

橋梁上板形 積層複合板의 振動數에 대한 添加質量的 影響

심도식* · 이세진** · 김경진*** · 박제선****

Influence of Attached Mass/Masses on Natural Frequency of Vibration of Laminated Composite Plate for Bridge Deck

Do-Sik Sim* · Se-Jin Lee** · Kyung-Jin Kim*** · Je-Sun Park****

ABSTRACT

A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beams and tower structures with irregular cross-sections and with arbitrary boundary conditions was developed and reported by D. H. Kim in 1974. In order to obtain the natural frequency by the presented method, the first step to take is to obtain the deflection influence surfaces. In design and analysis of any structure, the first step to be taken is to obtain this deflection influence surfaces. Any method can be used for this purpose. Then using this surfaces, deflections, slopes, moments, shears, and natural frequencies can be obtained by differentiating either the continuous function or discrete function defined at certain points. The merit of the presented method is that the natural frequency can be obtained by the deflection influence surfaces obtaining which is the first step in structural analysis.

1. 서론

20세기에 들어서면서 토목, 건축, 기계, 조선, 항공등의 분야에 콘크리트, 강재, 알루미늄 및 그의 합금등이 주된 소재로 이용되고, 근래에 와서는 재료 및 금속·화학

공학의 눈부신 발달로 각종 구조용 신소재들이 많이 등장하고 있다.

이러한 소재를 건설재료로 사용할 때 기존의 재료를 사용한 구조물 설계시 가장

* 강원대학교 토목공학과 시간강사

** 강원대학교 토목공학과 석사과정

*** 충주산업대학교 토목공학과 전임강사

**** 강원대학교 토목공학과 교수

큰 문제점으로 대두되는 자중을 현저히 감소시킬 수 있는 장점을 갖고 있다. 따라서 본 논문에서는 교량데크에 첨가질량(Attached Mass)이 재하된 경우에 대해서 설계시에 계산된 영향계수를 사용하여 전단력, 모멘트, 진동해석을 할 수 있는 간편한 방법을 제시하였다.

2. 본 연구에 사용된 진동 해석방법

교량의 상판, 건축물의 바닥, 벽체 등 대부분의 구조물은 2차원의 구조부재로 이루어져 있다. 이러한 구조물은 대부분 탄성 지지되었거나 변단면으로 되어 있어 해석상 어려움이 뒤따르게 된다. 균등단면을 갖고 단순지지되거나 적어도 대칭의 두 지지가 단순지지가 아닌 경우, 해석적으로 진동문제를 해결하기란 그리 쉬운 일이 아니다. 그 반면, 본 논문에서 사용한 방법은 이러한 문제를 쉽게 해결할 수 있고 매우 간편하게 정해(Exact Solution)를 얻을 수 있다는 큰 장점이 있다.

첨가질량에 관한 연구는 1987년 Pretlove^[3]가 단순한 보의 첨가질량에 대한 해석을 한 바 있으나 1차원 문제에 대한 특수한 경우의 해석에 불과하였으며, 본 연구에서는 2차원으로 확장 적용하기 위해 D. H. Kim의 진동해석방법을 사용하였다. 구조물의 고유진동수는 공명상태하에서 확산하기 시작하는 처짐모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대처짐은 이러한 관성력 하에서 불변하다.

구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형

상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x, y)F(t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (1)$$

여기서, W : 최대진폭,

ω : 고유 진동 주파수,

t : 시간이다.

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m

$$\text{의 동적힘은 } F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ 이다.} \quad (2)$$

(1)식을 식(2)에 대입하면

$$F = -m(\omega)^2 W \sin \omega t \quad (3)$$

이며, ω 와 W 는 미지수이다. 고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (4)$$

여기서 (i, j) 는 고려한 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대진폭에 대응하는 동적힘은 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$F(i, j)(1) = -m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (5)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & w(i, j)(2) \\
 & = f \{ m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \} \quad (6) \\
 & = \sum \Delta(i, j, k, l) \{ -m(i, j) \\
 & \quad [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \}
 \end{aligned}$$

여기서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i, j)(1)$ 과 $w(i, j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음 조건을 만족해야 한다.

$$w(i, j)(1) / w(i, j)(2) = 1 \quad (7)$$

이 방정식으로부터 (i, j) 의 각 점에서의 $\omega(i, j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i, j)$ 의 충분한 같은 값이 모든 (i, j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫 번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i, j)$ 의 최대값과 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시될 수 있다. 정확도는 최대치와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i, j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

2번째 cycle의 최대 처짐은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & w(i, j)(3) = \\
 & f \{ m(i, j) [\omega(i, j)(2)]^2 w(i, j)(2) \} \quad (8)
 \end{aligned}$$

에서 $\omega(i, j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다.

