

퍼지논리 제어기의 비선형성의 정량적 해석

이 철 희* · 서 선 학**

A Quantitative Analysis of the Nonlinearity of Fuzzy Logic Controller

Chul-Heui Lee* · Seon-Hak Seo**

ABSTRACT

In this paper, the nonlinear I/O characteristic of fuzzy logic controller is analyzed by using cell concept.

Sources of the nonlinearity in a fuzzy logic controller include the fuzzification, the fuzzy reasoning and the defuzzification. A closed form expression for the defuzzified output is derived in case of a fuzzy logic controller with two inputs, triangular memberships, MacVicar-Whelan type linguistic rules, and direct fuzzy reasoning. As a result, it is shown that fuzzy logic controller is a nonlinear controller. Also its nonlinearity is analyzed with respect to the conventional PID control and the sliding mode control.

1. 서 론

퍼지이론이 Zadeh에 의해 제안된 이래 여러 분야에서 성공적으로 응용되어 왔으며 특히 제어공학에서는 정량적 분석이 어려운 시스템의 제어문제에서 기존 제어기의 부적합한 점을 보완, 대체 가능하여 그 연구와 응용이 가장 활발하다.[1,2]

퍼지제어에서는 결과적으로 비선형 케환의 형태로 제어가 이루어지는데 퍼지논리 제어기의 제어성능을 언어적 제어규칙, 소속함수,

scaling 등의 파라미터와 추론 및 비퍼지화 기법에 종속적으로 결정된다.

그런데 퍼지논리 제어기의 구성에 있어서 제어기의 동작 특성에 관한 이론적인 분석이 까다롭고 설계를 위한 체계적인 방법론이 없다는 것이 난점이다. 특히 퍼지논리 제어기의 제어동작의 비선형 특성에 관해서는 많은 연구결과들이 보고되고 있으나 대부분 정성적인 분석이며, 극히 제한된 문제에 대해서만 일부 정량적인 분석도 이루어지고 있다.[3-9]

따라서 본 논문에서는 일반적으로 널리 사용되고 있는 2 입력을 갖는 퍼지논리 제어기에 대해서 비선형특성의 주요인인 추론과정과 비

* 강원대학교 전기공학과 부교수

** 강원대학교 전기공학과 대학원 석사과정

퍼지화를 거쳐 나온 출력에 대한 닫힘꼴(closed form)의 정량적 표현을 구하여 퍼지논리 제어기의 비선형 동작특성을 이론적으로 분석하였다. 그리고 이를 기존의 PID제어와 가변구조 시스템 제어의 sliding mode 제어와 비교 분석하였다.

2. 퍼지논리 제어기의 비선형성 분석

2.1 퍼지논리 제어기의 기본구조

퍼지논리 제어기는 입력과 출력에 대한 scaling, 퍼지화, 언어적 제어규칙기반, 퍼지추론 그리고 비퍼지화로 구성된다.

퍼지논리 제어기의 입력으로는 주로 다음과 같이 정의되는 플랜트 출력오차와 플랜트 출력오차의 변화율(변화량)이 사용된다.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (1)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t) \quad (2)$$

그리고 퍼지논리 제어기의 출력으로는 플랜트 제어입력 또는 플랜트 제어입력의 변화량(변화율)이 사용된다.

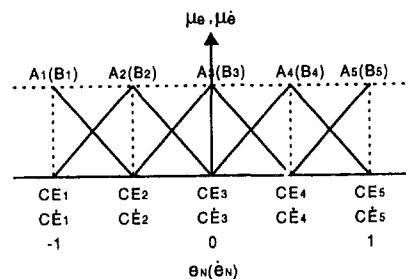
퍼지논리 제어기의 언어적 제어 규칙기반을 구성하는 언어적 제어규칙은 일반적으로 다음과 같이 주어지며 병렬로 나열(OR 동작)되어 있다.

ith Rule :

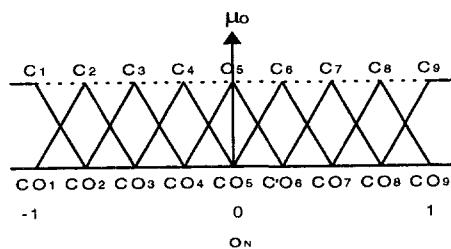
IF { [error = A_i] AND [rate of error = B_i] }
THEN { [output = C_i] }

언어적 제어규칙의 언어변수 A_i , B_j , C_k 에 대한 퍼지변수의 소속함수로는 일반적으로 그림 1의 삼각형 함수가 널리 사용된다. 입력 e 와 \dot{e} 에 대해, 각각 $N=5$ 개의 언어변수 출력, O 에 대해 $M=2N-1=9$ 개의 언어변수를 정의할 경우에 대한 일반적인 MacVicar-Whelan형[5]의 언어적 제어규칙기반이 표 1에 나타나 있다.

