

축대칭 선회난류의 수치해석에 의한 비등방 $k-\epsilon$ 난류모델의 評價

이 연 원*

Evaluation of the Anisotropic $k-\epsilon$ Turbulence Model
by the Numerical Analysis of Axisymmetric Swirling Turbulent Flow

Yeon - Won LEE

Key words : Swirling Turbulent Flow(선회난류), Anisotropic $k-\epsilon$ Turbulence Model(비등방 $k-\epsilon$ 모델), Order of Magnitude(크기등급)

Abstract

To overcome weak points of the standard $k-\epsilon$ turbulence model when applied to complex turbulent flows, various modified models were proposed. But their effects are confined to special flow fields. They have still some problems. Recently, an anisotropic $k-\epsilon$ turbulence model was also proposed to solve the drawback of the standard $k-\epsilon$ turbulence model. This study is concentrated on the evaluation of the anisotropic $k-\epsilon$ turbulence model by the analysis of axisymmetric swirling turbulent flow. Results show that the anisotropic $k-\epsilon$ turbulence model has scarcely the fundamentally physical mechanism of predicting the swirling structure of flow.

1. 서 론

선회류는 유체기계, 사이클론 분리기 및 연소기 등의 많은 공학적인 장치에서 일어난다. 선회류는 큰 유선곡률을 갖고있는 3차원 흐름장이므로 물리적으로 복잡한 흐름장의 하나이다. 현저한 특징으로는 축방향속도가 최대가 되는 위치가 벽쪽으로 이동하는 점과 접선방향의 선회속도가 오래 지속하는 점이다. 난류에 의한 에너지 cascade 효과

만을 고려한 종래의 渦粘性 난류모델을 사용할 경우, 선회성분은 실험에 비해 훨씬 빨리 감소해 버린다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 여러가지 제안이 있어왔다. 대표적인 것으로 선회류 구조를 지속시키기 위해 Richardson수를 이용한 Kim & Chung(1987)의 수정, Karasu(1980)에 의한 수정 등이 있다. Karasu는 Lilley & Chigier(1976)가 반실험적인 수법을 사용하여 선회에 중요한 渦粘性계수를 혼합거리 이론식으로 수정 제안한 것을

* 정회원, 부경대학교 기계공학과 열유체공학연구소

관내 선회류에 적용하여 개선된 결과를 얻었다. 나아가서 이러한 혼합거리에 방향의존성(변동성분의 이방성)을 고려한 시도가 Kobayashi등(1986)에 의해 있었다.

그러나 이러한 수정형 모델은 특정한 선회류의 속도분포 예측에 대해서는 어느정도 개선을 가져왔지만, 본질적으로 일반성을 갖고 있지않은 결점이 있다. 최근 Kobayashi등의 수정식 및 비등방(비선형) k-ε 난류모델을 적용한 Nishimura등(1990)에 의한 선회류의 해석, Chowdhury & Ahmadi(1992)에 의한 급확대를 가진 축대칭 선회류해석, Hwang등(1993)에 의한 연소기에서의 선형, 비선형이 k-ε 난류모델 비교등이 시도되었지만, 일반성을 가진 모델화로서 효과적인 개선은 보이지 않았다. 그러나 그들은 선회난류의 계산에서 비등방 k-ε 난류모델이 개선된 결과를 보여주지 않는 근본적인 이유에 대해 논리적으로 언급하지 않고 있다. 또한 비등방 모델의 비선형항에 나타나는 계수 가운데 C₂는 아직 확립되었다고 볼 수 없다(Nishijima, 1991). 이 점에 注目하여, 여기서는 선회난류를 대상으로 수치해석을 행하여 비등방亂流모델의 物理的인 機構를 檢討함과 동시에 비선형항에 나타나는 계수 C₂의 최적화도 시도해 본다.