모든 구조물을 설계하기 위해서는 각종 변위, Slope, 모멘트, 전단력 등을 구하고 각종 하중상태하에서의 이들 값을 구해야 한다. 그런 다음에 진동이나 좌굴문제를 다시 고려해 콘크리트 등과 같은 복합구조를 해석 설계하는 것이다.

복합구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 해석상 이상적이 아닌 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇 개의 질량요소로 나누어 고려하는 것이

편리하며, 정확한 영향계수를 구하는 것은 매우 중요한 일이 된다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

3. 수치 해석 결과

본 연구의 해석방법에 대한 예로서 $[\alpha, \beta, a]$ 적층복합판을 사용하였으며, 이때 보강재의 각도는 $\alpha=0^\circ, \beta=90^\circ$ 로 하였고, 각 층(ply)의 두께(h_0)는 $0.005m$ 로 균일하며, $r=1$ (3층)일 때를 고려하였다. 경계조건은 Figure 1과 같으며, 판의 형상비(a/b)는 1에서 5까지 증가시켜 각 경우에 대한 해석을 수행하였으며, 수치해석에서 사용한 적층복합판의 물성은 다음과 같이 가정하였다.^[4]

$$E_1 = 67.36 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.2720, \quad \nu_{21} = 0.0328,$$

$$G_{12} = 3.0217 \text{ GPa},$$

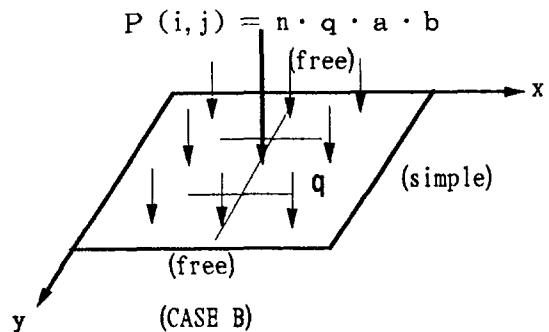
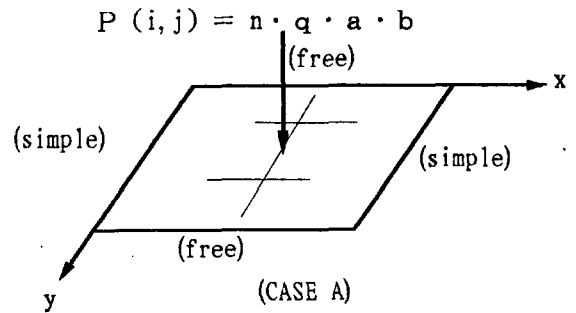


Figure 1. Boundary Condition of Plate($c=a/b=1$)

(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)

Figure 2. Location of Concentrated Mass, (i,j)

(Aspect ratio 1:3)

ω n	Case A	Case B	B/A
0		187.8315	
1	218.670	143.689	0.6571
3	126.249	105.552	0.8361
5	97.792	87.236	0.8921
7	82.649	75.998	0.9195
10	69.149	65.122	0.9418
15	56.460	54.208	0.9601
20	48.896	47.413	0.9697

Table1. $\omega = \omega_{real} \sqrt{\rho \bar{h}}$ at the Center Point with Attached Mass/Masses

(Aspect ratio 1:1)

ω n	Case A	Case B	B/A
0		1439.022	
1	722.502	659.052	0.9122
3	417.137	404.090	0.9687
5	323.113	316.967	0.9810
7	273.080	269.349	0.9863
10	228.475	226.280	0.9904
15	186.549	185.350	0.9936
20	161.556	160.776	0.9952

(Aspect ratio 1:4)

ω n	Case A	Case B	B/A
0		110.6975	
1	150.568	89.659	0.5955
3	86.930	68.742	0.7908
5	67.336	57.789	0.8582
7	56.909	50.804	0.8927
10	47.614	43.871	0.9214
15	38.876	36.762	0.9456
20	33.668	32.268	0.9584

(Aspect ratio 1:2)

ω n	Case A	Case B	B/A
0		398.2901	
1	360.047	272.028	0.7555
3	207.873	186.525	0.8973
5	161.018	150.562	0.9351
7	136.085	129.626	0.9525
10	113.857	110.007	0.9662
15	92.963	90.839	0.9772
20	80.509	79.119	0.9827

(Aspect ratio 1:5)

ω n	Case A	Case B	B/A
0		73.6756	
1	111.660	61.724	0.5528
3	64.467	48.725	0.7558
5	49.936	41.492	0.8309
7	42.203	36.740	0.8706
10	35.310	31.926	0.9042
15	28.830	26.901	0.9331
20	24.968	23.684	0.9486

Figure 1에서 CASE-A는 집중하중 $P(i, j) = n \cdot q \cdot a \cdot b$ 만을 받는 판이며, CASE-B는 $P(i, j)$ 와 등분포하중 q 를 받는 적층복합판이며, n 은 하중정수로서 적층복합판의 자중에 대한 정수배를 의미하는 것이다. 여기서 (i, j) 와 q 는 각각 집중하중(F)의 위치와 적층복합판의 등분포 사하중 ($\rho \cdot h \cdot g$)을 나타낸다. Figure 2는 하중 작용점 (i, j) 를 나타낸다.

