論文 11-2-16

Kalman Filtering 理論에 의한 河川 流出 安全管理에 관한 硏究

A Study on the Safety Management of Streamflows by the Kalman Filtering Theory

박 종 권*·박 종 구*·이 영 섭**
Jong-Kwon Park · Jong-Koo Park · Young-Seop Yi

ABSTRACT

The purpose of this study has been studied and investigated to prediction algorithms of the Kalman Filtering theory which are based on the state-vector description, including system identification, model structure determination, parameter estimation. And the prediction algorithms applied of rainfall-runoff process, has been worked out.

The analysis of runoff process and runoff prediction algorithms of the river-basin established, for the verification of prediction algorithms by the Kalman Filtering theory, the observed historical data of the hourly rainfall and streamflows were used for the algorithms. In consisted of the above, Kalman Filtering rainfall-runoff model applied and analysised to Wi-Stream basin in Nak-dong River(Basin area : 472.53km^2).

1. 서 론

자연현상으로 인간생활에 필수적인 물이 공급되는 水文 循環 과정은 그 상태가 시간적, 공간적으로 대단히 복잡한 구조를 가지고 있으므로 물에 관한 문제를 다루는 水文學者들은 수학적인 모델을 형성하여 이 복잡한 水文系에 대한 定量的인 해석을 하고저 많은 시도를 하고 있다[1].

水文系에서의 수학적 모델은 물리적 모델과 실험적 모델로 크게 나눌 수 있으며, 물리적 모델은 시스템의 과정을 이루는 현상이나 상태 등을 물리학의 기본방정식을 이용해 물리적인 과정을 구체적으로 표현하는 방법이며, 실험적 모델은 시스템 내에서 관측된 水文資料를 이용해 入力과 出力간의 관계만을 나타낼 수 있는 모델 변수들을 추정하는 방법을 말한다[2].

水文 循環 과정은 자연계의 현상을 다루는 것이므로 그 과정이 복잡하고 해석해야 할 물리적인 과

* 안동 전문대학 산업안전과
** 서울산업대학교 안전공학과

정의 구조가 매우 다양해 水文系를 모델화 한다는 것은 거의 불가능하다. 그러므로 水文系에 적용되는 수학적 모델은 실험적 모델인 시스템 等定, 媒介 變數 推定을 위한 것이 대부분이다[3]. 따라서 水文 시스템의 流出 모델은 항상 자연계의 현상이 갖고 있는 無作爲性으로 인해 모델의 媒介變數가 불확정성을 가지고 있으므로 그 媒介變數가 시간, 공간에 따라서 변할 수 있도록 해야 한다. 그러나 일반적으로 降雨-流出 모델의 모델화 과정은 모델의 媒介變數가 정당성을 가진다고 가정한다.

따라서 現代 制御工學에서 時變인 Kalman Filtering 理論과 降雨-流出 모델의 결합에 의한 流出 豫測의 시도는 降雨-流出 모델에 의한 물리적 과정의 불확실성과 入力資料에서 나타나는 불확실성을 감소시킬 수 있게 된다. Kalman은 확률 과정의 정당성을 가정하지 않고 最適 推定 오차의 共分散行列을 구하기 위해 非線型 미분방정식을 유도함으로서 最適 線型 Filtering의 미분방정식 계수를 구했다[4,5].

本 硏究에서는 河川 流出量의 安全管理를 위하여 現代 制御工學에서 時變인 Kalman Filtering 理論을 적용해 河川 流域의 降雨-流出 해석과 정확한 流出 豫測을 위하여 線型 貯水池 모델을 기본 모델로 구성한 Kaiman Filtering 降雨-流出 모델을 사용해 降雨-流出 모델의 물리적 과정의 불확실성을 감소시키고, 媒介變數가 시간, 공간에 따라 변화하도록 해 정밀도가 높은 河川 流域의 流出 豫測 알고리즘을 확립하는데 그 目的을 두었다[6~9].

2. 모델의 기본이론

2.1 Kalman Filtering의 理論

시스템의 狀態 推定 문제에 적용되는 Kalman Filtering 은 Wiener가 모델화한 Wiener Filtering 의 이론을 근거로해 狀態 空間 개념을 도입해 Kalman Filtering 알고리즘을 개발하였다[10~12].

