産業技術研究(江原大學校 産業技術研究所 論文集) 第 16 輯 (1996)
Research Report. The Institute of Industrial Technology, Kangwon Nat'l Univ., Korea, Vol.16, 1996

不變量과 修正係數를 使用한 $[\alpha\,\beta\,\beta\,\gamma\,\alpha\,\alpha\,\beta]_r$ 積層復合板의 振動解析

홍창우* · 심도식** · 김남윤*** · 정영화****

Vibration Analysis of $[\alpha\,\beta\,\beta\,\gamma\,\alpha\,\alpha\,\beta]_r$ Type Laminated Composite Plates Using Invariant and Correction Factor

Chang-Woo Hong* · Do-Sik Sim** · Nam-Yun Kim*** · Young-Hwa Jung****

ABSTRACT

For a large scale civil and architectural structures, mainly steel, concrete and aluminum have been used and weight and corrosion of materials became a major concern.

Designing with composite materials is very much complicated. Simple classical theory may yield good results for selecting "initial" sections for preliminary design. D. H. Kim proposed to use the quasi-isotropic constants by Tsai for the preliminary design of the composite primary structures for the civil construction. Also he made simple equation using correction factor. In this paper, the simple formulas developed by D. H. Kim to obtain "exact" values of the natural frequencies of [ABBCAAB]r laminate are compared with Whitney's equations. Also natural frequencies of the plate with varying aspect ratios and reinforcing fiber orientations, are compared with natural frequencies of beam. This work can be a guideline to obtain data in many other cases.

1. 서 론

토목구조물을 설계함에 있어서 보강재로 보강된 적층복합판의 고유진동수를 구하는 것은 매우 어렵고 복잡한 일이다. 적층판에 대해 강도 이론과 같은 이론들은 매우 복잡하여 대부분의 설계자들로 하여금 설계 초기부터 좌절시키는 원인이 된다. 더욱이 대부분의 토목구조물과 같이 적층판의 Laminate수가 증가할 때 이러한 현상은 심해진다. 복합재료로 설계시 정확한 해석은 필수적이다. 특히 적층복합판은 비등

* 강원대학교 토목공학과 박사과정
** 강원대학교 토목공학과 시간강사
*** 강원대학교 토목공학과 석사과정
**** 강원대학교 토목공학과 교수

방성이고 기존의 강철과 같은 등방성 재료에 적용되는 고전역학 개념과는 다르므로, 등방성 재료에 적용되는 기초적 역학 법칙은 비등방성 적층판에 적용할 경우, 그 관계는 매우 복잡해 진다. 따라서 본 논문에서는 적층판의 실용화를 위해 비등방성 형태의 한 경우인 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$의 적층판을 대상으로, Tsai[2]의 유사등방성 상수에 D. H. Kim의[1][3] 수정계수를 함께 고려하여 고유진동수를 계산하고자 하였다.

또한 기존의 정확해로 잘 알려진 Whitney식에 의한 계산결과와 비교하였다.

2. 본 논문에 사용된 이론

(1)유사 등방성 개념(Quasi-Isotropic Concept)

복합재료 구조물의 예비 설계는 Tsai[2]에 의해 제안된 유사등방성(Quasi-Isotropic) 상수을 사용하면 가능하다. 역대칭 형태의 적층판을 포함한$D_{16}=D_{26}\to 0$로 되는 적층판들은 특별직교 이방성 적층판과 같은 방정식을 사용하여 계산할 수가 있다. 적층판에 적용된 하중에 대하여 선택된 층의 각도 배향이 어떻든지간에 최소값은 유사등방성 적층판과 동일하므로 어떠한 강성요소보다 더 좋은 설계요소가 된다. Tsai[2]는 이러한 요소들을 다음 식(1)과 같이 제시하였다.

$$[Q]^{iso} = \begin{vmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{vmatrix} \tag{1}$$

여기서

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{xx}+3Q_{yy}+2Q_{xy}+4Q_{ss}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{xx}+Q_{yy}+6Q_{xy}-4Q_{ss}) \\ &= U_1-2U_5 \qquad (2) \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{xx}+Q_{yy}-2Q_{xy}+4Q_{ss}) \end{aligned}$$

불변량과 축내 강성계수의 관계는

$$\begin{aligned} U_1 &= U_4+2U_5=\frac{1}{8}(3Q_{11}+3Q_{22}+2Q_{12}+4Q_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11}-Q_{22}) \qquad (3) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-4Q_{66}) \\ U_4 &= U_1-2U_5=\frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}+6Q_{12}-4Q_{66}) \\ U_5 &= \frac{(U_1-U_4)}{2}=\frac{1}{8}(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}+4Q_{66}) \end{aligned}$$

