

論文96-33B-1-14

부여과기를 이용한 ETBF의 다진 영역 표현에 대한 연구

(Multi-level Representations of ETBF Using Subfilters)

宋鍾官*, 鄭炳章**, 李勇勳**

(Jongkwan Song, Byungjang Jeong, and Yong Hoon Lee)

요 약

[1]에서 extended threshold Boolean filter(ETBF)의 부분 군인 self-dual ETBF가 중앙값 부여과기 출력의 가중 평균으로 표현되어짐을 보였다. 이 논문에서는 이 결과를 일반적인 ETBF로 확장한다. 특히, 모든 ETBF를 최솟값(또는 최댓값) 부여과기 출력의 가중 평균으로 표현할 수 있음을 보였다. 이 표현은 자연스럽게 윈도우(window)의 크기가 K보다 작거나 같은 부여과기만을 사용하는 K차 ETBF(K-ETBF)라 불리는 ETBF의 부분 군(subclass)을 제시한다. 여러 가지 K 값에 대하여 평균 제곱 오차(mean square error)를 최소화하는 K-ETBF를 설계한 후 이들을 오염된 신호의 복구에 적용함으로써 여과기의 성능과 복잡도간의 교환작용(tradeoff)을 고찰하였다.

Abstract

In [1], it is shown that a subclass of ETBFs, which are self-dual ETBFs, can be expressed as a weighted average of median subfiltered outputs. In this paper, we extend this result to general ETBFs. In particular, we show that any ETBF can be represented as a weighted average of minimum (or maximum) subfiltered outputs. These representations naturally lead to a subclass of ETBF, called the K-th order ETBF (K-ETBF) that employs only those subfilters whose window sizes are less than or equal to K. By designing K-ETBFs under the mean square error criterion for various values of K and applying them to restore noisy signals, the tradeoff between the performance and the complexity of this class of filters is examined.

I. 서 론

최근 임계치 부울 여과기(threshold Boolean filter: TBF) [2]의 확장으로 확장 임계치 부울 여과기(extended threshold Boolean filter: ETBF) [3]가 소개되었다. ETBF는 임계치 분해 성질(thre-

shold decomposition property)^{[4][5]}에 기초하여 정의되는 여과기로 임계치 분해 성질을 갖는 모든 여과기를 포함한다. 따라서 ETBF는 선형 FIR 여과기, L-여과기^[6], 스택 여과기^[5], TBF 등과 같은 다수의 여과기를 포함한다.

ETBF는 임계치 분해 구조에 근거하므로 이진 영역에서 한 연산자로 완전히 규명된다. 이진 영역 연산자(binary domain operator)를 이용하지 않고 다진 영역(multi-level)에서 직접 ETBF를 정의할 수 있는 ETBF의 다진 영역 표현이 [3]과 [7]에서 유도되었다. 다진 영역 표현을 유도해냄으로써 평균 제곱 오차(mean square error: MSE)를 이용하는 ETBF

* 正會員, 韓國移動通信 中央研究院
(Korea Mobile Telecom Central research & Development Center)

** 正會員, 韓國科學技術院 電氣및電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., KAIST)

接受日字: 1995年8月5日, 수정완료일: 1995年12月26日

의 최적 설계가 가능해졌지만 윈도우(window)의 크기가 증가함에 따라 설계 대상이 되는 여파기 계수의 수가 지수함수 적으로 빠른 속도로 증가하게 된다.

한편 [1]에서는 ETBF의 한 부분군인 셀프 듀얼 ETBF를 중앙값 부여파기(median subfilter) 출력의 가장 평균으로 나타낼 수 있음을 보였다. 이 표현은 중앙값에 기초한 K차 ETBF(median K-ETBF)라 불리는 셀프 듀얼 ETBF라고 하는 유용한 부분군(subclass)을 제시한다. 이 부분군에서는 여파기의 복잡도를 K값을 조절함으로써 제어할 수 있다.

이 논문에서 우리는 셀프 듀얼 ETBF에 대한 이러한 결과를 일반적인 ETBF에 대하여 확장하였다. 특히, 모든 ETBF를 최솟값(또는 최댓값) 부여파기 출력의 가장 평균으로 표현할 수 있음을 보였다. 또한 여러 가지 K 값에 대하여 MSE를 최소화하는 K-ETBF를 설계한 후 이들을 오염된 신호의 복구에 적용함으로써 이 여파기의 성능과 복잡도간의 호환작용(tradeoff)을 고찰하였다.