2. 비등방 k-ε 난류모델 및 수치해석

2.1 비등방 k-ε 난류모델

비등방 k-ε 난류모델은 가장 일반적인 난류이론인 Krachnan(1977)의 DIA(Direct Interaction Approximation)이론에다 非線形波의 해석에 자주 사용되어 지고 있는 scale-expansion technique을 결합시켜 만든 TSDIA(Two Scale DIA)를 이용하여 Yoshizawa(1984)가 최초로 제안하였다. 그후 Speziale(1987)가 asymptotic expansion 방법에 의해 realizability 및 요구되는 불변성 조건(necessary invariance requirements)를 만족하는 非線形 k-l, k-ε 모델을 유도했다. 또, Myong(1988)은 난류에너지 수송방정식의 각 항을 재분배, 吟味하여 독자적으로 Yoshizawa와 동

일한 형태의 비등방 k-ε 모델을 제안하고 있다. Myong-Yoshizawa의 비등방 k-ε 모델에 있어서의 Reynolds 응력 표현은 다음과 같다. 여기서 C₁, C₂, C₃는 모델 정수이다.

$$\overline{\rho u_i u_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{k}{\epsilon} \mu_t \sum_{m=1}^3 C_m \left(S_{mij} - \frac{1}{3} S_{m\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \quad (1)$$

$$\mu_t = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$S_{1ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_j}{\partial x_m}$$

$$S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right)$$

$$S_{3ij} = \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_m}{\partial x_j}$$

2.2 비선형항에 나타나는 계수 C₂에 대해서

표 1은 여러 제안자의 비등방 k-ε 모델의 비선형항에 나타나는 계수의 값을 나타낸다. 표에서 알 수 있듯이 비등방 모델의 비선형항의 계수는 제안자에 의해서, 低 Reynolds 수의 減衰函數(wall damping function) 및 Reynolds 응력의 표현이 조금씩 다르지만 본질적으로 문제가 되어있는 것은 C₂ 계수이다. Nishijima는 다른 연구자와는 반대가 되는 負의 값을 사용하고있다. 그 이유에 대해서 Nishijima는 C₂의 값이 만약 正이 되면 正方形 덕트의 이차흐름이 잘 재현되지 않는 것을 들었다. 그러나 동일한 형상의 계산에서 Myoung & Kobayashi(1991)는 C₂에 관련된 항을 전부 소거한 계산에서 이차흐름이 잘 재현되는 것을 보여주고 있다. 이 사실로 부터 正方形 덕트흐름은 C₂ 계수에 대한 의존성이 희박한 것으로 판단된다. 따라

Table 1. Coefficients of Nonlinear Terms in Anisotropic k-ε Models.

No.	C ₁	C ₂	C ₃	Desc.
Myong	0.8	0.45	-0.15	k-ε eq.
Nishizima	0.63	-4.11	-0.074	TSDIA
Rubinstein	0.38	1.156	-0.156	RNG
Speziale	0.456	0.156	-0.156	tensor

서 Nishijima의 계수에는 의문이 있으며, Nishijima의 결과는 오히려 k-ε 방정식에 있어서의 Yoshizawa에 의한 상호확산을 포함한 식이 사용되어진 점과 減衰函數의 표현등에 강하게 관련된 것으로 판단된다. 더욱이 Rubinstein(1991)에 의하면 연속체 역학의 좌표 불변성 가정으로부터 C₂는 正이 된다고 고찰하고 있다. 따라서, Myong - Yoshizawa의 모델의 신뢰성을 높이기 위해서 C₂에 대한 재평가가 필요하다고 생각된다. 본 논문에서는 C₂의 효과가 현저히 나타나는 축대칭 선회난류를 대상으로서 물리적인 機構를 해석함과 동시에 계수 C₂의 최적화를 시도해 본다.

2.3 수치해석

그림 1은 계산대상이고, Kobayashi등(1986)이 이용한 것과 동일한 실험 결과를 이용하였다. Kobayashi등의 계산에서는 직경의 9배의 계산영역을 반경방향으로 20, 축방향으로 36의 등간격 격자를 사용하고 있다. 본 계산에서는 이들을 근거로해서 반경방향으로 22, 축방향으로 72의 등간격 격자를 사용하였다. 계산영역은 출구의 영향을 줄이기 위하여 Kobayashi등 보다 약 1.67배의 영역을 계산하고, 4.5D 및 8.9D의 곳에서 실험치와 비교하였다.

