

삼각형 적응격자 유한요소법을 이용한 압축성 Navier - Stokes 유동의 해석

임 예훈^{*1}, 장 근식^{*2}

Adaptive Triangular Finite Element Method for Compressible Navier - Stokes Flows

Y. H. Im and K.S. Chang

This paper treats an adaptive finite-element method for the viscous compressible flow governed by Navier-Stokes equations in two dimensions. The numerical algorithm is the two-step Taylor-Galerkin method using unstructured triangular grids. To increase accuracy and stability, combined moving node method and grid refinement method have been used for grid adaption.

Validation of the present algorithm has been made by comparing the present computational results with the existing experimental data and other numerical solutions. Four benchmark problems are solved for demonstration of the present numerical approach. They include a subsonic flow over a flat plate, the Carter flat plate problem, a laminar shock-boundary layer interaction, and finally a laminar flow around NACA0012 airfoil at zero angle of attack and free stream Mach number of 0.85. The results indicates that the present adaptive triangular grid method is accurate and useful for laminar viscous flow calculations.

Key Words : 적응격자 유한소법(Adaptive finite element method), 테일러-갤러킨 방법(Taylor - Galerkin method), 압축성 점성유동(Compressible viscous flow), 비정렬 삼각형 격자(Unstructured triangular grid), 충격파-경계층 상호간(Shock - boundary layer interaction)

1. 서론

비정렬 삼각형 격자를 이용한 유동의 수치해석은 비점성 압축성 유동의 경우, 적응격자로의 확장이 용이하고 임의의 복잡한 형상도 쉽게

다룰수 있는 등 여러가지 잇점을 가지고 있기 때문에 지금까지 의욕적으로 연구되어왔다[1-3]. 특히 유동의 구배가 심한 곳에서 격자를 적응 밀집시킴으로써 해의 정확도와 격자 효율을 높일수 있다는 특징은 비정렬격자가 지니고 있는 커다란 장점이며 여타의 여러가지 단점을 충분히 보완 할 수 있는것이다. 그러나 비정렬 삼

^{*1}학생회원 한국과학기술원 항공우주공학과

^{*2}정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

각형 격자를 이용하여 점성유동을 해석한 시도는 많지 않으며, 기존의 해석은 낮은 레이놀즈수의 비압축성 유동에 국한되거나, 경계층내에서는 정렬사각형 격자를 사용하고 비점성 유동 영역에서는 삼각형 격자를 이용하는 격자혼합형 방법이 흔히 채택되어 왔다[4]. 그러나 이러한 혼합형 방법도 해석하고자하는 유동장의 모양이 복잡해지면 정렬격자가 그러한 것처럼 격자 생성이 어려워진다. 또한 격자적응이 필요한 경우에는 삼각형요소와 사각형 요소를 별도로 다루어주어야 하기 때문에 문제가 복잡하게 된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 유동장의 전 영역에서 비정렬 격자를 이용하여 압축성 점성유동해석 방법을 해석하는 수치적 방법을 모색하였다.

비정렬 삼각형 격자를 사용하여 압축성 점성 유동을 해석하려는 시도는 Mavriplis 와 Jameson[5]에 의해 연구가 처음 시도되었다. 초기에는 정렬 삼각형 격자를 이용하여 압축성 점성유동을 해석하다가[5], 추후에 점성지역에서는 정렬삼각형 격자를 비점성지역에서는 비정렬 삼각형 격자를 이용하였다. Gehler와 Hanell[7]은 "Virtual Stretching"을 이용하여 비정렬 격자를 생성하여 비압축성 점성유동을 해석하였다. Walter와 Mitchell [8]은 비정렬 삼각형 격자계에서 더 정확한 해를 얻기 위해 K - Exact Reconstruction을 이용하여 점성유동을 해석하였으며 Soulaïmani와 Fortin[9]은 정렬삼각형 격자계에서 유한요소법으로 Navier - Stokes 방정식을 풀었다.

본 연구에서는 이처럼 새롭게 대두되고 있는 분야의 하나로서 점성 압축성 유동장 해석을 위한 비정렬 삼각형 격자의 유동 적응 방법을 고찰하였으며, scheme으로는 2단계 Taylor - Galerkin 방법을 아음속 및 초음속 Navier - Stokes 유동에 적용하였다. 여기서 그 결과를 기존의 실험결과 및 다른 수치해와 비교함으로써 Scheme의 타당성을 검토하고 격자 이동과 격자분할에 관련된 계산특성을 분석하였다. 계

산의 예로서는 첫째, 아음속 평판문제를 해석하여 Illingworth의 변환을 이용한 이론해와 비교하였고, 두번째로 Carter의 평판문제를 해석하여 충격파의 생성과 경계층의 발달을 분석하였으며 여기에서 절점 이동법의 타당성을 시험해보았다. 세번째는 층류 경계층과 충격파의 상호간섭이 있는 평판흐름을 해석하여 경계층-충격파 간섭이란 복잡한 물리적 유동현상을 수치적으로 해석할 수 있는지 살펴 보았고 동시에 높은 레이놀즈수에 대한 본 Scheme의 타당성을 검증해 보았다. 네번째로 NACA0012 익형에 대하여 정렬 삼각형 격자와 비정렬 삼각형 격자를 이용하여 초음속 유동장을 해석하였고 두 격자계에서의 계산결과를 비교 검토하였다.

