구한 결과 <표 4>와 같다. 이 표에서 보는 바와 같이 각 부품의 가속인자의 값이 동시에 커질수록 π_β의 값이 커지고, 하나의 부품의 가속인자의 값에 비해 다른 하나의 가속인자의 값이 상당히 크거나 작은 경우에는 π_β의 값이 작아진다. 이러한 결과는 박희창(1995)이 연구한 직렬형 시스

< 표 3 > 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당비율 (최적화기준 : V_{cg})

β_2 \ β_1	1.5	3.5	5.5	7.5	9.5
1.5	0.5029	0.5179	0.5474	0.5801	0.6055
3.5	0.5179	0.5408	0.5827	0.6359	0.6890
5.5	0.5474	0.5827	0.6342	0.7009	0.7739
7.5	0.5801	0.6359	0.7009	0.7808	0.8699
9.5	0.6055	0.6890	0.7739	0.8699	0.9753

< 표 4 > 가속인자의 변화에 따른 최적 표본할당비율 (최적화기준 : $V_{c\beta}$)

β_2 \ β_1	1.5	3.5	5.5	7.5	9.5
1.5	0.1596	0.1859	0.1801	0.1659	0.1528
3.5	0.1859	0.2188	0.2225	0.2179	0.2123
5.5	0.1801	0.2225	0.2330	0.2336	0.2318
7.5	0.1659	0.2179	0.2336	0.2378	0.2385
9.5	0.1528	0.2123	0.2318	0.2385	0.2409

템에서의 결과와 일치한다. 또한 <표 3>과 <표 4>를 통하여 두 개의 최적화 기준을 비교해 볼 때, V_{cg}를 사용한 경우보다 $V_{c\beta}$를 사용한 경우 최적 표본할당비율의 값이 작다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

단순 PALT는 정상조건과 특정한 하나의 가속조건에서 검사를 수행하여 정상조건에서의 고장률을 외삽법에 의해 추정하고자 하는 경우에 이용되는 검사방법이다.

이 연구에서는 독립적인 두 개의 부품으로 구성된 병렬형 시스템의 PALT에 관한 최적 검사계획문제를 고찰하였다. 검사에 투입되는 각 시스템 및 시스템을 구성하고 있는 각 부품의 수명은 서로 독립이고, 지수분포를 따르는 것으로 가정하였다. PSLT에서는 각 부품의 누적되는 충격의 효과는 DeGroot와 Goel(1979)의 모형을 따르는 것으로 가정하여 각 부품의 고장률과 가속인자의 최우추정량을 구하였다. 또한 각 부품의 고장률과 가속인자에 관한 최우추정량의 일반화 점근분산의 합과 각 부품의 가속인자에 관한 최우추정량의 점근분산의 합을 구하여 이를 최소가 되게 하는 최적 변환시점을 결정하는 방법을 제안하였다. PCLT에서는 각 부품의 고장률과 가속인자의 최우추정량의 일반화 점근분산의 합과 각 부품의 가속인자에 관한 최우추정량의 점근분산의 합을 구하여 이를 최소가 되게 하는 최적 표본할당비율을 제안하였다. 본 논문에서는 병렬형 시스템의 PALT에 관한 모수의 추정과 최적설계문제를 고려하였으나 최적화 기준의 결정에 관한 논의는 하지 않았다. 최적화 기준을 결정하는데 있어서 필요한 모수값과 최종검사시점의 값은 예비실험이나 해당분야 전문가들의 사전경험을 토대로 결정할 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 박희창(1995), "다수의 부품으로 구성된 직렬형 시스템의 부분적 고정충격 수명검사에 관한 최적계획," 「한국통계학회논문집」, 제 2권, 2호, pp. 395-403.

[2] 박희창, 이석훈(1992), "종속적인 병렬형 시스템의 최적 검사계획," 「충남과학연구지」, 제 19권, 2호, pp. 10-15.

[3] 박희창, 이석훈(1995a), "절단된 자료가 있는 병렬형 시스템의 단계적 충격수명검사," 「품질경영학회지」, 제 23권, 1호, pp. 15-28.

[4] 박희창, 이석훈(1995b), "부분적 단계충격 수명검사에 관한 직렬형 시스템의 최적 검사계획," 「응용통계연구」, 제 8권, 2호, pp. 121-132.

[5] 박희창, 임대혁, 최만석, 이석훈(1991), "이변량 시스템의 단계적 충격검사를 위한 최적 실험계획," 「충남과학연구지」, 제 18권, 2호, pp. 24-37.