II. 확장 임계치 부울 여파기 (extended threshold Boolean filters)

$X(n)$ 을 입력 신호라 하고 $X(n)$ 을 시간 n 에서의 윈도우(window) 내에 있는 N 개의 입력 샘플로 구성되는 벡터라 하자. 즉, $X(n) = [X(n-L_1), \dots, X(n), \dots, X(n+L_2)]^T = [X_1(n), \dots, X_k(n), \dots, X_N(n)]^T$. 여기서 $N=L_1+L_2+1$ 이며 $X_k(n) = X(n-L_1-1+k)$ 이다. 이 때 입력 샘플 $X_k(n)$ 은 $\{0, 1, \dots, M\}$ 중의 한 값을 갖는다고 가정한다. 앞으로는 표기(notations)를 간단히 하기 위하여 시간 계수 n 을 생략한다.

ETBF는 다음과 같이 정의된다.

$$F(X) = \sum_{m=1}^M f_B(x^m) \quad (1)$$

여기서 $x^m = [T_m(X_1), T_m(X_2), \dots, T_m(X_N)]^T$ 이며, $T_m(X_k)$ 은 $X_k \geq m$ 이면 1을 아니면 0을 출력으로 내는 임계 연산자(thresholding operator)이다. $f_B(0, 1)^N \rightarrow \mathbb{R}$ 은 이진 입력 벡터 x 를 實數 $f_B(x)$ 로 대응시키는 함수이다. 이 때 $f_B(\cdot)$ 이 부울 함수인 경우 ETBF는 TBF^[2]가 되며, $f_B(\cdot)$ 이 양부울 함수(positive Boolean function)인 경우 ETBF는 스택 여파기^[5]가 되고, $f_B(\cdot)$ 이 가장 평균 연산자라면 ETBF는 선형 FIR 여파기가 된다.

식 (1)의 ETBF는 이진 영역 함수인 $f_B(\cdot)$ 에 의해 완전히 규명된다. 또 다른 방법으로, 식 (1)의 ETBF는 모든 가능한 입력 벡터와 그것에 대응하는 결과 값을 나열하는 확장 진리 표에 의해 기술되어질 수 있다. 표 1은 $N=3$ 일 때의 확장 진리 표를 보여준다. 여기서, c_i 는 상수이며 윈도우 내에 있는 입력이 모두 0일 때 결과는 0이라고 가정한다. 확장 이진 함수 $f_B(\cdot)$ 는 $f_B(x) + f_B(\bar{x}) = f_B(1)$ 의 필요 충분 조건을 만족하면 확장 셀프 듀얼(extended self-dual)이라고 말한다^[11]. 확장 셀프 듀얼한 $f_B(\cdot)$ 를 가진 ETBF를 셀프 듀얼 성질을 가지고 있다고 한다. $f_B(\cdot)$ 가 이진 함수일 때, 확장 셀프 듀얼성은 셀프 듀얼 성을 의미한다. [1]에서 모든 확장 셀프 듀얼 ETBF는 부분 집합 평균 중앙값(subset averaged median: SAM) 여파기로 표현되어질 수 있음을 보여 주고 있다. SAM 여파기는 다음과 같이 정의된다.

$$SAM(X) = \sum_{k=1}^{(N+1)/2} F_{med}^{2k-1}(X) \quad (2)$$

여기서 $[x]$ 는 x 를 넘지 않고 x 에 가장 가까운 정수이고 $F_{med}(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$F_{med}(X) = \sum_{m_1=1}^N \dots \sum_{m_N=1}^N h(m_1, \dots, m_N) \text{med}\{X_{m_1}, \dots, X_{m_N}\}. \quad (3)$$

표 1. $N=3$ 인 경우의 확장 진리 표
Table 1. The extended truth table when $N=3$.

x_1 x_2 x_3	$f_B(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	0
0 0 1	c_1
0 1 0	c_2
0 1 1	c_3
1 0 0	c_4
1 0 1	c_5
1 1 0	c_6
1 1 1	c_7

III. ETBF의 새로운 표현

표 1의 확장 진리 표로부터 다음과 같은 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$f_B(x) = (c_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) + (c_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3) + \dots + (c_7 x_1 x_2 x_3) \quad (4)$$

여기서 \bar{x} 는 x 의 논리부(logical NOT)을 나타낸다.