2. 지배방정식과 수치적 기법

2.1 지배방정식

직교좌표계에서 무차원화된 Navier - Stokes 방정식을 보존형태로 표시하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_i^c}{\partial X_i} = \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re_\infty} \frac{\partial F_i^v}{\partial X_i} \quad (1)$$

위에서 w 는 상태변수 벡터이고 F 는 플럭스벡터이며, 상첨자 C 는 비점성 플럭스, V 는 점성 플럭스의 확인 용어다.

2.2 Taylor-Galerkin 유한요소법

2.2.1 1 단계

$w^{n+1/2}$ 를 시간 $t=t^n$ 일때 Taylor 급수로 전개하면

$$W^{n+1/2} = W^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_n + O(\Delta t^2) \quad (2)$$

이 되고, 식 1) 를 이용하면 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$W^{n+1/2} = W^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re_\infty} \frac{\partial F_i^v}{\partial X_i} - \frac{\partial F_i^c}{\partial X_i} \right) \quad (3)$$

이제 $W^n, W^{n+1/2}$ 과 F_i^c, F_i^v 를 다음과 같은 형상 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$F_i^c \approx \sum_j F_j^c N_j \quad F_i^v \approx \sum_j F_j^v P_e \tag{4}$$

$$W^n \approx \sum_j W_j^n N_j \quad W^{n+1/2} \approx \sum_e W_e^{n+1/2} P_e$$

윗 식을 2)식에 대입하면

$$\begin{aligned} & \sum_e \left(\int_{\Omega} P_e P_E d\Omega \right) W_e^{n+1/2} \\ &= \sum_j \left(\int_{\Omega} N_j P_E d\Omega \right) W_j^n - \frac{1}{2} \Delta t \sum_j \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial X_i} P_E d\Omega \right) F_j^{cn} \\ & \quad + \frac{1}{2} \Delta t \sum_e \frac{\sqrt{\gamma} M_{\infty}}{Re_{\infty}} F_j^v \left(\frac{\partial P_e}{\partial X_i} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

윗 식을 정리하면,

$$A_e W_e^{n+1/2} = \sum_j \left(\int_{\Omega} N_j d\Omega \right) W_j^n - \frac{1}{2} \Delta t \sum_j \left(\int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial X_i} d\Omega \right) F_j^{cn} \tag{6}$$

여기에서 A_e 는 삼각형 요소의 면적이다.

2.2.2 2 단계

시간에 대하여 2차의 정확도를 얻기 위하여 전 단계에서 얻은 $W^{n+1/2}$ 를 이용하여 W^{n+1} 을 Taylor 급수로 전개하면

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \frac{\partial W}{\partial t} \Big|^{n+1/2} + O(\Delta t^3) \tag{7}$$

식 1)을 이용하면 다음과 같다.

$$W^{n+1} = W^n - \Delta t \frac{\partial F_i^c}{\partial X_i} \Big|^{n+1/2} + \Delta t \frac{\sqrt{\gamma} M_{\infty}}{Re_{\infty}} \frac{\partial F_i^v}{\partial X_i} \Big|^{n+1/2} \tag{8}$$

이제 W 를 구간선형 형상함수 N_j 로, F_i^c, F_i^v 를 구간 선형 형상함수 P_e 로 내삽한다. 가중 함수로서 구간선형 형상함수 N_k 를 곱한 다음 Galerkin적분을 취하고 발산정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(\int_{\Omega} N_j N_k d\Omega \right) \Delta W_j \\ &= \Delta t \sum_e \left[\left(F_{ic}^c \Big|^{n+1/2} - \frac{\sqrt{\gamma} M_{\infty}}{Re_{\infty}} F_{ic}^v \Big|^{n+1/2} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial X_i} P_e d\Omega \right] \\ & \quad - \Delta t \sum_e \left[\left(F_{ic}^c \Big|^{n+1/2} - \frac{\sqrt{\gamma} M_{\infty}}{Re_{\infty}} F_{ic}^v \Big|^{n+1/2} \right) \int_{\Gamma} N_k P_e n_i d\Gamma \right] \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 인공 감쇠항

