論文 11-4-7

疲勞强度 데이타의 精密度 向上에 관한 硏究

A Study on the Accuracy Improvement of Fatigue Strength Data

최 창 섭*
Chang-Sup Choi
(1996년 8월 30일 접수, 1996년 12월 14일 채택)

ABSTRACT

Since the fatigue phenomenon is characterized as a probability feature and test data cannot be easily collected number its small sample data are uncertain. Therefore, statistical evaluation methods should necessarily be introduced into data evaluation. With such a basic concept in mind, this study attempted to apply conventional statistical processing methods to the fatigue data and thereby present a new evaluation method in consideration of the fact that the fatigue test is usually performed within a limited number. That is a package evaluation method was adopted which co-realtes parameters between different levels of capacity in E-N or S-N level.

So far, fatigue limits have been found by means of stiarcase method. But it was also disclosed that this new method has its own disadvantage because limited frequencies are not duely considered.

1. 서 론

피로강도에 영향을 끼치는 인자는 여러가지가 있으나 그 중에서도 특히 정확하게 규정지우기가 힘드는 구조상의 문제나 재료 조직상의 문제, 또는 같은 재료지만 제조방법과 제조시기의 차이 등에 의한 영향을 받기 때문에 피로현상은 그 자체가 확률적인 성질을 가지고 있다. 또 피로 데이타를 얻는데에도 많은 시간과 경비가 소요되기 때문에 소수표본 데이타에 따른 불확실성 등의 이유로 인해 피로 데이타 평가방법은 통계적 평가가 반드시 필요하다. 또 지금까지의 기준에서는 일률적인 안전율을 적용한 허용응력이 적용되고 있지만 앞으로는 기기나 부재 등의 중요도나 보수성 등에 따라 최적의 안전률을 적용시켜 사용하는 합리적인 설계개념이 요구되고 있으며 피로 데이타의 통계적인 평가법의 중요성도 고조되고 있다[1~4].

피로데이타를 통계적으로 평가하는데 특히 문제

* 홍익대학교 기계설계학과

가 되는 것은 데이타 수가 부족하다는 것이겠지만 통계학상으로 살펴볼때 소수데이타의 평가는 어려운 문제의 하나이며 본 연구에서는 소수데이타를 유효하고 합리적으로 평가하는 방법에 대해 검토하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 疲勞데이타 評價法에 있어서 最尤 推定法의 應用

2.1.1 점추정법

피로데이타는 본질적으로 산포가 존재하기 마련이며 데이타를 평가하여 이용하는데에도 데이타의 중앙치(median)나 분산(variance) 등 확률분포(probability distribution)의 모수(parameter)를 추정할 필요가 있다[6~9].

지금까지 피로데이타의 평가법으로서는 최소자승법(method of least squares)을 이용하여 중앙치만을 추정하거나 그렇지 않으면 하나의 응력-변형률 수준에 대해서 많은 실험을하여 그 응력수준에 대한 통계처리를하여 모수를 추정하는 방법 등이 이용되어 왔다. 이러한 방법은 데이터수를 많이 필요로 하므로 시간적인 문제와 비용 문제 등의 장애요인을 안고 있다. 따라서 본 연구에서는 피로데이터를 가능한 한 유효하게 이용하고 합리적으로 평가하여 피로 데이터의 정리법에 대해서 검토해보기로 한다. 작용한 응력과 반복횟수 관계에서 피로한도 또는 내구한도에 대한 능력을 피로강도(fatigue-strength)라고 한다. 또 어떤 회전수에 견디는 반복응력으로서, 이것을 각 반복횟수에 대한 시간강도[9](fatigue strength at N cycles)라고 한다.