[6] 이석훈(1989), "계단식 충격 생명검사에 관한 연구," 「응용통계연구」, 제 2권, 2호, pp. 61-78.

[7] 이석훈, 박희창, 박래현(1992), "두 개의 부품으로 구성된 시스템의 단계적 충격생명 검사에 관한 연구," 「응용통계연구」, 제 5권, 2호, pp. 193-208.

[8] Armitage, P. and Doll, R.(1961), "Stochastic Models for Carcinogens," *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp. 19-38.

[9] Bai, D.S. and Chun, Y.R.(1991), "Optimum Simple Step Stress Accelerated Life Tests with Competing Causes of Failure," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 40, No. 5, pp. 622-627.

[10] Bai, D.S., Kim, M.S., and Lee, S.H.(1989), "Optimum Simple Step Stress Accelerated Life Tests with Censoring," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 38, pp. 528-532.

[11] Bai, D.S. and Chung, S.W.(1992), "Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Exponential Distribution under Type I Censoring," *IEEE transactions on Reliability*, Vol. 41, No. 3, pp. 400-406.

[12] Bai, D.S. and Chung, S.W., and Chun, Y.R.(1993), "Optimal Design of Partially Accelerated Life Tests for Lognormal Distribution under Type I Censoring," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 40, pp. 85-92.

[13] Bhattacharyya, G.K. and Soejoeti, Z.(1981), "On the Performance of Least Squares Estimator in Type-II Censored Aaccelerated Life Tests," *IAPQR Transactions-Jour. Ind. Assoc. for Productivity, Quality and Reliability*, Vol 6, No. 1, pp. 39-55.

[14] Block, H.W. and Basu, A.P.(1974), "A Continuous Bivariate Exponential Extension," *Journal of the American Statistitcal Associations*, Vol. 69, pp. 1031-1037.

[15] Brent, R.P.(1973), *Algorithms for Minimization without Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[16] DeGroot, M.H. and Goel, P.K.(1979), "Bayesian Estimation and Optimal Designs partially Accelerated Life Testing," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol 26, pp. 223-235.

[17] Fedorov, V.V.(1972), *Theory of D-Optimal Experiments*, Academic Press, Newyork.

[18] Fettel, B.E., Johnston, D.R. and Morris, P.E.(1980), "Accelerated Life Testing of Prothetic Heart Valves," *Medical Instrumentation*, Vol. 14, pp. 161-164.

[19] Glaser, R.E.(1984), "Estimation for a Weibull Accelerated Life Testing Model," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 31, pp. 559-570.

[20] Hartley, H.O. and Sielken, R.L.(1977), "Estimation of Safe Dose in Carcinogenic Experiments," *Biometrics*, Vol. 33, pp. 1-30.

[21] Kitagawa, K., Toriama, K., and Kanuma, Y.(1984), "Reliability of Liquid Crystal Display," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 33, No. 3, pp. 213-218.

[22] Klein, J.P. and Basu, A.P.(1980), "Accelerated Life Tests under Competing Weibull Causes of Failure," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 10, pp. 2073-2100.

[23] Klein, J.P. and Basu, A.P.(1982), "Accelerated Life Tests under Competing Weibull Causes of Failure," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 11, pp. 2271-2286.

[24] Mann, N.R., Schafer, R.E., and Singpurwalla, N.D.(1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[25] Miller, R. and Nelson, W.(1983), "Optimum Simple Step Stress Plans for Accelerated Life Testing," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 32, pp. 59-65.

[26] Nelson, W.B.(1970), "Statistical Methods for Accelerated Life Test Data-The Inverse Power Law Model," *General Electric Research & Development TIS Report* 71-C-011.

[27] Nelson, W.(1980), "Accelerated Life Testing - Step Stress Models and Data Analysis," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 29, pp. 103-108.

[28] Nelson, W. and Hahn, G.J.(1972), "Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data - Part 1. Simple Methods and their Application," *Technometrics*, Vol. 14, pp. 247-267.

[29] Nelson, W. and Hahn, G.J.(1973), "Linear Estimation of a Regression Relationshipfrom Censored Data - Part 2. Best Linear Unbiased Estimation and Theory," *Technometrics*, Vol. 15, pp. 133-150.

[30] Nelson, W.B. and Kielpinski, T.J.(1975), "Optimum Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 24, pp. 310-320.

[31] Nelson, W.B. and Kielpinski, T.J.(1976), "Theory for Optimum Censored Accelerated Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," *Technometrics*, Vol. 18, pp. 105-114.

[32] Nelson, W.B. and Meeker, W.Q.(1978), "Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions," *Technometrics*, Vol. 20, pp. 171-177.