문헌[5]의 유한체적법 관련논문에서 사용하였던 비분리형 Laplacian Operator 와 비분리형 Biharmonic Operator의 혼합형 기법을 사용하여 인공감쇠항을 만든다. Navier - Stokes 방정식에서 사용하는 인공감쇠항은 Euler 방정식에서 사용하는 것과 다소 다르다. 기본적인 구조는 비슷하지만 경계층이나 후류지역등에서 물리적 점성항보다 인공감쇠항이 작아야 한다는 구속조건등으로 인해 수정된 형태를 가진다. 또한 Navier - Stokes 방정식을 풀기위해 벽근처에서 격자를 조밀하게 심고 격자수를 늘려 주어야 하는데 이러한 영향도 고려하여야 한다. 다시말해 인공감쇠항의 방향성을 고려하지 않으면 안된다. 이것은 주격자인축방향(Principal Stretching Direction), 격자간의 간격비 등을 이용해서 표현해 준다. 인공감쇠항은 다음과 같이 표현된다.

$$D(W_i) = \sum_{k=1}^n [U_k - U_i] \left[\frac{A_k + A_i}{2} \right] \tag{10}$$

여기서

$$U = K_2 W - K_4 \nabla^2 W$$

$$(K_2)_i = K_2 \frac{\sum_{k=1}^n (P_k - P_i)}{\sum_{k=1}^n (P_k + P_i)} \tag{11}$$

한가지 주의해야 할점은 $D(W_i)$ 가 유량의 차원

이라는 것이다. K_2 는 실험적으로 정해지며 아 음속과 초음속의 경우 0.5, 천음속의 경우 0.0 을 주로 사용하고 k_4 는 0.0039를 사용한다. 또 A_k 는 다음과 같이 표현된다.

$$A_k = \alpha_{1k} \cos^2 \theta_k + \alpha_{2k} \sin^2 \theta_k \quad (12)$$

여기서 θ_k 는 격자점 i 에서의 격자 k 와 주격자 압축방향과 이루는 각도이며 α_1 과 α_2 는 각각 아래와 같다.

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{s+1} \phi(s) \quad \alpha_2 = \frac{s\lambda}{s+1} \phi\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\phi(s) = 1 + s^{-2.3} \quad s = \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}$$

(13)

$\Delta \xi$ 와 $\Delta \eta$ 는 각각의 격자 간격을 나타내고, λ 는 각 절점에서 최대 고유값(eigenvalue)이다.

2.4 격자적응기법

압축성 점성유동은 경계층 지역, 후류지역, 충격파, 팽창파 등이 발생하는 지역에서 물리량의 급격한 변화가 발생한다. 이러한 유동을 큰 오차없이 잘 계산하기 위해서는 특수한 기법이 필요하다. 일반적으로 많이 사용하는 것 중의 하나가 격자적응법이다. 격자를 적응법으로는 유동장의 오차를 감소시키도록 적응하는 방법과 유동장의 중요한 성질들을 더 잘 표현하도록 적응하는 방법이 있다. 전자는 격자의 분할에 해당되는 것이고 후자는 격자점 이동에 해당된다.

2.4.1 격자점 이동 방법(Moving node method)

격자점을 이동시키는 방법은 요소 연결성(Connectivity)의 변화없이도 해의 정확도를 향상시킬 수 있어 프로그램 작성이 비교적 쉽다. 각각의 절점 i 와 그 주위의 절점 j 가 가상의 스프링에 의해 연결되어 있다고 가정한다[10]. 이때 스프링 방정식은 아래와 같다.

$$F_{ij} = (\bar{F}_{ij}^z, \bar{F}_{ij}^z), \quad Z=X \text{ or } Y$$

$$\bar{F}_{ij}^z = F_{ij}^z + C1(Z(i) - Z_o(i)) + C2(Z(i) - Z_{pre}(i))$$

(14)

이 방정식을 Gauss-Seidel 반복법으로 푼다. 여기서 Z_o 는 초기계자계에서의 값이며 Z_{pre} 는 바로 전단계에서의 값이다. 절점을 초기격자계에서 조금만 이동시키고 싶을 때에는 $C1$ 과 $C2$ 를 0.5 - 1.0 사이의 값을 주고 경계층 쪽으로 많이 이동시켜 주고 싶을 때에는 0.1 이하의 값들을 사용한다. 절점을 이동시킬 때에는 요소가 서로 겹치지 않도록 조절해 주어야 하며 절점을 이동시킨 후에는 전단계의 좌표값들을 기준으로 변수들의 값들을 보간한다.

2.4.2 요소분할 기법

오차지시자로는 밀도, U-방향속도, 압력 등을 적절히 섞어 사용하였다. 비점성유동에서는 물리량의 구배가 충격파나 팽창파 등에 의해서 주로 나타나기 때문에 밀도나 압력 하나만을 오차지시자로 사용해도 되지만 점성유동의 경우 서로 다른 특성의 물리량들이 서로 다른 곳에서 급격한 구배를 가지므로 적절한 오차지시자를 찾는 것이 중요하다. 점성지역에서 요소분할이 되기를 원하면 속도를, 비점성지역에서 요소분할 되기를 원하면 밀도나 압력을 주 오차지시자로 사용했다. 요소의 분할에서는 오차지시자로 Löhner의 것을 사용하였으며 각 절점에서의 그 값은 다음과 같다[11].