이 되며,
축외의 강성 계수는 다음 식(4)와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= U_1+U_2\cos(2\theta)+U_3\cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{22} &= U_1-U_2\cos(2\theta)+U_3\cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{12} &= \overline{Q}_{21}=U_4-U_3\cos(4\theta), \\ \overline{Q}_{66} &= U_5-U_3\cos(4\theta) \qquad (4) \\ \overline{Q}_{16} &= \overline{Q}_{61}=\frac{1}{2}U_2\sin(2\theta)+U_3\sin(4\theta), \\ \overline{Q}_{26} &= \overline{Q}_{62}=\frac{1}{2}U_2\sin(2\theta)-U_3\sin(4\theta) \end{aligned}$$

Quasi-Isotropic 상수를 사용할 경우

$D_{11}=D_{22}=D_{12}+2D_{66}=D_3=\left(\frac{h^3}{12}\right)Q_{11}^{iso}$, $B_{ij}=0$이며 (5)

$$\omega_n^2=\frac{\pi^4}{\rho h}D_{11}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^4+2\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^4\right] \tag{6}$$

이다.

수식의 간편성을 위해 DEN을 고려하면

$DEN=D_1\left(\frac{m}{a}\right)^4+2D_3\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2+D_2\left(\frac{n}{b}\right)^4$ 와 같이 정의하면

$$DEN=\left(\frac{m}{a}\right)^4\left[D_1+2D_3\left(\frac{na}{mb}\right)^2+D_2\left(\frac{na}{mb}\right)^4\right] \tag{7}$$

$$=\left(\frac{m}{a}\right)^4[D_1+2D_3+D_2+2D_3(r^2-1)+D_2(r^4-1)]$$

$$=\left(\frac{m}{a}\right)^4(DENGN)$$ 이다.

여기서 $r=(ma)/(mb)$이고
$DENGN=DEN/(m/a)^4$ 이다.

또한 Quasi-Isotropic 상수개념이 사용될 때 다음 식(8)과 같이 나타낼 수 있다

$$DEN^{iso}=D_{11}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^4+2\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^4\right] \quad (8)$$

이것은 등방성 판의 경우와 같다.
또 식(7)은 다음 식(9)와 같이 쓸 수 있다.

$$DEN^{iso}=\left(\frac{m}{a}\right)^4\frac{h^3}{12}U_1[4+2(r^2-1)+(r^4-1)] \quad (9)$$

(2) 정확해를 얻기위한 수정계수의 사용

진동에 관한 정확한 값을 얻기 위하여 D. H. Kim[1][3]은 다음과 같은 공식을 제안하여 예비 설계시 수정계수를 사용하여 정확한 해를 구할 수 있는 공식을 마련하였다. Quasi-Isotropic 상수가 사용될 때 진동에 관한 공식은 다음 식(10)와 같다.

$$(\omega_n^{iso})^2=\frac{\pi^4}{\rho h}(DEN^{iso}) \quad (10)$$

그리고 수정계수를 이용한 보다 정확한 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\omega_n)^2=(\omega_n^{iso})^2\cdot(FRC^2) \quad (11)$$

여기서

$$FRC^2(1)=\frac{(D_1+2D_3+D_2+2D_3(r^2-1)+D_2(r^4-1)}{(h^3/12)\ U_1\ [4+2(r^2-1)+(r^4-1)]} \quad (12)$$

만일 모든 층들이 같은 두께와 같은 물성을 가지면 다음 식(13)을 사용 할 수 있다.

$$FRC^2(2)=\ [4(U_1-U_3)+2(U_1-3U_3)(r^2-1)+(U_1-U_2+U_3)(r^4-1)]/[U_1[4+2(r^2-1)+(r^4-1)]] \quad (13)$$

어떤 방향성을 갖는 적층복합판의 층수가 증가함에 따라, $B_{16}\rightarrow 0$, $B_{26}\rightarrow 0$이 될 때 적층복합판은 특별직교 이방성 적층판의 공식으로 정확한 해를 구할 수 있다. 예비 설계시에는 재료의 종류, 층수, 방향성 등이 결정되지 않으므로 사용될 재료의 상수인 U_1과 U_3를 구한 다음 두께만 가정하면, (10)식과 (11)식으로 부터 형상비가 변할 경우는 (13)식으로부터 예비 설계를 할 수 있다. 또한 두께와 보강각도가 결정되고, 형상비가 변할 경우는 (12)식으로 정확한 계산을 할 수 있다.

3. 해석 결과

수치해석에 사용한 적층복합판의 물성은 다음과 같이 가정하였다.