Wiener Filtering에 의한 推定 方程式은 식(1)과 같다.

$$\hat{X}(k)=\sum_{i=1}^{m} H(k,i)U(i)\,;\ i,k=1,2,3\cdots,m \quad \cdots\cdots (1)$$

여기서 $\hat{X}(k)$: 出力 벡터, $H(k,i)$: 加重 벡터
$U(i)$: 入力 벡터, i,k : 入出力 벡터를 발생시키는 시간 단계

Kalman Filtering은 狀態 空間 모델의 狀態 推定 알고리즘인 불확실한 觀測資料, 초기 경계 조건과 媒介變數를 가지는 決定論的 또는 推計學的 모델로서 시스템의 狀態를 最適狀態로 제공하는 기법이다.

Filtering은 R. E Kalman에 의하면 "일종의 수학상 계산 과정으로 시스템내의 과거의 자료나 관측치에 의해서 현재나 미래의 시스템 변수, 즉 狀態 벡터를 정확하게 推定하는 것이다."라고 정의하였다. 이를테면 어떤 관측된 離散 時系列(Discrete time series) X_1, X_2, X_3, ···, X_K, ···에서 이중 X_1, X_2, X_3, ···, X_K는 관측치로 부터 구한 가장 정확한 수치이라고 하고, 제 j 시각에 대한 가장 정확한 추정치를 X_j라고 하면 식(2)와 같이 표시할 수 있다.

$$X_j=E\{X_j \mid X_1, X_2, X_3, \cdots, X_K\} \quad \cdots\cdots (2)$$

또한 j, k의 大小에 따라서 다음의 세가지 상황으로 설명할 수 있으며 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다.

1) j=k
   ; Filtering이라고 하며, 현재의 시점을 추정하는 狀態 백터이다.
2) j<k
   ; Smoothing이라고 하며, 현재 시점의 관측치로 부터 과거시점을 추정하는 狀態 벡터이다.
3) j>k
   ; Prediction이라고 하며, 장래에 발생할 수 있는 狀態를 推定한다.

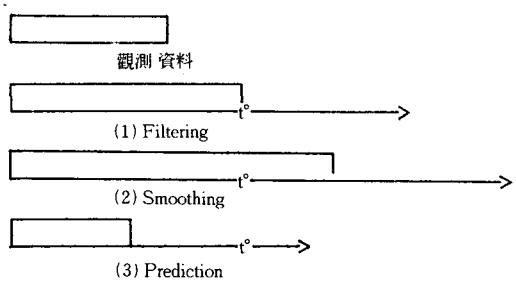

Fig. 1 Type of prediction

따라서 Kalman Filtering의 알고리즘은 動的 시스템 모델, 觀測 모델과, Kalman Filtering으로 구성되어 있으며, 그 과정은 Fig. 2와 같다.

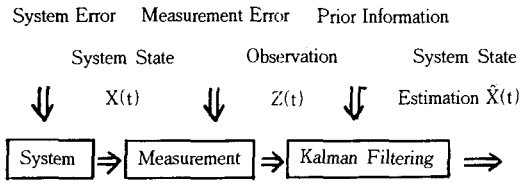

Fig. 2 Algorithms for Kalman Filtering

2.2 Kalman Filtering 降雨-流出 모델의 理論

Kalman Filtering 이론을 적용하는데 있어서 큰 문제점은 시스템 모델을 확립하는데 있으며, 降雨-流出 관계를 해석하는 데는 여러가지 모델이 있지만 결코 모든 모델이 적당한 형식으로 변형하여 Kalman Filtering 이론에 적용할 수 있는 것은 아니다.

本 硏究는 간단한 線型의 非時變性 모델로써, 과거의 일반 水文계산에서 지나치게 이론에 의존한 결과 만족스러운 계산결과를 얻지 못했으므로, Kalman Filtering 이론을 水文계산 과정에 적용하여 相關變數가 時變性을 갖도록 함으로써 시스템 모델이 더욱더 降雨-流出 관계에 부합되는 推定을 할 수 있을 것이다.