$$E = \sqrt{\frac{\sum_k \left(\int_{\Omega} N'_k N'_j d\Omega_j \right)^2}{\sum_k \left(\int_{\Omega} |N'_k| \{ |N'_j| u_j + \epsilon (|N'_j| |u_j|) \} d\Omega \right)^2}}$$

(15)

3. 계산결과 및 검토

3.1 아음속 평판문제

Navier - Stokes방정식의 검증을 위해서 이론해와 비교해 볼수있는 아음속 평판문제를 풀어보았다[12]. 자유류의 마하수는 0.5이며 레이놀즈수는 10,000이다. 이론해는 Illingworth의 변환을 이용하여 풀었으며 변수 ξ 와 η 는 다음과 같이 표시된다[13].

$$\xi = \rho_e U_e \mu_e X \quad \eta = \left(\frac{Re_{xe}}{2} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} \frac{dy}{X} \quad (16)$$

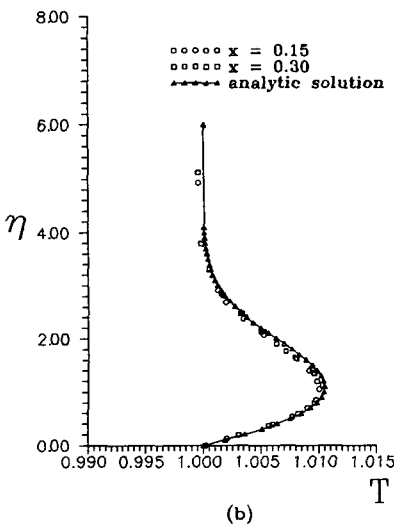
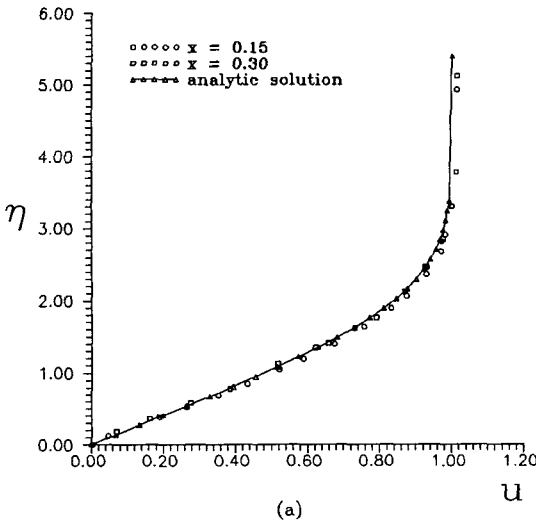
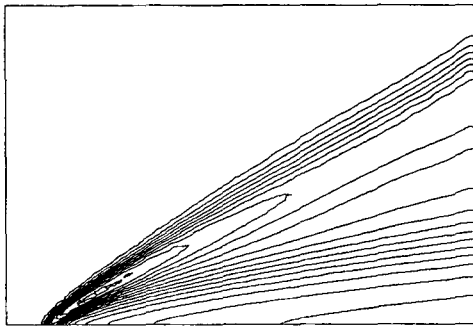


Fig.1 Subsonic Flat Plate : (a) U-Velocity, (b)Temperature.

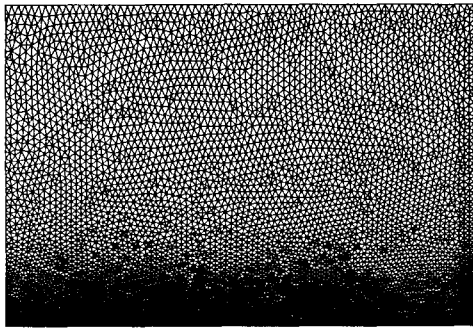
Fig.1에서 $x=0.15$, $x=0.30$ 일때의 속도분포와 온도분포를 이론해와 비교하였으며 수치해와 이론해가 서로 잘 일치하고 있음을 알수있다. 여기서 사용한 계산 격자는 다음과 같은 방법으로 생성하였다. 우선 Advancing front 기법으로 비정렬 삼각형 격자계를 형성시켜주고 이들 격자를 압축성 점성 유동해석에 적합한 격자계로 변환 시켜주기 위해 blending 함수를 사용하여 경계층 근처에 밀집시켰다.