표 1.에서 보면 e 와 \dot{e} 에 대해 각각 N 개의 언어변수를 사용할 경우 N^2 개의 규칙이 존재하며 대각방향으로는 같은 출력을 보임을 알 수 있다.



a) membership function of input



b) membership function of output

Fig 1. Membership function of fuzzy variable for linguistic variable

Table 1. Linguistic control rule base
($N=5$, $M=9$)

e	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
\dot{e}	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
B_5	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
B_4	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2
B_3	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3
B_2	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
B_1	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5

퍼지추론 및 비퍼지화에는 Mamdani의 최대최소합성법과 무게중심법(COG:Center Of Gravity)을 결합하는 것이 가장 보편적인 방법이나 본 논문에서는 계산상의 편의를 위해 이를 변형한 형태인 다음과 같은

직접 퍼지추론법(Direct Fuzzy Reasoning)을 사용하기로 한다.[2]

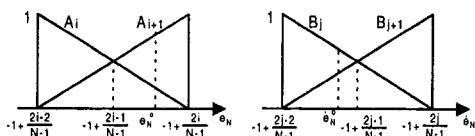
$$O = \frac{\sum \tau_i CO_i}{\sum \tau_i} \quad (3)$$

여기서 CO_i 는 i번째 규칙의 출력에 대한 언어 변수의 중심값이며 τ_i 는 i번째 규칙의 점화수준(firing level)으로서 AND연산으로 최소연산자를 사용할 경우 다음과 같이 계산된다.

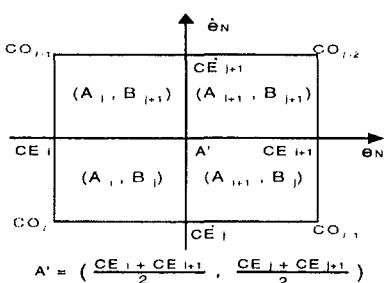
$$\tau_i = \mu_{A_i}(e) \wedge \mu_{B_i}(e) = \min(\mu_{A_i}(e), \mu_{B_i}(e)) \quad (4)$$

2.2 퍼지논리 제어기의 cell 개념

실제로 퍼지논리제어기의 비선형성은 퍼지화, 즉 언어 변수와 관련된 퍼지변수의 소속함수의 비선형성과 이를 이용한 퍼지추론 및 비퍼지화로부터 비롯된다. 퍼지추론 및 비퍼지화와 관련된 퍼지변수의 값은 규준화가 되어 있으므로 아래첨자 N을 붙여서 표시하기로 한다.



a) intervals of input space forming unit cell



b) unit cell
Fig 2. Unit cell of Fuzzy Logic Controller

퍼지논리 제어기의 입/출력 특성을 분석하기 위해서 cell개념을 이용할 수 있다. cell은 퍼지제어기와 입력공간에서 언어변수의 인접 중심값에 의한 interval로 구분된 단위영역을 가리키며 그림 2에 표시되어 있다.

퍼지논리 제어기의 입력 공간을 위상면 상에 표시할 경우, 이는 cell들의 집합으로 표현 가능하게 된다. 그림 3은 이를 보여주고 있다.

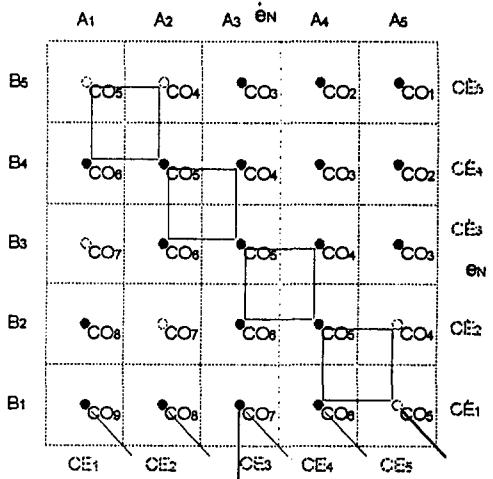


Fig 3. Cells and linguistic control rules presented on phase plane

그림 3에서 실선으로 표시된 것이 cell이며 점선으로 표시된 것은 표 1의 언어적 제어규칙이다. 그림 3에서 보면 하나의 cell에 4개의 인접한 규칙이 대응됨을 알 수 있다.