2.2.1 모델 基本過程의 誘導

水文 시스템 해석을 가상의 線型 貯水池(Linear Reservoir) 이론으로 하면 貯留量 S와 流出量 Q는 線型의 관계를 가지므로

$$S=K\cdot Q \quad \cdots\cdots (3)$$

가 되고, 윗 식에서 K는 貯留係數 (Storage Coefficient)이다. 貯水池의 流入量 I 및 流出量 Q의 차는 貯水池의 貯留量 S의 시간에 대한 변화률과 같아야 하므로 이들의 수학적 관계식은

$$I_{(t)}-Q_{(t)}=dS_{(t)}/d_t \quad \cdots\cdots (4)$$

이 된다. 만약 모든 流域을 하나의 線型 貯水池로 가정한다면, K를 상수로 하여 $S=K\cdot Q$를 식(4)에 대입하면 $Q_{(t)}$는

$$Q_{(t)}=[1/1+KD]\cdot I_{(t)} \quad \cdots\cdots (5)$$

이 되고, 윗 식에서 D는 미분을 나타내며, 1/1+KD는 轉換函數이므로, 有效降雨 $I_{(t)}$를 直接流出量 $Q_{(t)}$로 하여 식(5)를 풀면,

$$Q_{(t)}=e^{-t/k}\cdot\left[f\cdot\frac{1}{K}\cdot e^{t/k}\cdot d_t+C_s\right] \quad \cdots\cdots (6)$$

이 되고, 윗 식에서 C_s; 적분상수이다.

만약 流域을 N개의 線型 貯水池로 구성된다고 가정하고, 식(6)에서 流入量 I가 일정한 값을 가진다면, 초기조건에서 t=0일때 Q=0이므로, $Q_{(t)}$는

$$Q_{(t)}=I\cdot(1-e^{-t/k}) \quad \cdots\cdots (7)$$

가 된다. 또 $t=\infty$일때 流出量(Q)=流入量(I)가 되므로 水文 시스템은 평행상태를 이루게 된다. $t=t_0$일때 I=0이면 $Q=Q_{(t_0)}=Q_{max}$이므로 식(5)에 대입하면, $Q_{(t)}$는

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{-(t-t_0)/k} \quad \cdots\cdots (8)$$

이 되며, 식(6) 및 식(7)는 각 貯水池의 水位의 상승 및 하강의 단계를 나타낸다. 또 $t\rightarrow 0$일때, 순간적으로 流入되는 流入量을 $\forall$라고 하면, 첫번째 貯水池에서 Q_0는 식(3)에서 $Q_0=\forall/K$이므로, 식(8)에 대입하면

$$Q_1=\forall/K\cdot e^{-t/k} \quad \cdots\cdots (9)$$

을 얻는다. 이것이 첫번째 貯水池의 流出量이며, 또한 두번째 貯水池의 流入量은 $I_2=Q_1$이므로 I_2 및 $Q_{(0)}=0$를 식(6)에 대입하면, 두번째 貯水池의 流出量 Q_2는

$$Q_2=\forall/K\cdot e^{-t/k}(t/k) \quad \cdots\cdots (10)$$

가 된다. 또 Q_2는 세번째 貯水池의 流入量이 되므로, 마찬가지 방식으로 N번째 貯水池의 流出量 Q_n를 계산할 수 있다.

$$Q_n=\frac{\forall}{k(n-1)!}\cdot e^{-t/k}\cdot(t/k)^{n-1}$$

또는

$$Q_n=\frac{\forall}{k\cdot\Gamma(n)}\cdot e^{-t/k}\cdot(t/k)^{n-1} \quad \cdots\cdots (11)$$

윗 식에서 n는 소수가 될 수도 있으며, $\Gamma(n)$는 Gamma 함수이므로 Nash 모델이다. 윗식에서 流入量 I를 單位流入量(I=1)으로 해서 流域의 瞬間單位圖 $U_{(t)}$를 구할 수 있으며, $U_{(t)}$는

$$U_{(t)}=\frac{A}{k\cdot\Gamma(n)}\cdot e^{-t/k}\cdot(t/k)^{n-1} \quad \cdots\cdots (12)$$

이 된다. 윗 식에서 A는 流域面積이고, 回旋積分(Convolution Interal)을 이용하여 流域의 流出量 $Q_{(t)}$를 구하면, $Q_{(t)}$는

$$Q_{(t)}=\int_0^t I_{(\tau)}\cdot U(t-\tau)d_\tau \quad \cdots\cdots (13)$$

이 된다. 윗 식에서 n, k는 水文 觀測 資料를 이용하여 모멘트법(Method of Moment), 多重回歸法, 多重相關方法으로 구할 수 있으며, 여기서는 모멘트법을 이용해 구한다.