3.2 Carter의 평판문제

초음속 영역에 대하여 현재 Scheme의 타당성을 검증해보기위해 Carter의 평판문제[14]를 해석하였다. Carter의 평판문제는 경계층의 발달과 충격파의 발생을 동시에 관찰할 수 있기 때문에 층류 압축성 유동영역에서 프로그램의 검증에 위해 많이 해석되고 있다. 자유류의 마하수는 3.0이며 레이놀즈수는 평판을 기준으로 하여 1,000이다. 평판에서의 온도는 $T_w = 2.8T_\infty$ 이고 Prandtl number는 공기의 물성치인 0.72를 사용하였다. 평판의 길이는 1.0이고 유동장의 높이는 0.75이다. 초기격자계에서의 절점의 수는 5,835개, 요소의 수는 11,363개 이다. 초기격자계에서의 밀도분포가 Fig.2에 나타나 있다. 해가 어느 정도 수렴한 후에는 해의 정확성을 향상시켜 주기위해 격자계를 이동시켜 주었다. 이동한 격자계에서의 등밀도선도와 격자계가 Fig.3에 나타나 있다. 격자가 이동함으로 인해 평판이 시작되는 부근에서는 충격파가 초기 격자계에서 보다 더 명확하게 잡히는 것을 볼 수 있으나 출구쪽에서는 충격파가 확산되어 약간 퍼지는 것을 볼 수 있다. 이는 출구 상단의 격자가 충격파쪽으로 이동하면서 요소의 크기가 증가하는데 반해 이지역에서도 물리량의 구배가 비교적 크기 때문에 정확도가 감소한 것으로 보인다. 요소 분할을 한후 절점의 수는 11,031개, 요소의 수는 21,735개이며 계산결과는 Fig. 4에 나타나 있다. 그림에서 계산결과와 정확도가 크게 향상 된것을 볼 수 있다. Fig.4



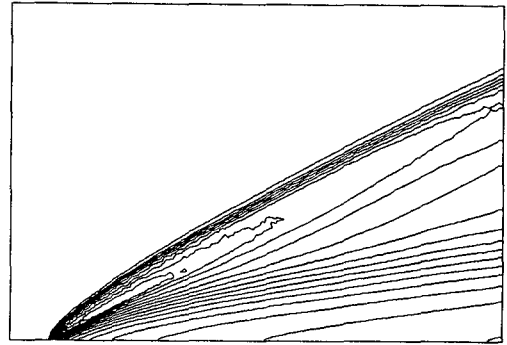
(a)



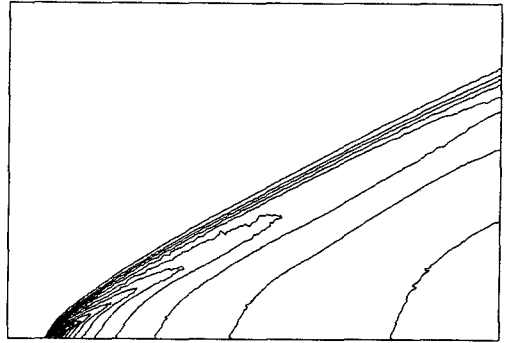
(b)

Fig.2 Carter's Flat Plate :
(a)Density Contours, (b)Initial Grid.

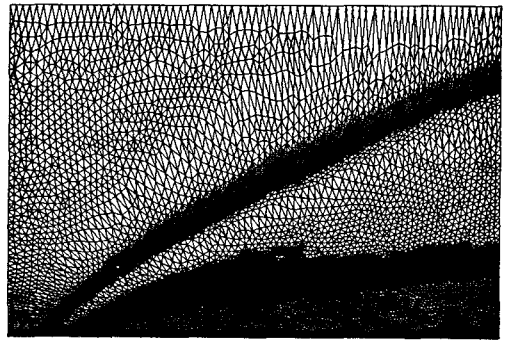
를 보면 경계층내에서 압력의 변화는 그다지 크지 않으나 밀도구배는 매우 크다는 것을 알 수 있다. 출구에서 무차원화된 밀도와 U방향 속도를 Carter의 결과와 함께 Fig.5에 비교하였는데, 충격파의 위치와 경계층에서의 유동변수 값들이 매우 잘 계산되어 있음을 알 수 있다.



(a)

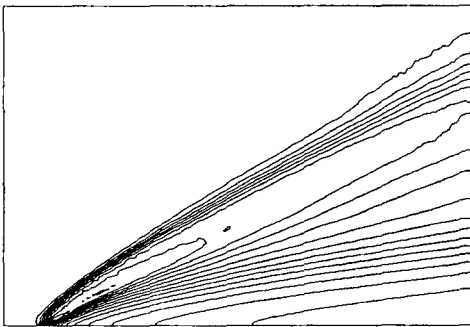


(b)

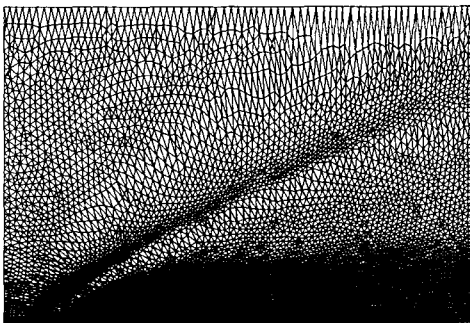


(c)

Fig.4 Carter's Flat Plate(After Adaption) :
(a)Density Contours, (b)Pressure Contours,
(c)Grid System.