따라서 입력 데이터가 들어오면, 위상면 상의 한 점으로 표시되므로 그 점을 포함한 cell이 선택되고, 그 cell에 해당되는 4개의 규칙이 점화됨을 알 수 있다.

그러므로 cell개념을 이용하면 보다 효과적으로 퍼지 논리 제어기의 입출력 특성을 분석 가능하다.

2.3 비선형성의 정량적 분석

표 1의 언어적 제어규칙기반에서 보면 대각선 방향의 규칙들은 같은 출력을 가지므로 언어적 제어규칙들을 동일 출력에 대해 다시 풀어쓰면 다음과 같다.

$$R_t : \text{IF } \{ OR_{i+j=M-t+2} \{ (e_N = A_i) \text{ AND } (e_N = B_j) \} \text{ THEN } O_N = C_t, (i, j = 1, \dots, N) \quad (5)$$

새로운 규칙 R_t 의 점화수준은 전건부의 OR동작으로 인해 다음과 같이 주어진다.

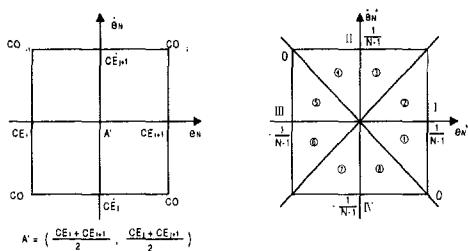
$$\tau_t' = \max \{ \min(\mu_{A_i}(e), \mu_{B_j}(e)) \mid i+j = M-t+2 \} \quad (6)$$

그러면 식 (3)의 추론 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$O_N = \frac{\sum \tau_i' CO_i}{\sum \tau_i'} \quad (7)$$

실제로 입력 e_N^o, \dot{e}_N^o 가 주어질 경우, 각각 2개의 언어변수에 대해 0이 아닌 소속함수 값을 가지므로 앞에서 언급했듯이 항상 인접한 4가지 규칙만 점화되게 된다. (표 1의 블록으로 표시된 부분)

즉 $CE_i \leq e_N^o \leq CE_{i+1}(e_N^o = A_i \text{ or } A_{i+1}), CE_j \leq \dot{e}_N^o \leq CE_{j+1}(\dot{e}_N^o = B_j \text{ or } B_{j+1})$ 의 경우, $(A_i, B_j), (A_i, B_{j+1}), (A_{i+1}, B_j), (A_{i+1}, B_{j+1})$ 의 cell에 해당하는 4가지 규칙만 만족하게 된다. 그리고 이때 출력은 $C_{M-(i+j)+2}, C_{M-(i+j)+1}, C_{M-(i+j)}$ 로부터 퍼지추론과 비퍼지화를 통해서 구해지게 된다. 이 경우를 그림 4.a에 서 보여주고 있다.



(a) Cell of fired rules (b) Transformed cell
Fig 4. Cell of fired rules and its transformation

출력 O_N 은 $\ell = M-(i+j)+2 = 2N-(i+j)+1$ 로 표시하면

$$O_N = \frac{\sum_{k=0}^2 \tau'_{\ell-k} \cdot CO_{\ell-k}}{\sum_{k=0}^2 \tau'_{\ell-k}} \quad (8)$$

그런데 $CO_i = -1 + \frac{i-1}{N-1}$ 이므로

$$CO_{\ell-k} = \frac{N-(i+j)+1-k}{N-1} \quad (9)$$

따라서

$$\begin{aligned} O_N &= \frac{N-(i+j)}{N-1} - \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^2 \tau'_{\ell-k} \cdot k}{\sum_{k=0}^2 \tau'_{\ell-k}} - 1 \right\} \\ &= \frac{N-(i+j)}{N-1} + \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{\sum_{k=-1}^1 \tau'_{\ell-1+k} \cdot k}{\sum_{k=-1}^1 \tau'_{\ell-1+k}} \right\} \\ &= \frac{N-(i+j)}{N-1} + O_N^* \end{aligned}$$

$$= \text{interval effect} + \text{cell effect} \quad (10)$$

O_N^* 은 O_N 의 계산에 사용되는 출력의 중심값 CO_{t-2}, CO_{t-1}, CO_t 을 $-1/(N-1), 0, 1/(N-1)$ 로 치환하여 추론한 결과와 같다. 다시 말해 그림 4.a를 그림 4.b처럼 좌표변환하여 계산한 결과이다.

