論文 11-2-15

從動力을 받는 Timoshenko 외팔보에서 自由端의 탄성구속이 安定性에 미치는 影響

Influence of Elastic Constraints at Free End on Stability of Timoshenko Cantilever Beam Subjected to a Follower Force

윤 한 익*·손 종 동**·김 현 수***
H. I. Yoon · J. D. Son · H. S. Kim

ABSTRACT

On the stability of Timoshenko cantilever beam subjected to a follower force, the influence of the characteristics of elastic constraints at the free end is studied. The equations of motion and boundary conditions of this nonconservative elastic system are estabilished by using the Hamilton's principle. Upon evaluation of the stability of this system, the effect of shear deformation and rotatory inertia is considered in calculation. Using cowper's formulae Timoshenko's shear coefficient K′ are determined. From this imvestigation it is found that the constrain parameter have an appreciable stabilizing effect in this nonconservative system. Moreover, it is obvious that the small values of K′ decrease the flutter load of this system.

1. 서 론

産業의 발달로 인하여 각종 設備들은 대형화, 고속화 趨勢로 나타나고 있으며, 동시에 설비의 安定性 문제는 대단히 중요한 연구 과제로 관심을 모으고 있다.

구조물의 안정성에서 彈性體의 안정성 문제는 應用力學의 한 분야로서 彈性系에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 탄성계에 작용하는 외력을 Euler[1]는 모두 保存力으로 생각하고 그 安定性을 연구하였다.

1928년 Nikolai[2]는 비틀림을 받는 봉의 安定性 문제를 연구하는 동안에 Euler method(Static method)가 맞아들지 않음을 발견하고 Euler

* 동의대학교 기계설계학과
** 동명전문대학 산업안전과
*** 동의대학교 대학원

mothod 대신에 method of small oscillations을 사용하여 해석 하였다. 그후 Zieglre[3]에 의하여 彈性安定의 한 요인이 작용외력의 非保存的 存在에 있음이 발견되었다. 1950년대에 Plüger[4]와 Feodos'ev[5]는 자유단에 接線從動力을 받는 외팔보의 安定性 문제를 연구하였다. 이 연구에서 그들은 정적인 방법(Euler's mothod)으로 계산하였으므로 안정성을 잃게 되는 臨界荷重이 없다는 잘못된 결론을 얻게 되었다.

Beck는 자유단에 壓縮從動力을 받는 균일 단면의 외팔보(이하 Beck Column이라 한다)의 임계플러터 하중을 動的安定 基準에 의하여 계산하였고 Deineko[7], Leonov들은 Beck Column의 자유단과 보의 중앙에 질량이 있을때 그들이 보의 安定性에 미치는 影響을 연구하였다. Leipholz[8], Madan, Bolotin[9]은 彈性安定의 非保存的 문제를 광범위하게 연구하여 그의 저서에서 상세하게 설명하였다.

Nemat-Nasser[10]와 Kounadis[11], Katsikadelis[11]들은 보의 剪斷變形과 回轉慣性을 考慮한 Beck Column의 안정성을 연구하였고, Kounadis는 壓縮從動力을 받는 Timoshenko beam의 안정성에 集中質量들의 影響을 考慮하였다.

Anderson[12], Vasilakis[13], Wu들은 末端質量의 무게 중심이 보의 自由端에 있지 않은 경우, 그 末端質量의 증가가 보의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 윤한익, 김광식[14]은 말단질량의 형상에 의한 그 관성 모멘트의 변화가 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 본 논문에서는 보의 剪斷變形과 回轉慣性의 영향을 고려하고, Timoshenko의 전단계수 K'는 Cowper[15] 공식으로 결정하여, 자유단의 彈性 拘束이 系의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 이론해석

Fig. 1은 외팔보의 自由端에 스프링으로 彈性支持되고 壓縮從動力이 작용하는 非保存的 彈性系이다. 系의 운동 방정식을 유도하기 위하여 Hamilton principle을 사용하였다. 非保存的 線形系에 대한 Hamilton principle은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta W_n\,dt=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

여기서 L는 Lagrangian으로서

$$L=T-V-W_C \quad \cdots\cdots (2)$$

이고 T : 系의 전운동에너지

V : 系의 전변형에너지

W_e : 변형이 일어나는 동안에 외력의 보존력에 의하여 이루어진 일량

W_n : 변형이 일어나는 동안에 외력의 非保存力에 의하여 이루어진 일량

이다. 본 논문의 非保存的 彈性系에서는

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l(\rho A\dot{y}^2+\rho I\dot{\psi}^2)dx \quad \cdots\cdots (3)$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l[EI\psi'^2+K'AG(y'-\psi)^2]dx+\frac{1}{2}C_T y^2(l,\,t) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$W_C=\frac{1}{2}\int_0^l P\dot{y}^2dx \quad \cdots\cdots (5)$$

$$W_N=-P\dot{y}(l,\,t)y(l,\,t) \quad \cdots\cdots (6)$$

이다. 여기서 EI는 굽힘剛性係數 ($y'-\psi$)는 기둥의 剪斷變形에 의한 剪斷角이며 $y(l)$과 $\psi(l)$은 각각 외팔보의 자유단의 橫變位와 자유단 단면의 回轉角이다. $y(0)$와 $\psi(0)$는 각각 고정단의 橫變位와 고정단 단면의 회전각이다.