Table 1은 판의 중앙점에 집중하중이 재하된 경우의 형상비 변화에 따른 고유진동수 값이다.

수치예로서 위의 물성을 사용한 적층판의 영향계수를 F.E.M으로 구하고 유한차분법을 적용하여 기 계산된 변위의 영향계수로부터 변위, 전단력, 모멘트, 고유진동수를 계산하여 Table 2~4에 나타내었다. Figure 3은 적층판의 경계조건 및 집중하중의 위치를 보여준다. 형상비 $c = a/b = 1$ 이며 하중은 4개의 4N 및 등분포 하중($\rho \cdot g \cdot h$)이다. 이 하중상태에서 적층판의 고유진동수는 $6266.705 / \sqrt{\rho h}$ 이다.

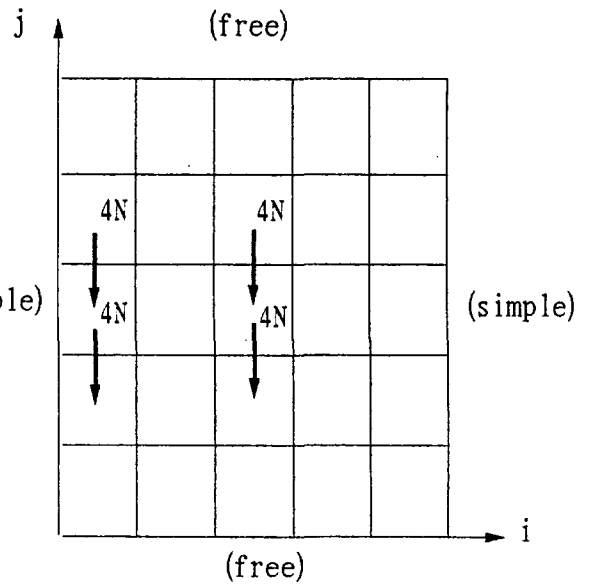


Figure 3. Location of Concentrated Mass

Table 2. Deflection of Each Point

(UNIT : 10^{-6} m)

J \ I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.000	-0.790	-2.236	-3.607	-4.559	-4.907	-4.588	-3.658	-2.286	-0.813	0.000
2	0.000	-2.669	-5.119	-7.135	-8.403	-8.768	-8.211	-6.826	-4.821	-2.495	0.000
3	0.000	-4.191	-7.841	-10.586	-12.259	-12.675	-11.817	-9.820	-7.001	-3.642	0.000
4	0.000	-5.501	-9.885	-13.173	-15.275	-15.900	-14.617	-12.006	-8.495	-4.392	0.000
5	0.000	-5.663	-10.56	-14.187	-16.361	-16.838	-15.609	-12.858	-9.074	-4.680	0.000
6	0.000	-5.552	-9.989	-13.333	-15.482	-16.128	-14.831	-12.178	-8.611	-4.450	0.000
7	0.000	-4.329	-8.124	-10.996	-12.747	-13.192	-12.316	-10.248	-7.302	-3.791	0.000
8	0.000	-3.065	-5.825	-7.974	-9.279	-9.647	-9.082	-7.658	-5.520	-2.885	0.000
9	0.000	-1.955	-3.711	-5.095	-5.971	-6.254	-5.925	-5.026	-3.648	-1.917	0.000
10	0.000	-0.982	-1.873	-2.592	-3.063	-3.231	-3.075	-2.611	-1.890	-0.993	0.000
11	0.000	-0.071	-0.204	-0.338	-0.440	-0.489	-0.471	-0.386	-0.245	-0.088	0.000

Table 3. V_x of Each Point

(UNIT : N)