$E_1=38.6\ GPa$, $E_2=8.27\ GPa$, $\nu_{12}=0.26$,
$\nu_{21}=0.0557$, $G_{12}=4.14\ GPa$, $h=0.000125m$

경계조건은 사변 단순지지이며 보강재의 각도는 Table 1과 같다. 또한 적층판의 형상비(b/a)는 a=1m로 고정시키고 b=1~5m까지 변화하였으며, 보강재의 각도를 변화하면서 수치해석을 행하였다.
$[\alpha\ \beta\ \beta\ \gamma\ \alpha\ \alpha\ \beta]_r$형태의 적층복합판에서 고전이론을 사용할 수 있는지에 관해 Table 2~3에 나타내었고, r=1인 적층판에 대해서 형상비 변화에 따른 고유진동수를 Quasi-Isotropic상수와 수정계수를 사용하여 구한 값을 Whitney식을 사용하여 구한 값과 비교하여 Table 4~6에 나타내었다.

Table 1. Angle Orientation of $[\alpha\ \beta\ \beta\ \gamma\ \alpha\ \alpha\ \beta]_r$ Type Laminated Composite Plate.

Angle \ Case	I	II	III	IV	V	VI
α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
β	0°	-15°	-30°	-45°	-60°	-75°
γ	90°	90°	90°	90°	90°	90°

Table 2. Stiffness of Laminated Composite Plate for Each Case

Stiffness \ r(N)	Case Ⅰ				Case Ⅱ				Case Ⅲ			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
B_{ij}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A^*_{11}/D^*_{11}	0.88979	0.99748	0.99945	0.99975	0.89295	0.99756	0.99947	0.99976	0.90422	0.99874	0.99953	0.99978
B^*_{16}/D^*_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B^*_{11}/D^*_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table 3. Stiffness of Laminated Composite Plate for Each Case

Stiffness \ r(N)	Case Ⅳ				Case Ⅴ				Case Ⅵ			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
B_{ij}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A^*_{11}/D^*_{11}	0.92854	0.99843	0.99966	0.99984	0.96591	0.99928	0.99985	0.99993	0.99368	0.99987	0.99997	0.99999
B^*_{16}/D^*_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B^*_{11}/D^*_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Table. 4. Natural Frequencies and Correction Factor of Laminated Composite Plate for Case Ⅰ, Ⅱ

Method \ Aspect Ratio	Case Ⅰ			Case Ⅱ		
	1	3	5	1	3	5
ω_n^{exact}	19.29792	15.02388	14.73534	20.21175	14.54498	14.11011
ω_n^{orth}	19.29791	15.02387	14.73533	20.21174	14.54498	14.11011
ω_n^{iso}	21.09101	11.71723	10.96733	21.09101	11.71723	10.96733
$FRC^2(1)$	0.83719	1.64755	1.80922	0.83719	1.64755	1.80922
$FRC^2(2)$	0.83719	1.64404	1.80517	0.91835	1.54090	1.65523
$\omega_n^{orth}FRC(1)$	19.29787	15.03988	14.75185	19.29791	15.03988	14.75185
$\omega_n^{iso}FRC(2)$	19.29787	15.02385	14.73533	20.21174	14.54495	14.11010
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{iso}$	0.91498	1.28220	1.34357	0.95831	1.24133	1.28656
D_{11}	2.1815723	2.1815723	2.1815723	1.9741523	1.9741523	1.9741523
ω_n^{beam}	14.57755	14.57755	14.57755	13.86724	13.86724	13.86724
$\omega_n^{Plate}/\omega_n^{beam}$	1.32381	1.0306176	1.010824	1.457517	1.048873	1.0175139

Table. 5. Natural Frequencies and Correction Factor of Laminated Composite Plate for Case Ⅲ, Ⅳ.

Method \ Aspect Ratio	Case Ⅲ			Case Ⅳ		
	1	3	5	1	3	5
ω_n^{exact}	21.92545	13.23456	12.44410	22.73391	11.43812	10.31165
ω_n^{orth}	21.92544	13.23455	12.44410	22.73389	11.43811	10.31165
ω_n^{iso}	21.09101	11.71723	10.96733	21.09101	11.71723	10.96733
$FRC^2(1)$	0.83719	1.64755	1.80922	0.83719	1.64755	1.80922
$FRC^2(2)$	1.08069	1.27575	1.28743	1.16185	0.95292	0.88400
$\omega_n^{orth}FRC(1)$	19.29787	15.03988	14.75185	19.29787	15.03988	14.75185
$\omega_n^{iso}FRC(2)$	21.92542	13.23451	12.44407	22.73382	11.43808	10.31162
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{iso}$	1.03956	1.12950	1.13465	1.07790	0.97618	0.94022
D_{11}	1.4753059	1.4753059	1.4753059	.954367	0.954367	.954367
ω_n^{beam}	11.98784	11.98784	11.98784	9.641786	9.641786	9.641786
$\omega_n^{Plate}/\omega_n^{beam}$	1.828974	1.1039987	1.03806	2.35785	1.186307	1.069475

Table. 6. Natural Frequencies and Correction Factor of Laminated Composite Plate for Case Ⅴ, Ⅵ.