입구조건으로는 속도의 경우 실험치를, 난류량의 경우 경험치를 사용하였다. 즉, 난류강도는 $k_{in} = \alpha_t (U_{in})^2$ 으로 계산되고, 여기서 α_t 는 난류강도 계수이고, U_{in} 은 입구의 평균속도이다. 에너지 소

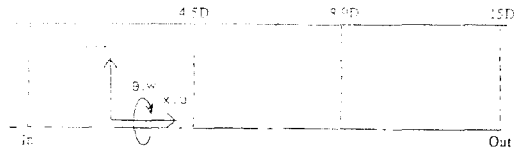


Fig. 1 Calculation Domain of Flow Field of an Axisymmetric Pipe Flow.

산율은 혼합거리 가정으로부터 구해진다. 즉, $\epsilon = (k_{in})^{1.5} / \alpha_1 R$ 여기서, α_1 은 길이크기계수(length scale factor)이다. 벽면조건 으로서는 Lilly & Rhode(1982)가 선회난류 계산에 적용한 벽법칙을 사용하였다. 계산은 Lilley & Rhode가 이용하였던 STARPIC(Swirling Turbulent Axisymmetric Recirculating Flows in Practical Isothermal Combustor Geometries) 프로그램 코드를 수정하여 사용하였다. 계산 Algorithm은 SIMPLE 이며 Solver는 TDMA이다.

3. 계산결과 및 고찰

3-1 축대칭 선회류의 Reynolds응력

속도구배에 대해서 표 2를 참고하여 Reynolds 응력의 각 항에 대해 order해석(Tennekes & Lumley(1972)에 의해 난류해석時 자주 사용되는 order of magnitude 法)을 하면, 축대칭 선회류에 대한 Reynolds응력은 성분별로 다음과 같다.(2-7)

또한, 표 2의 결과로부터 (8)식과 같이 가정하면

$$\overline{uu} = \frac{2}{3} k - \nu_t \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (2C_1 - C_3) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (-C_1 - C_3) + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (-C_1 - C_3) + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (2C_2) \right] \quad (2)$$

$$\overline{vv} = \frac{2}{3} k - \nu_t \left(2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (2C_1 - C_3) + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (-C_2) \right] \quad (3)$$

$$\overline{ww} = \frac{2}{3} k - \nu_t \left(2 \frac{V}{r} \right) + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (-C_1 - C_3) + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (2C_1 - C_3) + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (-C_2) \right] \quad (4)$$

$$\overline{uv} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5)$$

Table 2. Order of Spatial Difference Terms(refer to Ref. No.4)

$\frac{\partial U}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial r}$	$\frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{\partial V}{\partial r}$	$\frac{\partial W}{\partial x}$	$\frac{\partial W}{\partial r}$
$\theta(10^{-2})$	$\theta(10^0)$	$\theta(10^{-1})$	(10^{-2})	$\theta(10^{-2})$	$\theta(10^0 - 10^1)$

$$\begin{aligned} \overline{uw} &= -v_r \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{k}{\epsilon} v_r \left[C_1 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} C_2 \frac{W}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\overline{vw} = -v_r \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \quad (7)$$

$$\Theta \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \approx \Theta \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \approx \Theta \left(\frac{W}{r} \right) = 1 \quad (8)$$

$$\overline{uu} \approx 2C_2 - 3C_3 \quad (9)$$

$$\overline{vv} \approx 3C_3 - C_2 \quad (10)$$

$$\overline{ww} \approx -C_2 \quad (11)$$

$$\overline{uw} \approx C_1 - 0.5C_2 \quad (12)$$

(9)~(12)식이 된다.

여기서, C_1, C_3 는 각각 0.8, -0.15로 정해두고 있는 것으로 하면, 만약 C_2 의 값이 負가 되면, \overline{uu} 에 있어서는 C_3 의 부분과 상호작용하여 相殺되어 버리는 결과를 초래하게 된다. 그러나, 계수 C_2 가 正이 되면 \overline{uu} 로의 비등방효과는 커지게 되고, 전단응력이 개선되지 않아도 축방향의 속도 개선을 초래할 가능성이 있다(13式). 하지만, 이 경우에도 \overline{uw} 는 거의 변하지 않기 때문에 선회속도의 개선은 되지 않는다는 것을 알 수 있다(14式).