S-N 선도의 시간강도(fatigue strenght at N cycles) 부분에 대해서는 어떠한 가정하에 다른 응력레벨에 대한 데이터를 적용함으로써 전체 데이터를 일괄해서 취급하는 방법을 채택하고 있으며, 피로한도(fatigue limit)에 대해서도 무한횟수의 반복하중에 견딜 수 있는 재료강도의 개념을 채용하고 있으므로 최우추정법[10,11](最尤鄒定法; maximum likelihood estimate)이라는 통계적 수법을 이용하여 시간강도(fastigue strength)의 추정법과 피로강도의 추정법[11]에 대해 검토한 결과 시간강도(fatigue strength)와 피로강도에 관한 점추정법을 개발할 수가 있었다.

2.1.2 時間强度의 推定

일반적으로 S-N 선도상에서 표시되는 시간강도(時間强度 : fatigue strength at N cycles) 부분의 데이터는 어떤 일정응력 수준에서 보면 파단 반복수(N)을 확률변수(random variable)로 한 확률분포를 나타내고 있다. 따라서 다음과 같은 2가지 가정을 할 수 있다.

가정 1, 어떤 일정 응력레벨에서 보면 피로파괴현상은 파단 반복수를 확률변수로 정한 대수정규분포(log-normal distribution)에 따른다.

가정 2, 응력레벨의 변화에 대한 확률분포의 평균(mean)과 표준편차(standard deviation)의 변화는 응력의 대수치에 대해서는 직선적이다.

이러한 가정이 본 해석법을 적용하는데 절대적으로 필요한 조건은 아니지만 원칙적으로 필요한 조건은 응력레벨이 변한다해도 같은 종류의 분포형에 따르고 분포형에 포함되고 있는 인자는 응력레벨의 함수로써 나타나 있다는 뜻이다.

이와같은 가정을 함으로써 다른 응력수준의 데이터 등을 관련지을 수가 있으므로 데이터 전체를 일반적으로 취급할 수 있고 모집단(population)의 모수를 통계적으로 추정할 수 있다.

본 해석법에서 이용한 추정법은 최우추정법으로서 이 추정법에 의한 최우추정량은 극히 일반적인 조건하에서는 일치추정량이 되고 표본수가 많아지면 유효추정량에 점차적으로 접근되는 성질을 가지고 있다.

표본(sample)을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 모수를 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$, 모집단 확률밀도함수(probability density function)를 $f(x : \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$이라고 하면 표본 $x_1, x_2, \cdots x_k$에 대한 결합밀도함수(joint density function)는 $f(x1, x2, \cdots, xn : \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{mj})$으로 표시할 수 있다. 이 함수를 을의 함수로 바꾸어 생각하면 결합밀도함수는 우도함수(尤度函數; likelihood function)라고 한다.

표본(x_i)에 대응하는 확률변수(X_i)가 서로 독립하고 있을 때 우도함수는 다음식으로 정의할 수 있다.

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

표본치 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 주어졌을 때 우도함수(L)을 최대로 하는 θ의 추정치 $\hat{\theta}$를 최우추정치라고 한다. 본 해석에서 미지 모수는 평균과 표준편차로서 이러한 모수의 추정치는 최우추정량으로

구해진다. 여기서 확률분포의 평균을 탔, 표준편차를 s라고 하고, 파단반복수의 대수치를 x, 응력의 대수치를 y로 나타낸다. 또 첨자 I에 의해 어떤 특정 응력수준에서의 각각의 값을 표시된다.

$$\mu = a_1 + a_2 y \quad \cdots\cdots (2)$$

$$s = a_3 + a_4 y \quad \cdots\cdots (3)$$

여기서 a_1, …, a_4는 미지상수이다. 확률분포가 대수정규 분포라는 식(1)에 의해 우도함수는 다음 식으로 표시된다.