2.2.2 모델 計算公式의 誘導過程

식(13)에서 回旋積分을 離散型(Discrete form)으로 고쳐 쓰면,

$$Q_1=U_0I_1$$
$$Q_2=U_0I_2+U_1I_1$$
$$Q_3=U_0I_3+U_1I_2+U_2I_1$$
$$\vdots \quad \cdots\cdots (14)$$
$$Q_{n-1}=U_0I_{n-1}+U_1I_{n-2}+\cdots+U_{n-1}I_1$$
$$Q_n=U_0I_n+U_1I_{n-1}+\cdots+U_{n-1}I_2+U_nI_1$$

이 되므로, 윗 식을 행렬형식으로 고쳐 쓰면

$$[Q]=[I]\cdot[U] \quad \cdots\cdots (15)$$

이 되고, 윗 식에서

$$[Q]=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\\vdots\\Q_n\end{bmatrix}_{n\times1}\quad [I]=\begin{bmatrix}I_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\I_2 & I_1 & 0 & \cdots & 0\\I_3 & I_2 & I_1 & \cdots & \cdots\\\vdots & & & & \vdots\\I_{n-1} & I_{n-2} & \cdots & I_1 & 0\\I_n & I_{n-1} & \cdots & \cdots & I_1\end{bmatrix}_{n\times n}\quad [U]=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\\vdots\\U_{n-1}\end{bmatrix}_{n\times1}$$

$$\cdots\cdots (16)$$

이 되며, [U]는 非定常性(Nonstationary)이므로, Karman Filtering 이론을 적용하여 [U]를 시스템 모델의 狀態 벡터 X(k)로 취급하였으며, 계산과정의 flow chart는 Fig. 3과 같다.

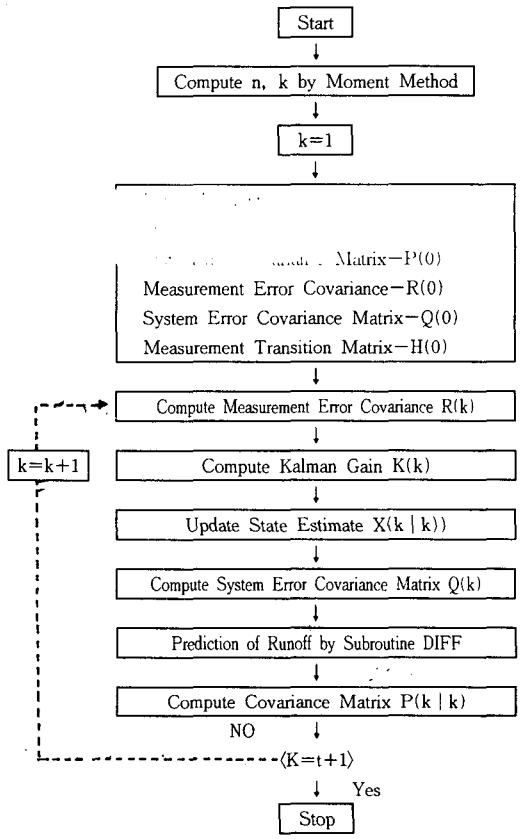

Fig. 3 Flow chart for Kalman Filtering Rainfall-runoff model

3. 모델의 적용 및 분석

3.1 分析 適用 및 水文資料

本 硏究에서 Kalman Filing 降雨-流出 모델의 이론과 알고리즘을 실제 河川 流域에 적용하기 위한 대상 流域은 비교적 정밀한 降雨와 水位 및 流量 등의 水文資料가 있는 IHP 대표 流域인 落東江 渭川 流域을 선정하였다.

선정 流域內에는 自記 雨量觀測所가 11개소, 自記 水位觀測所가 6개소 있으며, 河川 水系의 구성은 本流와 비교적 큰 1개의 支流로 구성되어 있다. 적용 地點은 本流의 最上流 地點인 東谷地點을 선정하였으며, 流域圖는 Fig. 4와 같다.