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{uv}}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} \\ &= v \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r^2} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{vw}}{\partial r} + \frac{\overline{vw}}{r} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Reynolds응력이 운동방정식과 관계할때 $\overline{uu}, \overline{uw}$ 는 축방향의 微分으로써, $\overline{uv}, \overline{vw}$ 는 반경방향의 微分으로써 관계하지만, 크게 영향을 미치는 $\overline{uv}, \overline{vw}$ 에 대한 order 평가로부터 알 수 있듯이 비등방향에 의한 貢獻은 보여지지 않음으로 본질적으로 旋回流을 개선하는 物理的인 機構를 거의 가지고 있지 않는 것으로 판단된다. 따라서 helicity(Yokoi, 1993)등을 적극적으로 도입할 필요가 있다.

3.2 계산결과 및 고찰

그림 2~그림 5까지의 결과로부터 알 수 있듯이, order of magnitude 해석과 동일한 결과가 얻어졌다. 즉, 축방향속도 U 는 계수 C_2 가 커짐에 따라 실험치에 근사한 결과를 얻지만, 선회속도 W 에 대해서는 효과적인 개선이 얻어지지 않는다. C_2 의 계수에 대해서 2.0 이상의 값을 사용하면, 대칭축쪽의 축방향 속도분포는 실험결과와 좀더 일치한 결과가 얻어지나 연속식을 만족하기 위해서 外徑쪽의 축방향 속도분포의 peak부분이 실험치보다 커지게 되므로, 여기서는 2.0을 최적으로 정한다.

비등방 $k-\epsilon$ 난류모델을 이용한 이론해석 및 수치계산에서 볼 수 있듯이 선회난류의 경우 근본적인 개선은 힘들 것으로 판단된다. 그러나 보다 개선된 결과를 얻기 위해서는 Hwang등(1993)도 그의 논문에서 지적하였듯이 아래의 몇가지 요인들을 먼저 검토할 필요성이 있을 것으로 판단된다.

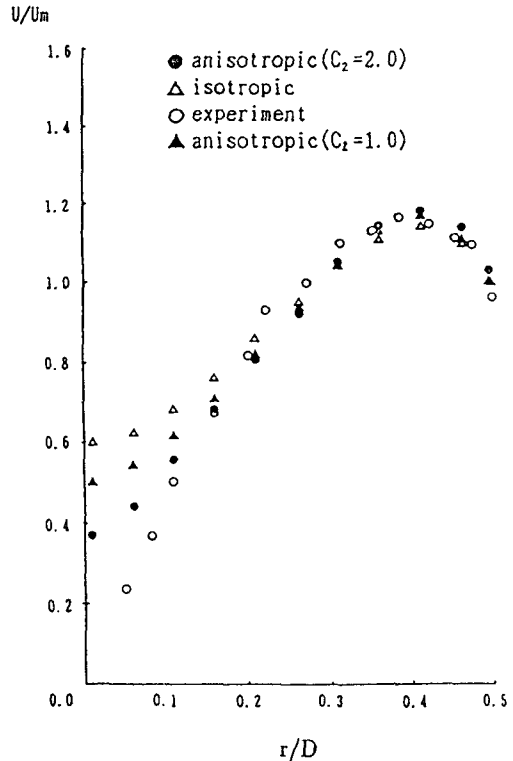


Fig. 2 Axial Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow.(a)4.5 Dia.

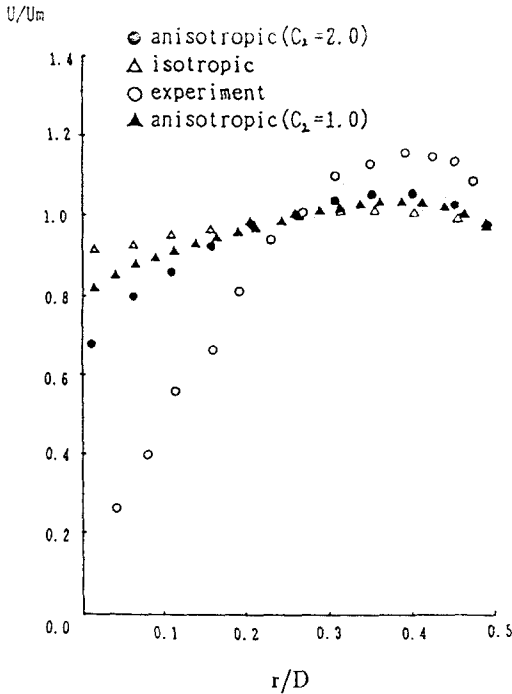


Fig. 3 Axial Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe flow (b) 8.9 Dia.