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s_i} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2 s_i^2} \right] \right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

식(4)에 식(2)(3)을 대입하여 a_1, … a_4를 포함하는 형태를 바꾸면,

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(a_3 + a_4 y_i)} \exp \left[-\frac{[x_i - (a_1 + a_2 y_i)]^2}{2(a_3 + a_4 y_i)^2} \right] \right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

가 된다. 우도함수(L)을 최대로 하는 평균(μ)와 표준편차(s)를 구한다. 계산을 간단하게 하기 위해 우도함수의 대수치로서 정의되는 대수우도함수(log L)을 구하면,

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\log[2\pi (a_3 + a_4 y_i)] - \frac{[x_i - (a_1 + a_2 y_i)]^2}{2(a_3 + a_4 y_i)^2} \right\} \quad \cdots\cdots (6)$$

또, 대수우도함수를 최대로 하는 평균과 표준편차를 구한다. 이와 같이하여 구한 평균과 표준편차가 우도함수를 최대로 하는 것은 분명하여 이 조건($\partial(\log L)/\partial a_i$)에서 미정상수 a_1, …, a_4는 4원 연립방정식이 성립된다.

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[(x_1 - a_2 y_i) \left\{ \frac{a_3 + a_4 y_o}{a_3 + a_4 y_i} \right\}^2 \right]}{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{a_3 + a_4 y_o}{a_3 + a_4 y_i} \right\}^2}$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[y_i (x_i - a_1) \left[\frac{a_3 + a_4 y_o}{a_3 + a_4 y_i} \right]^2 \right]}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \left[\frac{a_3 + a_4 y_o}{a_3 + a_4 y_i} \right]^2}$$

$$a_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i [x_i - (a_1 + a_2 y_i)]^2}{[1 + (1/c) y_i]^3} \right]}{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i}{[1 + (1/c) y_i]} \right\}}$$

$$a_4^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{[x_i - (a_1 + a_2 y_i)]^2}{(c + y_1)^3} \right\}}{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{c + y_1} \right\}} \quad \cdots\cdots (7)$$

여기서 $c = a_3/a_4$이며 y_o은 계산의 편의를 위하여 도입한 상수이다. 평균과 표준편차의 최우추정치는 식(7)에 의해 구하는 a_1, a_2, a_3, a_4를 식(2)와 식(3)에 대입하므로써 구할 수 있다.

2.1.3 疲勞限度의 推定法

피로한도란 「일정응력에 대해 무한횟수의 반복에 견딜수 있는 재료강도의 뜻이라고 정의할 수가 있으며, 나아가서는 어떤 모집단의 피로한도는 어떤 확률분포를 하고 있다고 가정할 수 있다. 이와 같은 견지에서 본다면 현재 피로한도를 추정하는 방법으로서 이용되고 있는 Probit법[12] Staircase법[13]은 엄밀한 의미에서는 적용할 수가 없다. 실험은 유한횟수의 반복으로 끝나야 하며 이러한 실험 데이타로부터 위에서 정의한 피로한도를 구하는 것은 유한횟수로 끝낸 사항을 고려하여 추정해야만 한다. 따라서 파단 반복수를 확률변수로하여 시간강도의 확률분포가 이미 구해져 있어야 한다.

어떤 시험편을 일정 응력레벨에서 실험할 때 시험편은 무한횟수의 반복후에 파괴가 일어나던가(A상황이라고 함) 파괴가 일어나지 않던가(B상황이라고 함) 둘중에 하나이다. 즉 시험편의 피로한도가 시험응력 이하인 경우(A상황)와 시험응력이상(B상황)인 경우로 나눌 수 있다. 이 시험편이 포함하는 모집단의 피로한도의 확률밀도 함수를, 응력(s)를 확률변수로하여 q(s)로 표시하면 A상황과 B상황이 발생할 확률(Q_A, Q_B)는 각각 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$Q_A = \int_0^s q(s)\, ds \quad \cdots\cdots (8)$$

$$Q_B = \int_s^{\infty} q(s)\, ds = 1 - Q_A \quad \cdots\cdots (9)$$

피로시험은 유한 반복수(N_S)에서 정지되지만 그 시점에서 파괴가 일어나지 않는 경우를 D 상황이라고 하고 그 안에서 파괴해 버린 경우를 C상황이라고 한다. 개개의 시험편은 N_S회 반복수를 기준으로 본다면 반드시 두가지 상황중에 하나가 되어야 한다. 모집단의 시간강도는 기지라고 보고