分析에 사용된 水文資料는 時雨量과 時流量으로 小流域別 平均 降雨量은 流域內 11개 降雨觀測所를 기준으로 Thiessen法에 의해서 구하였으며, 觀測 流量은 東谷 水位로 地點의 水位-流量 曲線(Rating-Curve)을 水位 記錄紙에 적용해 산정하였다. 觀測日은 1987년 7월 9일 水文 觀測 資料이다.

3.2 모델의 分析 및 考察

모델에서 필요한 초기치는 狀態 推定 오차의 共分散行 P(0 | 0), 觀測 오차 벡타 V(k)의 共分散 R(0), 시스템 오차 벡타 W(k)의 共分散行列 Q(0) 등이다. 그리고 觀測 오차 벡타 V(k)의 共分散 R(k)의 초기치는 流量의 推定値가 없으므로 R(0)=0으로 가정하였다.

한편 시스템 오차 벡타 W(k)의 共分散行 Q(k)의 초기치는 Q(0)=[0.01 I], 觀測 遷移行列 H는 H[1 0]로 가정한다. 이때 관측 오차를 filtering 함으로서 狀態 推定을 하는데 필요한 Kalman Gain K(k)는 Fig. 5와 같고, GK1은 狀態-벡터 PQK에 해당되는 Kalman Gain으로 상수 1이 되며, GK2는

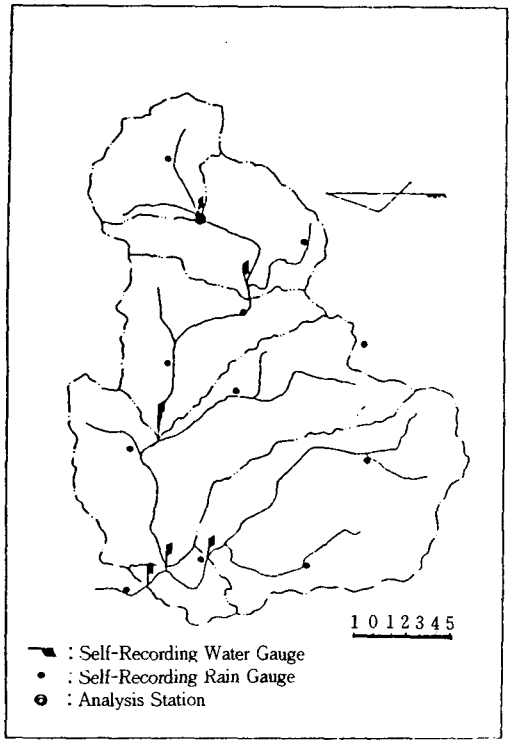

Fig. 4 Location map of gauging station (Wi-stream)

IHU의 종거(U)에 대한 Kalman Gain으로서 영(零)에 수렴하고 있다.

모델을 渭川 대표 유역에 적용해서 분석한 결과 總流出量 오차와 尖頭流出 오차는 0~±0.2 정도이고, 尖頭流出量 발생시간은 관측치와 동일하였으며, 분석 결과는 Table 1과 같고, 분석 결과 水文曲線은 Fig. 6과 같다.