c_i 가 집합 $(0,1)$ 의 원소일 때 이 표현은 부울 함수가 되며, 일반적으로 이 표현은 이진 함수의 곱의합 형태(sum of product form)의 확장이 된다. 이 표현을 $\bar{x}_i = 1-x_i$ 을 이용하여 산술 연산자로 바꾼 후 다소의 계산을 통하여 $f_B(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_4x_3 + (c_3 - c_1 - c_2)x_1x_2 + (c_5 - c_1 - c_4)x_1x_3 + (c_6 - c_2 - c_4)x_2x_3 + (c_7 - c_3 - c_5 - c_6 + c_1 + c_2 + c_4)x_1x_2x_3$ 로 쓸 수 있다. 이 표현을 확장하여 일반적인 N 의 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_B(\mathbf{x}) = \sum_{m_1=1}^N h_1(m_1)x_{m_1} + \sum_{m_2=1}^N \sum_{m_1=1}^{m_2-1} h_2(m_1, m_2)x_{m_1}x_{m_2} + \dots + \sum_{m_1=1}^N \dots \sum_{m_N=1}^{m_1-1} h_N(m_1, \dots, m_N)x_{m_1} \dots x_{m_N} \quad (5)$$

$$= \mathbf{H}^T \mathbf{z}$$

여기서 $\mathbf{H} = [h_1(1), \dots, h_1(N) | h_2(1,2), \dots, h_2(N-1,N) | \dots | h_N(1, \dots, N)]^T$, $\mathbf{z} = [x_1, \dots, x_N | x_1x_2, \dots, x_{N-1}x_N | \dots | x_1 \dots x_N]^T$ 이며 $h_i(\cdot)$ 는 i 차 여파기의 계수이다. 식 (5)는 이진 변수 $\{x_1, \dots, x_N\}$ 의 볼테라 다항식(Volterra polynomial)^[8]과 동일하다는 사실에 주목할 필요가 있다. 식 (1)에 식 (5)를 대입하여 다음과 같은 ETBF의 다진 영역 표현을 구할 수 있다.

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^N F_{mn}^k(\mathbf{X}) = \mathbf{H}^T \mathbf{Z} \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{Z} = [X_1, \dots, X_N | \min(X_1, X_2), \dots, \min(X_{N-1}, X_N) | \dots | \min(X_1, \dots, X_N)]^T$ 이며 $F_{mn}^k(\mathbf{X})$ 는 식 (3)의 $\text{med}(\cdot)$ 를 $\min(\cdot)$ 로 대치한 것이다. 이 다진 영역 표현에서 ETBF는 최솟값 부여파기를 갖는 다단(multi-stage) 여파기로 주어지며 최종 출력은 이들 부여파기 출력의 가중 평균으로 주어진다.

식 (2)와 식 (6)의 다진 영역 표현은 유연한 구조를 갖는데 이는 실제 구현에 매우 유용하다. 부여파기의 개수를 제한함으로써 성능을 다소 희생시키면서 계산량을 줄이는 것이 가능하다. 부여파기를 크기가 K , $1 \leq K \leq N$, 보다 작거나 같은 최솟값(중앙값) 부여파기로 제한한 ETBF를 최솟값(중앙값) K 차 ETBF(K-ETBF)라 한다. [3]과 [7]에서 제안된 다진 영역 표현은 이러한 유연성을 갖지 않는다. 즉, 성능과 계산량 사이의 호환작용(tradeoff)을 조절할 방법이 없다. 크기가 m 인 부여파기의 개수는 $\binom{N}{m}$ 이므로, 최솟값 K 차 ETBF의 전체 부여파기 개수 M_K 는 $\sum_{m=1}^K \binom{N}{m}$ 이며 중앙값 K 차 ETBF의 경우 $M_K = \sum_{m=1}^{(K+1)/2} \binom{N}{m}$ 이다.

ETBF는 최솟값 대신 최댓값 부여파기를 사용하여 나타낼 수도 있다. 최댓값 부여파기를 사용한 ETBF 표현을 다음의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

$$\min(X_1, \dots, X_N) = \sum_{m_1=1}^K X_{m_1} - \sum_{m_2=1}^K \sum_{m_1=1}^{m_2-1} \max(X_{m_1}, X_{m_2}) + \dots + (-1)^{K-1} \sum_{m_1=1}^K \dots \sum_{m_{K-1}=1}^{m_1-1} \max(X_{m_1}, \dots, X_{m_{K-1}}) \quad (7)$$

여기서 우리는 크기가 K 인 최솟값 부여파기를 크기가 K 보다 작거나 같은 최댓값 부여파기의 선형 조합으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 이는 최솟값 K 차 ETBF는 최댓값을 이용한 K 차 ETBF 표현으로 바꿀 수 있음을 의미한다. 따라서 앞으로의 전개에서는 최댓값을 사용하지 않고 최솟값과 중앙값 부여파기를 이용한 표현만을 이용한다.

V장에서 이들 표현을 이용하여 계산량과 여파기 성능간의 호환작용에 대하여 고찰하였다.