파단반복수(N)를 확률변수로하여 확률밀도 함수를 $P_S(N)$으로 표시하면, N_S회 반복때까지 파괴할 확률 즉 C상황이 발생하는 확률 Q_C는,

$$Q_C=\int_0^{N_S} p_s(N)dN\times\int_0^{s} q(s)dN$$

$$=\int_0^{N_s} p_s(N)dN\times Q_A \quad \cdots\cdots (10)$$

가 되고 D상황이 발생할 확률(Q_D)는 다음식과 같이 된다.

$$Q_P=1-Q_C \quad \cdots\cdots (11)$$

따라서 D상황이 발생할 확률이 Q_D인 응력레벨에서 파괴하지 않는 것에 대해서는 반드시 그 응력레벨에서 결정된 N_S회까지 반복한 다음 정지하는 시험(이 조건은 본 해석법에 대해서 반드시 필요한 조건은 아니지만 이 조건을 제외하면 다음에 나오는 식이 복잡해지므로 여기서는 이 조건을 따르기도 한다)을 n회 수행했을 때 D상황이 m회 생길 확률은 다음식으로 표시할 수 있다.

$$f(D)=\left[\frac{n}{m}\right](1-Q_C)^m Q_C^{n-m} \quad \cdots\cdots (12)$$

시험은 몇가지의 다른 응력레벨에서 수행되므로 응력레벨의 숫자를 첨자 i로 표시하기로 한다. 각각의 응력레벨에서 수행된 시험을 일괄하여 우도함수(L)을 구하면,

$$L=\prod_{i=1}^{I}\left\{\left[\frac{n_i}{m_i}\right](1-Q_{Ci})^{mi}Q_{Ci}^{\,ni-mi}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

이 함수(L)가 최대가 되는 확률밀도함수 q(s)의 미지모수 θ_j를 결정한다. 즉, 계산을 편리하게 하기 위해 대수우도함수를 최대로 하는 조건을 구하면 θ_j에 관하여 j원의 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\log L)=\sum_{i=1}^{I}\left\{[-m_iQ_{Ci}+(n_i-m_i)\right.$$

$$\left.(1-Q_{Ci})]\frac{\partial}{\partial\theta_j}Q_{Ci}/(1-Q_{Ci})Q_{Ci}\right\}=0 \quad \cdots (14)$$

피로한도의 확률밀도함수 q(s)를 평균이 S_M, 표준편차 $\bar{S}$인 정규분포라고 본다면 식(14)는 다음과 같은 식으로 변경할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{I}\left[\left\{m_ik_i\int_0^{s_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{(S-S_M)^2}{2\bar{S}^2}\right]ds\right.\right.$$

$$+(n_i-m_i)\left[1-k_i\int_0^{s_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{(S-S_M)^2}{2\bar{S}^2}\right]ds\right]\Bigg\}$$

$$\times k_i\int_0^{s_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\frac{(S-S_M)^2}{\bar{S}^2}\exp\left[-\frac{(S-S_M)^2}{2\bar{S}^2}\right]ds$$

$$\Big/\left\{\left[1-k_i\int_0^{s_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{(S-S_M)^2}{2\bar{S}^2}\right]ds\right]\right.$$

$$\left.\times k_i\int_0^{s_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\exp\left[-\frac{(S-S_M)^2}{2\bar{S}^2}\right]ds\right\}\Bigg]=0$$

여기서, $k_i=o\int_o^{N_{si}} p_{si}(N)dN$이다.

3. 計算結果 및 考察

3.1 時間 强度에 대한 計算 例

식(7)을 이용하여 시간강도를 추정한 예를 Fig. 1, Fig. 2 및 Table 1에 표시했다.

Fig. 1은 15kg/mm², 30kg/mm²의 응력에 대해 각각 9개씩의 정규분포에 따른 인위적인 데이터를 만들어 본 추정법에 적용시켜서 파괴확률선(실선과 일점쇄선)을 그린 것이다.