결국 O_N 은 어떤 규칙들이 선택되어 점화되는가에 관련된 성분인 interval effect (식(10)의 우변의 첫째항)과 들어온 입력데이터가 피점화 규칙들의 cell 내부 어디에 위치해 있는가에 관련된 성분인 cell effect (식(10)의 우변의 둘째항)으로 이루어져 있음을 알 수 있다.

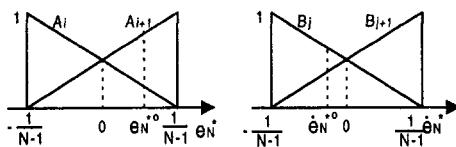
그림 4.a의 중심점 $[(CE_i + CE_{i+1})/2, (CE_j + CE_{j+1})/2]$ 를 $[0,0]$ 이 되게 좌표변환을 하는 관계식은 $CE_i = -1 + 2(i-1)/(N-1), CE_j = -1 + 2(j-1)/(N-1)$ 을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$e_N^* = e_N - \frac{CE_i + CE_{i+1}}{2} = e_N + 1 - \frac{2i-1}{N-1} \quad (11)$$

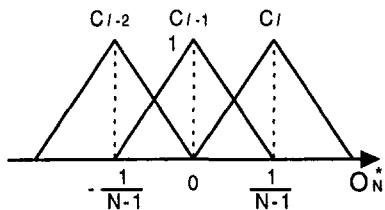
$$\dot{e}_N^* = \dot{e}_N - \frac{CE_j + CE_{j+1}}{2} = \dot{e}_N + 1 - \frac{2j-1}{N-1} \quad (12)$$

그러면 e_N^o 와 \dot{e}_N^o 의 변환된 값 e_N^{*o}, \dot{e}_N^{*o} 와

이로부터 구해지는 출력 O_N^* 에 대한 소속 함수는 그림 5와 같이 된다.



a) membership function of input



b) membership function of output

Fig 5. Membership functions for a transformed cell of fired rules

e_N^{*o} 의 A_i 와 A_{i+1} 에 대한 소속함수는 그림 5로부터 삼각형의 닮음꼴 정리를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mu_{A_i}(e_N^{*o}) = \frac{1 - (K-1)e_N^{*o}}{2} \triangleq x \quad (13)$$

$$\mu_{A_{i+1}}(e_N^{*o}) = \frac{1 + (K-1)e_N^{*o}}{2} = 1 - x \quad (14)$$

마찬가지로 e_N^{*o} 의 B_j 와 B_{j+1} 에 대한 소속함수는

$$\mu_{B_j}(e_N^{*o}) = \frac{1 - (L-1)e_N^{*o}}{2} \triangleq z \quad (15)$$

$$\mu_{B_{j+1}}(e_N^{*o}) = \frac{1 + (L-1)e_N^{*o}}{2} = 1 - z \quad (16)$$

점화 수준을 계산하기 위하여, 그림 4.b에서 나타냈듯이 4개의 피점화 규칙의 소속함수로부터 최소연산을 통해 각각 다른 점화수준을 얻게 되는 ①에서 ⑧까지의 영역으로 나누어 생각해보자.

영역①: $e_N^{*o} \geq -e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \geq 0$, $e_N^{*o} \leq 0$

영역②: $e_N^{*o} \geq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \geq 0$, $e_N^{*o} \geq 0$

영역③: $e_N^{*o} \leq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \geq 0$, $e_N^{*o} \geq 0$

영역④: $-e_N^{*o} \leq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \leq 0$, $e_N^{*o} \geq 0$

영역⑤: $-e_N^{*o} \geq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \leq 0$, $e_N^{*o} \geq 0$

영역⑥: $e_N^{*o} \geq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \leq 0$, $e_N^{*o} \leq 0$

영역⑦: $e_N^{*o} \leq e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \leq 0$, $e_N^{*o} \leq 0$

영역⑧: $e_N^{*o} \leq -e_N^{*o}$ & $e_N^{*o} \geq 0$, $e_N^{*o} \leq 0$

각 영역에 대한 점화수준의 값이 표 2에 표시되어 있다. 또한 식(10)을 이용하여 출력을 계산하여 구한 O_N^* 의 값도 표 2에 표시되어 있다. 표 2에서 볼 수 있듯이 O_N^* 는 cell의 4가지 영역에 대해 각각 다른 형태의 함수가 된다.