IV. K-ETBF의 설계

$d(n)$ 을 원신호(original signal)라 하고 $X(n)$ 을 잡음에 오염된 관측 신호(observed signal)라 하자. 이들 신호로부터 다음과 같이 MSE를 최소화하는 K-ETBF를 설계하고자 한다.

$$MSE(\mathbf{H}_K) = E\{[d(n) - \mathbf{H}_K^T \mathbf{Z}_K(n)]^2\} \quad (8)$$

여기서 \mathbf{H}_K 는 계수 벡터이고 \mathbf{Z}_K 는 K-ETBF의 입력 벡터이다. 최적 계수 벡터 \mathbf{H}_K^* 는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{H}_K^* = \mathbf{R}_K^{-1} \mathbf{P}_K \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{R}_K = E\{\mathbf{Z}_K(n) \mathbf{Z}_K^T(n)\}$ 이며 $\mathbf{P}_K = E\{d(n) \mathbf{Z}_K(n)\}$ 이다. \mathbf{P}_K 는 M_K 차 벡터이고 \mathbf{R}_K 는 $M_K \times M_K$ 행렬이다. ETBF의 차수를 최대로 했을 때 auto-correlation 행렬 \mathbf{R}_K 는 $(2^N - 1) \times (2^N - 1)$ 의 크기를 갖는다. 실제의 경우 \mathbf{P}_K 와 \mathbf{R}_K 를 구하기 위해 필요한 통계량을 알 수 없으며, 또한 윈도우의 크기 N 이 증가함에 따라 \mathbf{P}_K 와 \mathbf{R}_K 의 크기가 매우 빠른 속도로 커지므로 이러한 어려움을 해결하기 위해 우리는 다음과 같은 적응(adaptive) 알고리즘을 고려하였다. 식 (8)에서 주어진 MSE는 \mathbf{H}_K 의 2차 함수이므로 다음과 같이 least mean square(LMS) 알고리즘을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \mathbf{H}_K^T(n) \mathbf{Z}(n) \\ \mathbf{H}_K(n+1) &= \mathbf{H}(n) + \mu e(n) \mathbf{Z}(n) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $e(n)$ 은 시간 n 에서의 오차 신호이고 μ 는 스텝의 크기(step size)이다. 스텝의 크기가 충분히 작다면 n 이 무한대로 접근할 수록 계수 벡터 $\mathbf{H}(n)$ 이 최적 계수 벡터 \mathbf{H}^* 에 접근한다는 것은 매우 잘 알려진 사실이다.

V. 응용 예

이 장에서는 최적 K-ETBF를 설계하여 잡음에 오염된 신호를 복구하는 예를 보였다. 관측 신호는 원신호에 잡음이 더해진 신호 즉, $X(n) = d(n) + \eta(n)$ 이다. 여기서 $\eta(n)$ 은 오염된 가우스 잡음(contaminated Gaussian noise)으로 $\mathcal{N}(\epsilon, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ 의 확률 분포를 갖는다. 즉, $\eta(n)$ 은 $(1-\epsilon)$ 의 확률로 분산(variance) σ_1^2 의 정규 분포를 갖고 ϵ 의 확률로 σ_2^2 의 분산을 갖는 정규 분포를 갖는다($\sigma_2^2 \gg \sigma_1^2$).

표 2. K-ETBF와 셀프 듀얼 ETBF의 MSE 값
Table 2. The MSE values of K-ETBFs and self-dual ETBFs.

K	M _K	K-ETBF			셀프 듀얼 ETBF			
		$\epsilon=0$	$\epsilon=0.001$	$\epsilon=0.01$	M _K	$\epsilon=0$	$\epsilon=0.001$	$\epsilon=0.01$
1	7	0.07259	0.07304	0.08723	7	0.07259	0.07304	0.08723
2	28	0.07234	0.07209	0.08506	-	-	-	-
3	63	0.03033	0.02786	0.01975	42	0.03057	0.02809	0.01997
4	98	0.03007	0.02756	0.01942	-	-	-	-
5	119	0.02964	0.02720	0.01904	63	0.03013	0.02773	0.01955
6	126	0.02961	0.02718	0.01902	-	-	-	-
7	127	0.02961	0.02714	0.01902	64	0.0301	0.02773	0.01954