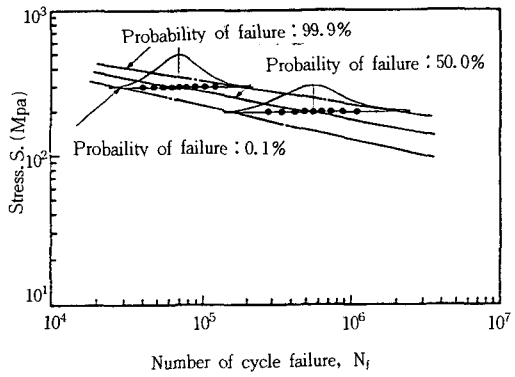

Fig. 1 S-N diagram (using hypoythetic data)

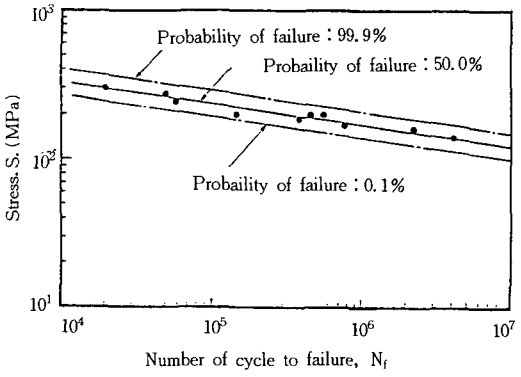

Fig. 2 S-N diagram (completely reversed plate bending fatigue test)

Table 1 Calculated results for the estimation of life probability distribution within the finite life range of the S-N curve (using hipothetic data)

Item \ Stress	300 Mpa		200 Mpa	
Classification	mean value	standard deviation	mean value	standard deviation
(A) mean value and standard deviation of sample[5]	4.845	0.1324	5.754	0.1923
(B) present estimation	4.845	0.1402	5.754	0.2000
error(%)	0.000	5.89	0.00	4.00

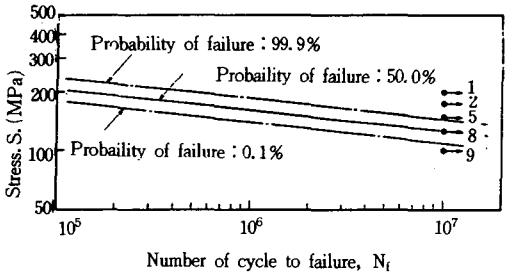

Fig. 3 Hypothetic data for the estimation of fatigue

Table 2 Hypothetic data for the estimation of fatigue limit

Item / Stress(Mpa)	Number of failure specimen in 10^7 cycle	Number of unfailing specimen in 10^7 cycle
200	9	1
175	8	2
150	5	5
125	2	8
100	1	9

Table 1에는 같은 응력에 대하여 본 추정법에 의하여 계산된 평균치와 통계학적인 방법으로 계산된 표본평균, 표본표준편차를 비교하여 표시한 것이다. Fig. 2는 실제로 수행한 피로시험 및 연구보고서의 데이터에 의해 얻어진 데이터를 본 추정법에 의해 정리한 결과이다.

3.2 疲勞限度에 대한 計算 例

우선 Fig. 3과 같이 시간강도를 가지는 경우를 가정하고 하나의 응력범위에서 10개씩 합계 5단계의 응력범위에서 설정한 결고, N_s회 반복전에 파괴한 것과 파괴하지 않는 것의 수가 Table 2에 나타내는 비율로 된 가정하에서 본추정법을 적용하였다.

본 추정법을 시간강도의 확률분포를 고려하지 않고 이용한 경우 어떠한 추정치를 나타내는가를 표시한 것이 Fig. 4에 표시했다. 그림에서 실선은 본 추정법에 의해 시간강도의 영향을 고려하지 않고 본 추정법을 적공시킨 경우의 추정치를 나타내고 ●표시는 Table 2는 데이터에서 직접 $\int_0^s q(s)ds$에 상당하는 확률을 읽어서 택한 값을 나타내고 있다.