그림 4.b에서 보면 영역 I, II와 영역 III, IV의 경계선은 $e_N^{*o} = -e_N^{*o}$ 를 만족하므로 표 2에서 $O_N^* = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서 식(10)으로부터 O_N 은 피점화 규칙 cell들의 선택에 종속적인 성분만 남게 된다.

$e_N^{*o} = -e_N^{*o}$ 의 조건으로부터 식(11)과 식(12)을 대입하면

$$e_N^{*o} + e_N^{*o} = (e_N + e_N) + \frac{2(N-(i+j))}{N-1} = 0 \quad (17)$$

식 (17)에서 $e_N + e_N = 0$ 을 만족하는 경우는 $N = i+j$ 이므로, 표 1에 □ 표시된 규칙들, 즉 그림 4에 □ 표시된 cell들이 이를 만족하는 경우로서 그림 4의 주 대각선이 되며, 이때 O_N 의 값이 0이 되므로 이것이 switching line이 된다. switching line과 평행한 직선들상에서는 각 직선마다 $O_N^* = 0$ 이고 $i+j$ 의 값이 같은 cell로 구성되므로 O_N 의 값이 일정하게 된다. 즉 $e_N + e_N$ 과 O_N 이 동시에 일정하게 되는 점들의 집합이다. line사이의 충내에서는 0이 아닌 O_N^* 에 의해 비선형적으로 출력이 결정된다.

Table 2. Firing level and cell effect for each region of cell in Fig 4(b).

영역		τ'_{ℓ}	$\tau'_{\ell-1} = \max(\textcircled{a}, \textcircled{b})$		$\tau'_{\ell-2}$	$\sum_{k=-1}^{\ell} \tau'_{\ell-1+k}$	O_N^*
		$\min(x, z)$	$\min(x, 1-z)$	$\min(1-x, z)$	$\min(1-x, 1-z)$		
I	①	x	x	z	1-z	1+x	$-\frac{e_N^{*o} + \dot{e}_N^{*o}}{3 - (N-1)e_N^{*o}}$
	②	x	x	z	1-z		
II	③	z	x	z	1-x	1+z	$-\frac{e_N^{*o} + \dot{e}_N^{*o}}{3 - (N-1)\dot{e}_N^{*o}}$
	④	z	x	z	1-x		
III	⑤	z	1-z	1-x	1-x	2-x	$-\frac{e_N^{*o} + \dot{e}_N^{*o}}{3 + (N-1)e_N^{*o}}$
	⑥	z	1-z	1-x	1-x		
IV	⑦	x	1-z	1-x	1-z	2-z	$-\frac{e_N^{*o} + \dot{e}_N^{*o}}{3 + (N-1)\dot{e}_N^{*o}}$
	⑧	x	1-z	1-x	1-z		

2.4 기준의 제어방식과의 비교

PID제어의 경우 제어기 출력은 다음과 같이 된다.

$$O_{PID} = K_1 e + K_2 \dot{e} = K_1 G_e e_N + K_2 G_{\dot{e}} \dot{e}_N$$

따라서 O_{PID} 는 위상면에서 가울기가 $-K_1 G_e / K_2 G_{\dot{e}}$ 로 주어지는 직선으로 등출력 곡선을 갖게 된다. 그러나 퍼지논리제어기의 경우 그림 3에서 볼 수 있듯이 그림 1에 표시된 언어변수의 대표값을 갖는 경우에만 등출력 곡선이 직선으로 주어진다.

만약 $K_1 G_e = K_2 G_{\dot{e}} = G_o$ 로 둘 경우, 즉 $K_1 = G_o/G_e$, $K_2 = G_o/G_{\dot{e}}$ 로 선정하게 되면 $O_{PID} = G_o(e_N + \dot{e}_N) =$ 상수인 곡선을 규준화된 위상면에서 그림 3에 표시된 $O_N = (e_N + \dot{e}_N)$ 만큼의 차이를 갖게 된다.

따라서 퍼지논리 제어기의 구성요소들을 잘 선정하면 PID제어와 동일한 제어동작을 갖게 할 수 있으며, 일반적으로 퍼지논리제어기가 PID제어에 비해 넓은 동작영역을 확보하게 된다.