모의실험은 사각 파(square wave)에 대하여 실시하였다. 원신호로 사용된 사각 파는 주기가 20이며 +1과 -1 사이를 반복한다. 윈도우의 크기 N은 7 ($L_1=L_2=3$), 전체 잡음의 분산 $\sigma_0^2 = (1-\epsilon)\sigma_1^2 + \epsilon\sigma_2^2$ 는 0.1, σ_1^2 과 σ_2^2 의 비(比) σ_2^2/σ_1^2 는 100으로 하였다. 전체 잡음의 모양을 결정하는 ϵ 은 0, 0.1, 0.01을 사용하였다. 최솟값에 근거한 K-ETBF, $K=1, 2, \dots, 7$,와 중앙값에 근거한 K-ETBF, $K=1, 3, 5, 7$,를 식 (9)에 따라 설계하고 이들을 잡음에 오염된 신호에 적용하여 그 때의 MSE 값을 구하였다. 표 2에 이들 MSE 값을 보였다. 이 결과에서 우리는 여파기 성능이 $K=3$ 정도

에서 포화됨을 볼 수 있다. 이는 $K=3$ 정도까지는 여파기 성능(MSE)의 저하가 거의 없이도 복잡도(M_K)를 상당히 줄일 수 있음을 의미한다. 또한 $K=5$ 인 중앙값 K-ETBF와 $K=3$ 인 최솟값 K-ETBF가 동일한 M_K 를 갖지만 $K=5$ 인 중앙값 K-ETBF가 더 좋은 성능을 보인다는 사실을 볼 수 있다. 따라서 중앙값 K-ETBF를 사용함으로써 복잡도를 더욱 줄일 수 있다.

VI. 결론

이 논문에서 우리는 ETBF의 새로운 표현을 유도하였다. 이 표현은 부여파기 출력의 가중 합(weighted sum)으로 주어지며, 여파기의 차수(order)를 조정함으로써 복잡도를 조절할 수 있는 K-ETBF 군을 자연스럽게 형성한다. 모의실험을 통하여 K-ETBF의 계산 복잡도의 여파기 성능간의 호환작용을 고찰하고 이를 통해 여파기 성능의 열화가 거의 없이도 복잡도를 상당히 줄일 수 있음을 보였다.

참고 문헌

- [1] D. H. Kang, J. Song, and Y. H. Lee, "Analysis and optimization of subset averaged median filters," *submitted to IEEE Trans. Signal Processing*.
- [2] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Threshold Boolean filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-42, pp. 2022-2036, Aug. 1994.
- [3] K.D. Lee and Y.H. Lee, "Minimum mean square error filtering over the class of extended threshold Boolean filters," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp. III-97-III-100, Adelaide, South Australia, 1994.
- [4] J. P. Fitch, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Median filtering by threshold decomposition," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 1183-1188, Dec. 1984.
- [5] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proces-*

ing. vol. ASSP-34, pp. 898-911, Aug. 1986.

[6] A. C. Bovik, T. S. Huang, and D. C. Munson Jr., "A generalization of median filtering using linear combinations of order statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1342-1350, Dec. 1983.

[7] J. Song and Y. H. Lee, "Linear combi-

nation of weighted order statistic filters: An extension of stack filters," *Proc. The 26th Annual Conf. Information Science and Systems*, Princeton, NJ, Mar. 1992, also submitted to *IEEE Trans. Circuits Syst.*

[8] V. J. Mathews, "Adaptive polynomial filters," *Signal Processing Mag.*, pp. 10-26, July 1991.

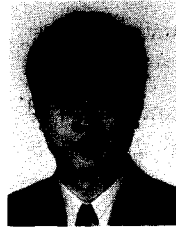
— 저 자 소 개 —



宋鍾官(正會員)

1966년 2월 18일생. 1989년 2월 부산대학교 전자공학과 졸업. 1991년 2월 KAIST 전기 및 전자공학과 석사 학위 취득. 1995년 8월 KAIST 전기 및 전자공학과 박사 학위 취득.

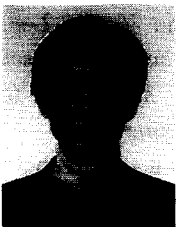
1995년 ~ 현재 한국이동통신 중앙연구원 선임연구원. 주관심분야는 통신 및 신호처리임.



鄭炳章(正會員)

1965년 12월 5일생. 1988년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1990년 2월 경북대학교 대학원 졸업(공학석사). 1992년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사). 1992년 3월

~ 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정 재학중. 주관심 분야는 신호처리 및 통신임.



李勇勳(正會員)

1955년 7월 12일생. 1978년 2월 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1980년 2월 서울대학교 대학원 졸업(공학석사). 1984년 8월 Pennsylvania 대학 박사학위 취득. 1984년 ~

1989년 버팔로 소재 뉴욕 주립대학 조교수로 근무. 1989년 이후 한국과학기술원 교수로 재직. 주관심분야는 일차원 및 이차원 신호처리임.