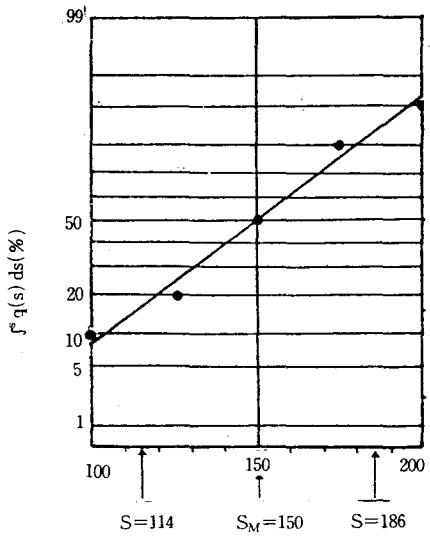

Fig. 4 Calcutaed results using the estimated method for fatigue limit, without taking account the probability distribution of fatigue strength within the finite life range of the S-N curve

또한 Fig. 5에는 본 추정법을 이용하여 시간강도의 확률분포를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 대해서 계산한 결과를 각각 실선의 정규분포와 점선의 정규분포로 비교하여 표시했다. 점선은 시간강도의 확률분포를 고려하지 않고 본 추정법을 적용한 경우의 피로한도에 대한 추정 결과이다. 평균치 S_M은 150Mpa이고 표준편차는 S는 35.87Mpa이다. 실선은 시간강도의 확률분포를 고려하여 본 추정법을 적용한 경우에 대한 피로한도의 추정결과이다. 평균치 S_M은 135Mpa이고 표준편차 S는 54Mpa이다.

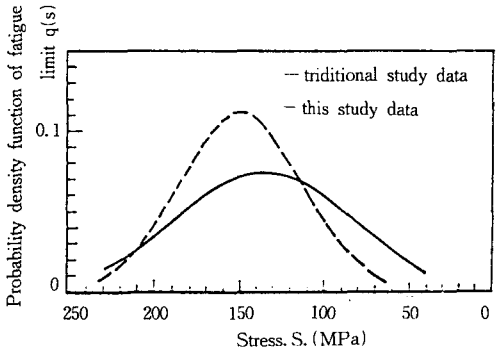

Fig. 5 Estimated result for fatigue limit (using hypothetic data)

3.3 計算結果 및 考察

시간강도를 추정하는 본 추정법 자체는 타당한 계산결과를 얻고 있다. 파단 반복수를 확률변수로 생각했을 때 시간강도의 확률밀도함수가 예를 들어 응력레벨이 달라진 경우에도 같은 종류의 함수형태를 유지한다고 볼 수 있는 응력범위에 있어서는 본 추정법은 데이터를 유효하게 이용할 수 있다.

피로한도 추정에 대한 본 추정법은 Fig. 4에서 알 수 있듯이 시간강도를 고려하지 않고 이용하는 경우에는 지금까지 사용되어 온 여러 방법들과 근사한 해를 얻을 수 있다.

본 계산에서 이용한 데이터는 인위적으로 만들어진 것이므로 이러한 계산결과로부터 정량적인 검토는 어렵지만 Fig. 5는 다음과 같은 사항을 시사하고 있다. 유한횟수의 반복에 견디므로 인해 피로한도를 정의하는 것이 아니라 무한횟수의 반복에 견디는 것에 의한 피로한도를 정의하는 입장을 고수하는 한 지금까지의 방법(Staircase법 등)에 의해 피로한도를 추정하는 경우 해당응력하에서의 비파괴 확률이 아주 높다고 예상되는 반복수까지 실행한후 시험을 중지하지 않으면 그러한 추정법을 이용하는 것은 범용성 및 재료강도 평가[7]에서 차이가 있음을 검토하였다.