첫째, 계수의 일반성(흐름에 대한 반응성)을 높이기 위해 좀더 다양한 흐름에로의 검토가 필요하다. 둘째, 벽법칙의 단점을 극복하고 벽면근방의 물리적인 機構를 반영하기 위하여 low Reynolds number 형태의 비등방 모델에 의한 계산도 시도해 보아야 한다. 셋째, k 및 ϵ 에 대한 초기조건의 검토가 필요하다. Leschziner & Rodi(1984)는 ϵ 의 초기조건이 난류모델로서 예측된 정확도를 얻는데 중요한 역할을 한다는 것을 밝혔다. 그리고 본계산 및 Lee & Kobayashi(1992)의 계산에서도 k 및 ϵ 의 초기조건이 계산결과에 중요한 영향을 미친다는 것을 확인하였다. 넷째, 비선형항의 차분검토, 비선형항은 고차미분항으로 구성되어지므로 이항들의 이산화는 수치계산의 정확도 및 수렴성에 영향을 미칠 가능성이 있다.

4. 결 론

축대칭 선회류를 대상으로해서, 비등방 $k-\epsilon$ 난

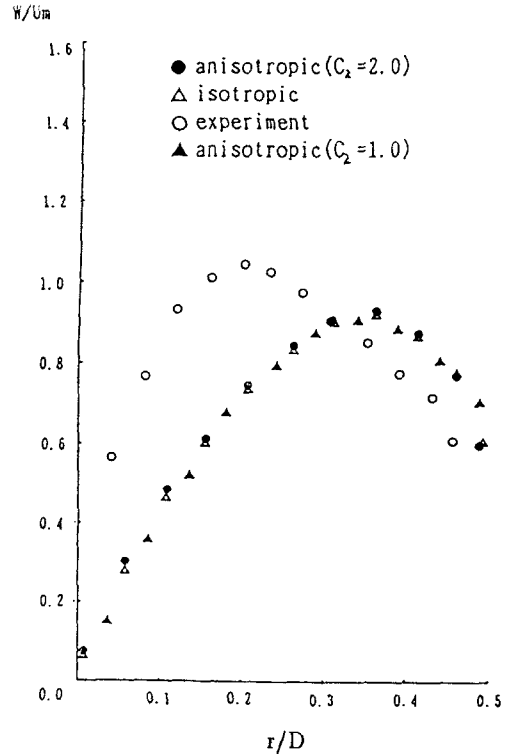


Fig. 4 Swirl Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (c) 4.5 Dia.

류모델의 비선형항의 물리적인 機構를 해석함으로써, 선회류의 경우 근본적인 개선은 어렵다는 것을 알 수 있었다. 또한 계수 C_2 를 최적화하기 위해서, 축대칭 선회류를 대상으로 order of magnitude법에 의한 해석과 동시에 표준 $k-\epsilon$ 난류모델 및 비등방 $k-\epsilon$ 난류모델에 의한 계산을 행하여, 그 결과 계수 C_2 는 正이 되는 것이 타당하다는 것을 명확히 하였다. 계수 C_2 의 일반성을 높이기 위해서 다른 복잡한 난류흐름장에 대해서도 검토할 필요성이 있다.