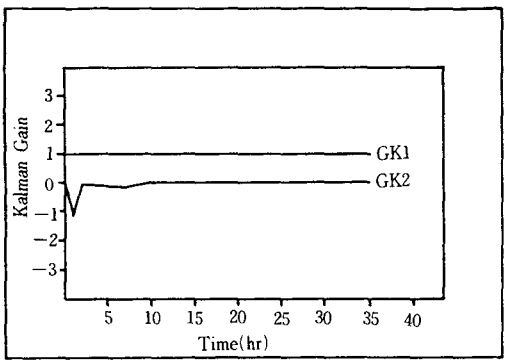

Fig. 5 Kalman gain of model

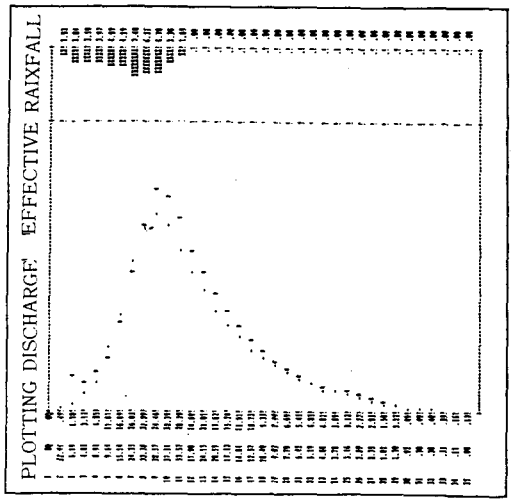

Fig. 6 Comparison of flood hydrograph

Table 1 Comparison of Error For Kalman Filtering Models

Items	$Q_p(M^3/sec)$	$T_p(hr)$	VE	PFE	PTE
Observed	34.46	9			
Calculated	38.57	9	0.181	0.119	0.000

- VE : Volume Error
- PFE : Peak Flow Error
- PTE : Peak Time Error

4. 결 론

河川 流域의 流出 과정의 해석과 流出 豫測 알고리즘을 확립하기 위하여 Kalman Filtering 降雨-流出 모델을 분석 流域에 적용해 분석한 결과는 모델의 媒介變數에 대한 時變性을 잘 나타내고, 降雨-流出 과정의 물리적 불확실성을 감소시킴으로서 河川 流出 豫測에서 우수한 결과를 얻었으며, 河川 流域의 降雨-流出 豫測 알고리즘으로서 적합하다고 판단된다. 따라서, 落東江 渭川 대표 流域에 적용 분석한 결과는 다음과 같다.

1) 狀態-벡터를 적응 推定해 時變化함으로써 流出 豫測을 실시한 결과 실측치에 더욱 접근하는 결과를 얻었다.
2) Kalman Gain은 Fig. 5와 같이 流出 초기에는 큰변화를 보이다가 시간이 경과함에 따라 점차 거의 零에 수렴하는 것으로 나타났다.
3) 總流出量, 尖頭流出量, 尖頭發生時間 오차가 Table 1과 같이 실측 水文曲線에 접근하는 결과를 얻었다.

참 고 문 헌

1) Kisiel, C.C. : Mathematical methodology in hydrology, The progress of Hydrology, Proceeding of lst International Seminar for Hydrology Professors, Vol. 1, 1969.
2) Raudkivi, A.J. : Hydrology; An Advanced Introduction to Hydrological Processes and Modeling, Pergamon Press, 1979.
3) Melsa, A.L and D.L. Cohn : Decision and Estimation Theory, Mcgraw-Hill, New York, 1978.
4) Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trdns., ASME, Jr. of Basic Eng., Vol. 82, 1960.
5) Kalman, R.E and R.S. Bucy New Results In Linear Filtering and Prediction Theory, Traus., ASME, Jr. of Basic Eng., Vol. 83, 1961.
6) Nash, J.E. : The Form of The Instantaneous Unit Hydrograph, Intern. ASSOC. Soic. Hrodrology, Pub. 45, Vol. 3, 1957.
7) Wu, C.M., W.C. Huang : Examples of Flow Forecasting with Kalman Filter. Proc. of Roc-Japan Joint Seminar, Taipei, 1987.
8) Wang, R.Y., K.T. Lee : Hydrologic Study of Tanshui River Construction and Verification of Runoff Models of Watersheds Along Keelung River, NSC 74-0414-9002-04 Project, Dept. of Civil Eng., 1985.
9) Chiu, Chao-Lin and K. Mizumura : Prediction of Combined Snowmelt and Rainfall Runoff, Jr. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 111, 1985.
10) Jacoby, S.L.S : A mathematical model for nonlinear Hydrologic Systems, Journal of Geophysical Research, Vol. 71, 1966.
11) Amorocho, J. : Measures of the linearity of Hydrologic Systems, Journal of Geophysical Rearch, Vol. 68, 1963.
12) Hino, M : Runoff Foreasting by Variable Transformation, Proc. ASCE, Journal of Hydr. Div., Vol. 96, 1970.
13) 水文學. 河川工學 I, 崔榮博, 李舜鐸, 李吉永, 瑩雪出板社, 1975.
14) 水文學, 鮮于 仲皓, 東明社, 1980.
15) 河川工學, 金 亨洙, 瑩雪出板社, 1985.
16) 河川工學 金熙鐘, 東明社, 1985.
17) 水理學, 崔榮博 외 2인 光林社, 1980.