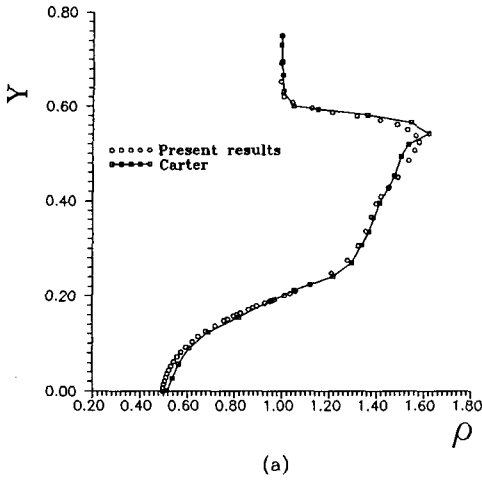


(a)

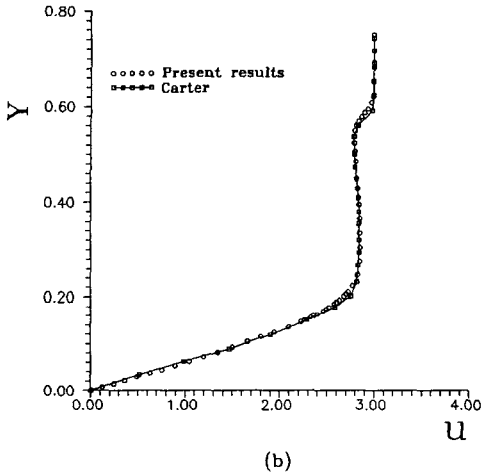


(b)

Fig.3 Carter's Flat Plate(After Moving) :
(a)Density Contours, (b)Moving node Grid.



(a)



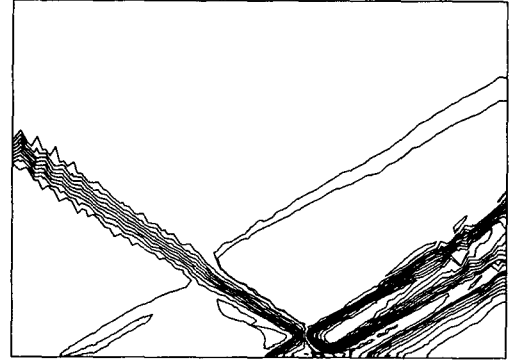
(b)

Fig.5 Flow Variable along y-coordinate at the exit : (a)Density, (b)U-velocity

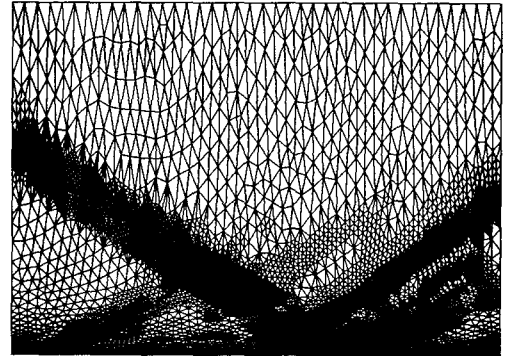
3.3 층류경계층과 충격파의 상호 간섭이 있는 평판 흐름

수평과 32.6도의 각도로 입사되는 충격파가 층류경계층과 부딪치면서 복잡한 유동현상을 나타내는 문제이다. 입구에서 자유류의 마하수는 2.0이며 충격파 이후의 마하수는 경사충격파 이론에 의한 값으로 고정시켰다. 레이놀즈수는 평판의 시작점으로부터 충격파와 평판이 만나는 거리를 기준으로 2.96×10^5 이다. 출구에서 경계조건은 아음속 지역이 작다고 가정하여 초음속 경계조건으로 주었다. 출구 경계층에서

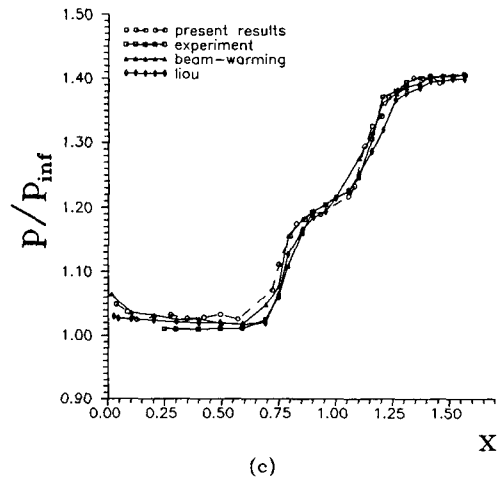
아음속 경계조건을 주게되면 아음속과 초음속이 접한 영역에서 해의 진동이 심하여 수렴속도를 무척 느리게 한다. Fig.6-a)를 보면 평판이



(a)



(b)



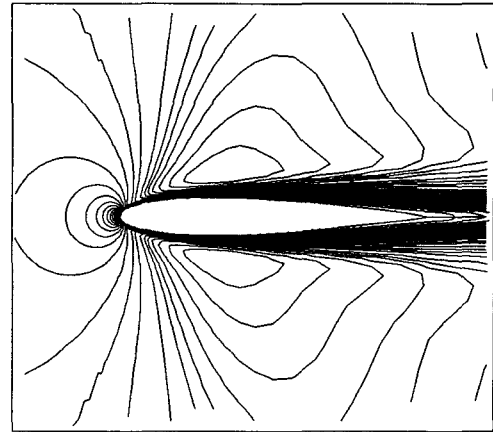
(c)

Fig.6 Shock boundary layer interaction (Adaptive level 2) : (a)Pressure Contours (b)Grid System, (c)Pressure Distribution along X-coordinates.