参考文献

- 1) Kim, K. Y. & Chung, M. K. 1987 New Eddy Viscosity Model for Computation of Swirling Turbulent Flows, AIAA J. 20, 1020.
- 2) Lilley, D. G. & Chigier, N. A. 1971 Nonisotropic Turbulent Stress Distribution in Swirling Flows

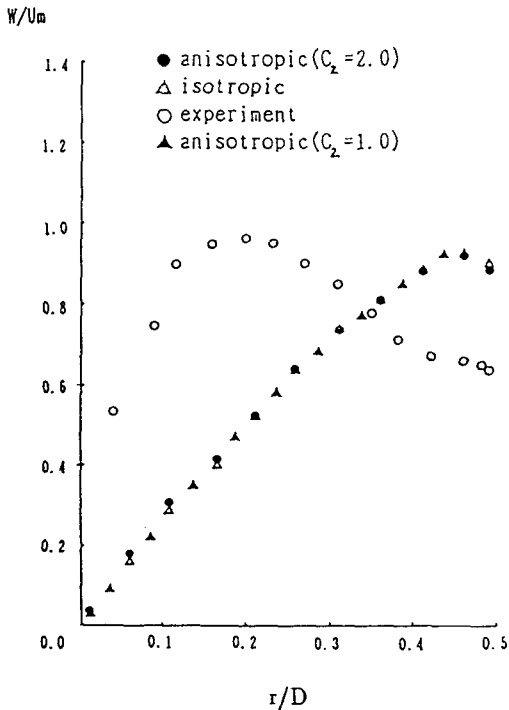


Fig. 5. Swirl Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (d) 8.9 Dia.

from Mean Value Distributions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 14, 573.

- 3) Karasu, T. 1980 Ph.D. Thesis, Imperial College, Univ. of London.
- 4) 小林敏雄 依田守生 1986 直圓管内旋回亂流の數值豫測(第 1 報, 渦粘性假説による平均流速分布の再現), 日本機械學會論文集 B52 - 481, 3230.
- 5) 西村 等 1990 Cylinder内の定常旋回流の速度分布に関する研究 - 第 2報 Cylinder内流れの數值解析, 生産研究, Vol. 43
- 6) Myong, H. K. 1988 Fundamental Studies on Two - Equation Turbulence Model for Numerical Prediction of Wall - Bounded Shear Flow and Heat Transfer, Ph. D. Thesis, The University of

Tokyo.

- 7) Kraichnan, R. H. 1977 *J. of Fluid Mech.* 83, 349.
- 8) Yoshizawa, A. 1984 Statistical Analysis of the Deviation of the Reynolds Stress from its Eddy - Viscosity Representation, *Physics of Fluids* 27(6), 1377. Speziale, C.G. 1987 On Nonlinear $k - l$ and $k - \epsilon$ Models of Turbulence, *J. Fluid Mech.* 178, 459.
- 9) Nishijima, S. 1991 非等方 $k - \epsilon$ モデル, 生産研究, Vol.43
- 10) 明賢國 小林敏雄 1991 正方形断面管内の發達亂流の數值解析, 日本機械學會論文集, B57 - 540, 2538.
- 11) Rubinstein, R. et al 1990 Nonlinear Reynolds Stress Models and the Renormalization Group, *Physics of Fluids A* 2(8), 1472. Tennekes, H. and Lumley, J. L 1972 *A First Course in Turbulence*, The MIT Press.
- 12) Yokoi, N. et al 1993 Three - Equation Model with Helicity Incorporated as a Turbulent Structures, *SEISAN - KENKYU*, IIS, Univ. of Tokyo, Vol.45, No.1, 25.
- 13) Hwang, C. C., et al 1993 A comparison of the Linear and Nonlinear $k - \epsilon$ Turbulence Models in Combustors, *Journal of Fluids Engineering*, Vol.115, pp.93 - 102.
- 14) Lilley, D. G. and Rhode, D. L., 1982, A Computer Code for Swirling Turbulent Axisymmetric Recirculating Flows in Practical Isothermal Combustor Geometries, NASA CR - 3442.
- 15) Leschziner, M.A. and Rodi, W., 1984, Computation of Strongly Swirling Axisymmetric Free Jets, *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1742 - 1747.
- 16) Lee, Y. W. and Kobayashi, T., 1992, Numerical Simulation of a Conical Diffuser Using by the General Curvilinear Coordinate System, "SEISAN - KENKYU" *Monthly Journal of Institute of Industrial Science, University of Tokyo*, Vol. 44, No. 2, pp. 62 - 65.