Kawaji[8], Palm[9] 등은 퍼지논리제어기가 가변구조시스템(VSS)의 sliding mode 제어기와 유사한 특성을 지니고 있으므로

sliding mode 제어기 형태로 구현할 수 있음을 보였다. 실제로 앞의 분석에서 살펴본 바와 같이 퍼지논리 제어기는 cell의 4 가지 동작영역에서 다른 형태의 제어 출력식을 가지므로 기본적으로 가변구조시스템이라 볼 수 있으며, 따라서 sliding mode 제어가 가능하다. 그럼 3에서 보면 CO_5 를 연결하는 직선이 switching line이 되고 이와 평행인 직선군이 sliding mode 제어의 동작특성 곡선의 linear segment들의 절점에 각각 대응되는 부분이 된다. e 와 \dot{e} 의 언어변수의 중심값 CE_i 와 $C\dot{E}_i$ 의 위치를 적절히 조절함으로써, 원하는 정도의 비선형성을 갖는 동작선을 구현할 수 있다.

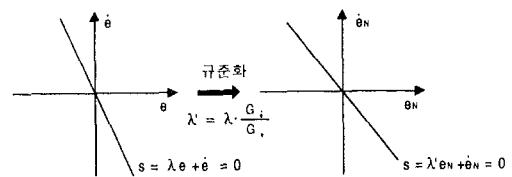


Fig 6. Effect of normalization in phase plane

또한 그림 6에서 볼 수 있듯이 입력에 대한 scaling factor의 변화는 위상면에서 switching line의 기울기를 변화시키게 ($\lambda \rightarrow \lambda'$)되므로 scaling factor의 설정에 따라 비선형성을 조정할 수 있다.

3. 결 론

퍼지논리 제어기의 비선형 동작특성은 제어기의 퍼지화(소속함수), 퍼지추론 및 비퍼지화 동작에 기인한다.

본 논문에서는 일반적으로 널리 사용되고 있는, 2입력, 1출력에 삼각형 소속함수, MacVicar-Whelan형 제어 규칙기반과 직접 퍼지추론법을 사용한 퍼지 논리제어기에 대해서 cell 개념을 이용하여 비퍼지화된 출력에 대한 닫힘꼴의 정량적 표현을 유도하고 이와 위상면을 이용하여 제어기의 비선형 동작을 이론적으로 분석하였다. 그리고 기존의 PID제어와 가변구조시스템의 sliding mode제어와 비교하여, 기존의 PID제어보다 넓은 동작영역을 확보한다는 사실과 sliding mode제어와 유사한 제어동작을 가짐을 보였다.

분석한 결과에서 볼 수 있듯이, 퍼지논리 제어기의 동작특성은 위상면에서 각 cell들의 꼭지점을 지나는 직선군에서는 제어기 출력이 선형 특성을 보이지만 직선군 사이의 충내부에서는 비선형 특성을 보이게 된다.

참 고 문 현

- [1] C.C.Lee, "Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller, part I and II," IEEE Trans. Syst. Man Cybern., Vol.20, no.2, pp. 404-435
- [2] R.R.Yager, D.P.Filev, Essentials of Fuzzy Modelling and Control, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994
- [3] J.J.Buckley, Further and H. Ying, Fuzzy controller theory: Limit theorems for linear fuzzy control rules. Automatica 25:469-472(1989)
- [4] W. Siler and H. Ying, Fuzzy control theory: The linear case. Fuzzy Sets Syst. 33:275-290(1989)
- [5] H. Ying, W.siler. and J.J. Buckley, Fuzzy control theory: A nonlinear case. Automatica 26:513-520(1990)
- [6] Tang, K.L. and J.M. R., "comparing fuzzy logic with classical controller design," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-17, 1085-1087, 1987
- [7] A.El Hajjaje and A. Rachid, "Analytic formulation of linguistic rules for fuzzy controller", Fuzzy Sets and Systems, Vol.73, pp. 219-225, 1995
- [8] Kawaji, S. and Matsunaga, M., "Fuzzy control of VSS type and its robustness, "Proceedings 3rd IFSA Congress, Brussels, 81-88, 1991
- [9] Palm,R., "Sliding mode fuzzy control, "Proceedings 1st IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Diego, 519-526, 1992
- [10] 이철희, 서선학, "퍼지 제어기의 Scaling factor의 영향 분석", 산업기술연구, 강원대학교, 제 15집, pp. 195-202, 1995