I \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-16.882	-7.819	2468.882	3273.890	3583.177	3392.083	2746.729	1784.668	4089.654	2599.263	1042.518
2	-4.959	-7.979	5179.189	6128.229	6452.347	6086.071	5104.047	3659.150	7611.555	5404.118	2796.194
3	-8.410	129.113	7972.202	9323.378	9708.896	9146.567	7702.565	5583.134	11163.63	7930.724	4088.481
4	0.491	139.565	9992.306	11577.75	12030.54	11255.78	9452.144	6737.408	13625.10	9598.608	4928.771
5	-11.713	135.258	10617.73	12358.11	12796.70	11982.74	10007.78	7186.166	14573.07	10257.83	5251.987
6	0.498	107.668	10056.19	11659.20	12118.67	11335.11	9513.544	6773.037	13780.67	9710.180	4993.803
7	-8.992	80.241	8180.555	9568.348	9966.467	9388.070	7901.477	5716.915	11571.79	8234.396	4259.098
8	-7.072	44.749	5896.127	6937.706	7276.172	6895.071	5859.980	4281.465	8618.479	6214.643	3246.816
9	-4.027	113.386	3934.610	4681.050	4961.467	4754.587	4088.977	3030.456	5803.649	4180.653	2157.721
10	-1.853	71.643	2028.467	2434.330	2601.962	2510.091	2168.104	1613.333	3045.125	2185.092	1116.726
11	-1.453	35.722	302.465	412.484	469.839	466.859	402.684	289.000	501.434	316.314	113.676

Table 4. M_y of Each Point

(UNIT : N · m)

I \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.411	-0.635	-0.519	-0.486	-0.344	-0.284	-0.431	-0.785	-1.103	-1.150	0.414
2	-0.138	-11.137	-17.149	-21.121	-23.068	-23.179	-21.724	-18.933	-15.043	-9.951	-0.105
3	-0.339	-9.246	-16.500	-20.877	-23.359	-23.667	-21.823	-18.044	-13.102	-6.894	-0.177
4	-0.700	-8.371	-12.654	-15.886	-18.586	-20.077	-17.225	-13.359	-9.113	-4.571	-0.181
5	-0.479	-1.425	-4.753	-6.851	-7.417	-6.561	-6.761	-5.640	-3.771	-1.864	-0.179
6	-0.699	-0.050	2.661	4.252	4.199	2.940	3.700	3.408	2.336	1.162	-0.181
7	-0.335	6.821	10.336	12.977	15.192	16.355	13.976	10.750	7.306	3.683	-0.175
8	-0.191	7.211	13.078	17.161	19.716	20.169	18.397	14.715	10.122	5.145	-0.157
9	-0.124	6.374	12.139	16.534	18.995	19.480	18.121	15.103	10.740	5.550	-0.117
10	-0.057	5.637	10.655	14.497	16.835	17.495	16.491	13.978	10.176	5.352	-0.060
11	0.040	0.219	0.498	0.709	0.803	0.782	0.679	0.521	0.317	0.101	0.043

4. 결 론

본 논문에서는 D. H. Kim에 의해 개발되어진 정확하고 간편한 진동해석 방법이 구체적인 예와 함께 제시되었으며 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

고전이론과 유한요소 프로그램의 처짐에 대한 차이는 최대 1.2~3.1%이며, 형상

비의 증가에 따라 처짐의 증가로 인해 고유진동수가 현저하게 감소됨을 알 수 있었다. 적층복합판의 진동해석시 첨가질량이 판의 자중에 비해 클수록 판의 자중을 무시한 첨가질량만으로 고유진동수를 계산할 수 있었다. 또한 설계시에 최초 필요

하여 계산된 변위의 영향계수를 사용하여 변위, 전단력, 모멘트, 고유진동수를 계산할 수 있는 매우 효과적인 해석방법을 제시하였다. 주어진 방법은 bridge deck, building slab, girders, cross-beams systems와 같은 구조부재에 응용되어 진다.

참 고 문 헌

- [1] Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, 1995.
- [2] Kim, D. H., et all, "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members - For Higher Modes", 8th Structural Congress, *American Society of Civil Engineers*, Baltimore, MD., U.S.A., 1990.
- [3] Pretlove, A. J., "A Simple and Accurate Method for Calculating the Fundamental Natural Frequencies of Beams with Attached Masses", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol 15 No 4, Ellis Horwood Ltd, Chichester, England, pp 257~266, 1987.
- [4] Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- [5] Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements", Proc. International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, 1974.
- [6] Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S., "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements", Proc. 1st Japan Int' SAMPE Symposium, 1989.
- [7] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates", Proc. ICCM 8, Honolulu, Hawaii, 1991.
- [8] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Laminated Thick Composite Plates", Proc. EASEC-III, China, 1991.
- [9] Kim, D. H., "The Effect of Neglecting Own Weight on the Natural Frequency of Vibration of Laminated Composite Plates with Attached Mass/Masses", Proc. EASEC-V, Australia, 1995.
- [10] Timoshenko, S.P., "History of Strength of Materials", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, pp. 298,338.
- [11] Crasto, A. S., and Kim, R. Y., "The Influence of Specimen Volume on Matrix-Dominated Composite Strength", Proc. 38th International SAMPE Symposium, 1993.
- [12] Sastry, A. M., and Phoenix, S. L., "Shielding and Magnification of Loads in Elastic, Unidirectional Composites". SAMPE Journal, Vol. 30, No. 4, July/August, 1994.