Method \ Aspect Ratio	Case Ⅴ			Case Ⅵ		
	1	3	5	1	3	5
ω_n^{exact}	21.92545	9.63057	8.45893	20.21175	8.29612	7.40348
ω_n^{orth}	21.92544	9.63056	8.45892	20.21174	8.29612	7.40348
ω_n^{iso}	21.09101	11.71723	10.96733	21.09101	11.71723	10.96733
$FRC^2(1)$	0.83719	1.64755	1.80922	0.83719	1.64755	1.80922
$FRC^2(2)$	1.08069	0.67554	0.59488	0.91835	0.50130	0.45569
$\omega_n^{orth}FRC(1)$	19.29787	15.03988	14.75185	19.29787	15.03988	14.75185
$\omega_n^{iso}FRC(2)$	21.92542	9.63054	8.45892	20.21164	8.29610	7.40347
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{exact}/\omega_n^{iso}$	1.03956	0.82192	0.7712	0.95831	0.70803	0.67505
D_{11}	0.618756	0.618756	0.618756	0.4905644	0.4905644	0.4905644
ω_n^{beam}	7.763535	7.763535	7.763535	6.912702	0.912702	6.912702
$\omega_n^{Plate}/\omega_n^{beam}$	2.824158	1.240487	1.0895719	2.923856	1.2001269	1.0709965

Table 4~6는 Table 1에서 제시한 경우의 보강각도에 대해서 고유진동수를 계산한 것이다. 또한 적층복합판의 고유진동수와 고전이론에 의한 단순보의 고유진동수를 비교하여 형상비 변화에 따른 유사성을 분석하였다.

이 결과 형상비가 1일 때 보강각도에 따라 적층복합판과 고전이론에 의한 단순보의 고유진동수 값의 비율은 1.32~2.92로서 많은 차이를 보이지만, 형상비가 5인 경우는 1.01~1.09로 고전이론에 의한 단순보의 공식으로도 적층복합판 해석이 가능함을 알 수 있다.

결과를 종합적으로 고찰해 볼 때 형상비가 증가할 경우는 고전이론에 의한 단순보로 해석이 가능하며, 또한 Quasi-Isotropic 상수를 고려하여 계산된 고유진동수 값에 수정계수를 적용한 결과, 예비 설계시 및 실제 구조물 설계시에 정확해를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서 고려된 적층복합판은 특수한 형태로써, $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$로 보강된 적층복합판에 대해 불변량과 수정계수를 사용하여 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층복합판에서 $\gamma=90^\circ$, 0°이고, $\alpha=-\beta$이면 유사균질성(Quasi-Homogeneous)이며, 고전역학 이론의 사용이 가능함을 알았다. 또한 유사 등방성 상수와 수정계수를 사용하여 구한 고유진동수는 일반적으로 정확해로 알려진 Whitney식으로 계산한 값과 정확히 일치 하였다.

형상비 증가에 따른 단순지지된 적층판의 고유 진동수는 형상비가 5 이상이면 고전이론에 의한 단순보의 고유진동수 값에 접근함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Kim. D. H.," A Simple Method of Obtaining "Exact" Solutions of Vibration and Buckling Problems of the Primary Structures for Civil Construction Composite Laminated", *Journal of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Oct., 1991.

[2] Tsai, S. W., Composite Design, 4th Ed., *Think Composites*, Dayton, 1988.

[3] Kim, D. H., Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, *E & FN SPON*, 1995.

[4] Lekhnitskii, S. G., and Tsai, S. W., T. Cheron, *Anisotripic Plates,* Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

[5] Ashton, J. E. and Whitney, J. M., Theory of Laminated Plates, *Technomics*, 1970.

[6] Jones, R. M., Mechanics of Composite Materials, *McGRAW -HILL*, 1975.

[7] Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., The Behavior of Structures Composed of Composite Materials, *Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht*, 1987.

[8] Verchery, G., et. al., *"A Quantitative Study of the Influence of Anisotropy on the Bending Deformation of Laminates"*, *ICCM 8*, July, 1991.

[9] Kim, D.H., Kim, K.J., and Shim D.S., "Possibility of Using the Classical Mechanics for the Preliminary Design of

Laminated Composite Structures for Civil Construction", *Journal of KSCE*, Oct., 1991.