종래의 피로데이타 평가에 있어서 통계적 수법은 최소자승법에 의한 점추정을 수행 한 다음 그결과에 구간 추정을 연관시키는 방법을 채택하고 있지만 피로데이타는 소수표본에 의한 경우가 대부분이고 또 실험에 의하여 얻어진 데이터를 효율성 높게 이용한다는 측면에서 보더라도 데이터에 대한 통계적 처리에 관한 개선이 필요하다고 본다.

피로데이타의 평가법으로서 피로데이타를 통계적으로 평가하는데 문제가 되는 것은 데이터의 수가 부족하다는 것이지만 본 연구에서는 유효하고 평가하는 방법에 대해 검토한다. 평가법에 있어서 최우추정법을 개발하고 여기에 피로데이타를 적용시키는 평가를 기술한다.

4. 결 론

피로현상 자체가 확률적인 특성을 나타내고 있으며 데이터를 대량으로 얻는다는 것이 힘들기 때문에 소수표본 데이터로부터 결론을 유추하므로 인한 불확실성을 가지고 있다. 따라서 피로 데이터평가에는 통계적인 평가법이 반드시 필요하다는 사실에 주목하여 기존의 통계적 처리방법을 피로데이터에도 적용하는 시도를 하고 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 종래의 최소자승법은 평균치의 점추정법을 하는 방법이지만 여기에 비하여 최우추정법은 통계학적으로 보다 합리적인 방법이고 평균치의 점추정 및 분산의 점추정이 동시에 간단하게 수행되는 이점을 가지고 있다.
2) ε-N 선도나 S-N선도에서 다른 응력수준간의 모수에 상관을 가지게 함으로써 일괄적으로 평가하는 방법을 채용하였다.
3) 피로한도의 평가법에 대하여 유한횟수에서 피로시험을 중지하는 것을 고려하여 새로운 평가법을 제시하였다. 지금까지는 Staircase 등에 의하여 피로한도를 구하였지만 이 방법은 유한횟수에 대한 고려가 없어 통계적으로 결점이 있음이 판명되었다.

이 논문은 1996년도 홍익대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

1) 西島敏, 增田千利, "S45C 材の確率疲勞特性", 材料, Vol. 22, No. 243, pp. 49~55. 1973.
2) 西島敏, "2種の鋼における 確率疲勞特性の

チャージ 間比較, 材料, Vol. 25, No. 268, pp. 53～60. 1976.
3) 西島敏, 阿部孝行, "SCM 3, SNCM 8, SUS 403 調質鋼の確率疲勞特性", Vol. 280, pp. 50～55. 1977.
4) 西島敏, 竹內悅男, "溶接構造用 SM 50 A 鋼の確率疲勞特性", 材料, Vol. 27, No. 300, pp. 70～75, 1978.
5) 統計學原論, 金成柱 4人, 1990.
6) 西島敏, "疲勞試驗 データの統計的整理", 材料, Vol. 29, No. 316, pp. 24～29. 1980.
7) 西島敏, "少標本疲勞 ヂータの統計解析, 日本機械學會集(A編), Vol. 46, No. 412, pp. 1303～1313, 1980.
8) 西島敏, 石井明, "JIS 調質炭素鋼, Cr-Mo鋼の確率披露特性", 材料, Vol. 33, No. 364, pp. 2～7. 1984.
9) 西島敏, 石井明, "S-N 試驗 ヂータの折れ線近似による パラヌータ表示 および解析", 材料, Vol. 34, No. 378, pp. 86～92, 1985.
10) 金屬材料 疲勞强度の設計資料 I, 日本機械學會
11) 藤井進, 中川隆夫, 橋本和彦, "疲勞壽命推定への ベイズ論の應用", 日本造船學會文集(A編), Vol. 45, No. 393, pp. 516～522, 1979.
12) D. J. Finney, Probit Analysis, Cambridge Univ. Press, 1947.
13) W. J. Dixon, F. J. Massey, Introduction to statistical Analysis, Mc-Graw-Hill, pp. 278～286, 1951.