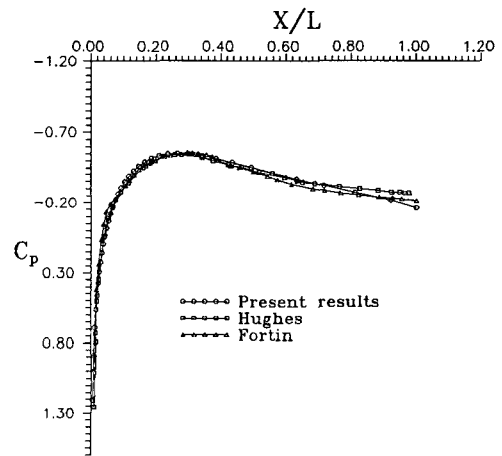
시작되는 곳에서 약한 제1의 경사충격파가 발생한다. 외부에서 유입되는 충격파와 경계층이 만나면서 압력차이에 의해 평판경계층의 박리가 발생하고 여기에서 경계층의 두께가 두꺼워지면서 제2의 경사충격파가 발생한다. 발생된 박리기포(Separation Bubble) 상에서 압력이 급격히 팽창하여 팽창파가 발생하게 된다. 압력구배가 급격히 감소하면서 경계층이 다시 회복되고 반사충격파가 발생한다. Fig. 6-c)는 벽면에서의 압력분포를 Hakkinen [14]의 실험치, 그리고 Liou[15]등의 계산치와 비교한 것이다. 비교는 유동이 복잡한 만큼 여러 연구자들 사이에 완전한 일치는 없으나 거의 동일한 압력 분포의 변화를 보여주는 것이 특기할만 하다. 이 그림에서는 두번의 급격한 압력상승을 보여주고 있는데 x/L 이 약 0.8에서의 압력상승은 박리영역의 형성으로 인하여 발생하는 경사충격파에 기인한 것이며, 두번째의 압력상승은 박리기포를 지난 공기가 평판에서 다시 압축되면서 생기는 경사충격파로 인한 것이다.

3.4 NACA 0012 익형에 관한 천음속 유동

받음각이 0도 마하수가 0.85, 레이놀즈 수가 2,000인 경우의 익형 주위의 유동을 해석해 보았다. 정렬격자계에서 계산한 등압력선도가 Fig.7에 나타나 있다. 같은 조건의 비점성 유동에서는 익형의 뒷전부근에서 충격파가 발생하나 여기에서는 레이놀즈수가 작기때문에 점성의 영향이 지배적이어서 충격파가 발생하지 않는다. 익형 표면에서의 압력계수 곡선이 Fig.7에 Hughes[16], 그리고 Fortin과 Soulaimani[9]의 계산결과와 비교되어 있으며 이들 계산결과가 서로 잘 일치하는 것을 확인 할 수 있다. 비정렬 격자계에서 해석한 익형 주위의 등마하수 선도가 Fig. 8에 나타나 있다. 초기 초기 계산 격자계에서는 등마하수선도등이 매끄럽지 않으나 격자를 적응 시킨후에는 Fig. 8과 같이 매끄러운 등마하수선도를 얻을 수 있었다. 하지만 앞전부근에서는 아직도 약간 거친 등마하수



(a)



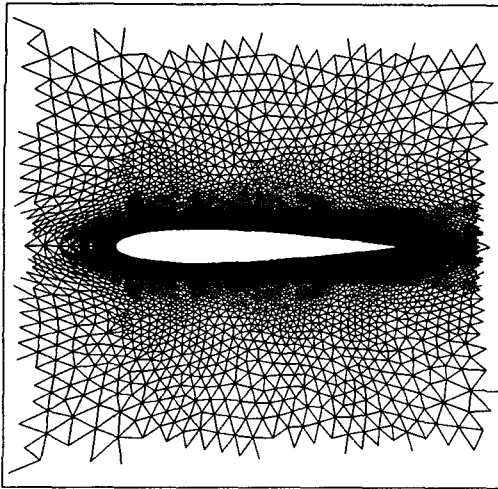
(b)

Fig.7 NACA0012 Airfoil(Structured Grid System) (a)Mach Contours, (b)Pressure Coefficient.

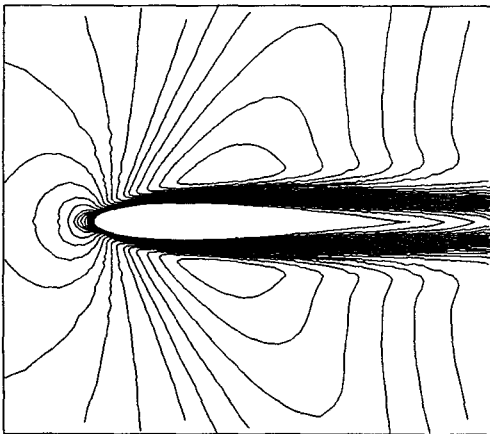
선도를 보여주고 있는데 이는 곡율이 큰 익형의 앞전부분에서 격자의 질이 다소 떨어지기 때문인듯하다. 앞전부근에서도 격자의 질이 좋아지면 비정렬삼각형 격자계에서도 보다 나은 결과를 보일것으로 기대된다.

4. 결 론

1. 2차원 비정렬 삼각형 격자를 이용하여 압축성 점성 유동을 해석 할 수 있는 2단계 Taylor Galerkin 방법을 제시하였으며 잘 알려진 몇 가지 예제 문제들을 해석함으로써 Scheme 의 타당



(a)



(b)

Fig.8 NACA0012 Airfoil(Unstructured Grid System):
(a)Grid System, (b)Mach Contours.

성을 검증하였다.

2. 비정렬 삼각형 격자의 절점이동법과 요소분할기법을 이용한 압축성 점성 유동장의 해석은 해의 정확도면에서 정렬 사각형 격자를 이용하여 해석한 경우에 못지않은 결과를 보여주고 있다. 그러나, 비정렬 격자계에서 정렬격자계와 비교할 만한 수준의 계산결과를 얻기 위해서는 절점의 수가 약 1.5배 정도 더 많이 필요하였다.

3. 물리량의 구배가 급격한 곳에서 다양한 물리변수들을 오차지시자로 사용한 격자적응법과

격자 이동법은 해의 정확도를 크게 향상시켜 주었다.

4. 본 scheme 에서 사용한 양해적인 시간 적분법은 Euler방정식을 풀 경우 충분히 빠른시간내에 해를 구할수 있었다. 그러나 Navier - Stokes 방정식의 경우에는 경계층내에 격자를 조밀하게 심어주어야 하기 때문에 점성지역에서 국소시간은 아주 작아지게되어 수렴하는데 많은 시간이 필요하였다. 따라서 수렴속도를 보다 증진시킬수 있는 Multigrid로의 확장에 대한 연구가 필요하다.

5. 압축성 점성 유동 해석을 위한 질 좋은 비정렬 격자 생성법에 대한 추가적인 심도 깊은 연구가 필요하다.

참고 문헌

- [1] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and .O.C. Zienkiewicz, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations," *Journal of Computational Physics*, Vol.72(1987), pp 449-446.
- [2] R. Löhner, " Some Useful Data Structures for the Generation of Unstructured Grids," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4(1988), pp123-135.
- [3] R. Löhner, "Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing - Front Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol.8 (1988), pp1135-1149
- [4] S. R. Mathurr, N. K. Madvar, and R. G. Rajagopal, " A Hybrid Structured - Unstructured Grid Method for Unsteady Turbomachinery Flow Computation , " *AIAA -93-0387* (1993).
- [5] D. J .Mavriplis, A. Jameson, and L. Martinelli, " Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes," *AIAA -89-0120*. (1989)
- [6] M. Gehle, and D. Hanel, " Adaptive Grid

- Methods for Viscous Flow", Proc. of the 5th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics, Vol. I, JSCFD (1993), pp247-252.
- [7] C. R. Mitchell, and R. W. Walters, " K -Exact Reconstruction for the Navier - Stokes Equations on Arbitrary Grids," AIAA-93-0536 (1993).
- [8] M. Fortin, and A. Soulaïmani , "On Finite Element Approximation and Stabilization Methods for Compressible Viscous Flow," International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol.17 (1993), pp 477-499.
- [9] B. Palmerio, " A Two -Dimensional FEM Adaptive Moving Node Method," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.71 (1988), pp315-340.
- [10] R. Löhner, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz , "An Adaptive Finite Element Scheme for Transient problems in CFD," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.61 (1987), pp 323 - 338.
- [11] R. Löhner, and McLean, " Adaptive Edge Based Finite Element Schemes for the Euler & Navier - Stokes Equations on Unstructured Grids," AIAA-93-0336(1993).
- [12] F. M. White., *Viscous fluid flow* , McGRAW - Hill Inc (1974).
- [13] W. W. Tworzydło, J. T. Oden, and E. A. Thornton, "Adaptive Implicit/Explicit Finite Element Method for Compressible Viscous Flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.95 (1992), pp397-440.
- [14] R.J.Hakkinen & I.Greber, " The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer" ;NASA memo2-59W (1959)
- [15] M.S. Liou, "A Newton/Upwind Method and Numerical Study of Shock Wave/Boundary Layer interactions," Int. J. Num. Meth. in Fluids, Vol.9 (1989), pp747-761
- [16] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Methods ;*

Linear static & Dynamic Finite Element Analysis , Prentice - Hall, 1987