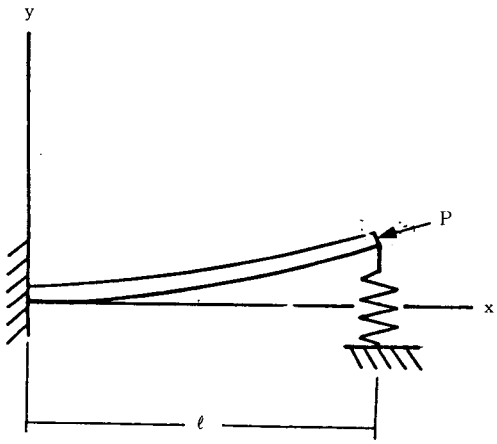

Fig. 1 Elastically constrained Timoshenko cantilever beam subjected to a concentrated follower force

또 보의 전단변형과 회전관성을 고려하면 보의 굽힘모우멘트 M(x, t)와 변형되지 않은 보의 축에 수직인 전단력 Q(x, t)는 다음과 같다.

$$M(x,t)=-EI\dot{\psi}(x,t) \quad \cdots\cdots (7a)$$

$$Q(x,t)=K'AG[e\acute{y}(x,t)-\psi(x,t)] \quad \cdots\cdots (7b)$$

여기서 $e=1-P/(K'AG)$이고 從動力 P가 작용하지 않는다면 식 (7a, b)는 Timoshenko 보의 굽힘모우멘트와 전단력의 식에 일치된다.

구간 $t_1 \sim t_2$에서 식(3)~(6)의 변분식을 유도하여 식(1)에 대입정리하면 외팔보의 운동방정식(8)과 경계조건의 식(9a, b, c, d)을 얻는다.

$$y''''-\rho\left(\frac{1}{K'G}+\frac{1}{E}\right)\ddot{y}''+\frac{m}{EI^*}\ddot{y}+\frac{P}{EI^*}y''+\frac{\rho^2}{K'EG}y=0 \quad \cdots\cdots (8)$$

여기서 $I^*=I/(1+P/K'AG)$이다.

X=0에서

$$y(0,t)=0 \quad \cdots\cdots (9a)$$

$$\psi(0,t)=0 \quad \cdots\cdots (9b)$$

X=l에서

$$\psi'(l,t)=0 \quad \cdots\cdots (9c)$$

$$Q(l,t)+P\acute{y}(l,t)+C_Ty(l,t)=0 \quad \cdots\cdots (9d)$$

기둥의 운동방정식 (8)의 해를

$$y(X,t)=v(X)e^{i\omega t},\ i=\sqrt{-1} \quad \cdots\cdots (10)$$

이라고 가정하여

식(10)을 식(8)에 대입하고, 무차원 독립변수 $\tau=X/l(0\le\tau\le1)$을 도입하면 식(8)은

$$\frac{d^4v(\tau)}{d\tau^4}+\beta^2\frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2}-\zeta v(\tau)=0 \quad \cdots\cdots (11)$$

의 무차원화된 식이 된다. 여기서

$$\beta^2=\frac{\rho\omega^2l^2}{K'G}+\frac{\rho\omega^2l^2}{E}+\frac{Pl^2}{EI^*} \quad \cdots\cdots (12a)$$

$$\zeta=\frac{m\omega^2l^4}{EI^*}\left(1-\frac{\rho^2\omega^2l^*}{mK'G}\right) \quad \cdots\cdots (12b)$$

이다. 마찬가지로 경계조건의 식(9a, b, c, d)도 다음과 같이 무차원화 된다.

$\tau=0$에서

$$v(0)=0 \quad \cdots\cdots (13a)$$

$$\psi(0)=0 \quad \cdots\cdots (13b)$$

$\tau=1$에서

$$\psi'(1)=0 \quad \cdots\cdots (13c)$$

$$Q(1)+(P/l)\acute{v}(1)+C_T(1)=0 \quad \cdots\cdots (13d)$$

식(11)의 일반해는

$$v(\tau)=c_1\cosh\lambda_1\tau+c_2\sinh\lambda_2\tau+c_3\cos\lambda_2\tau+c_4\sin\lambda_2\tau \quad \cdots\cdots (14)$$

가 되고, 여기서

$$\lambda_n=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\beta^4+4\zeta)^{1/2}+(-1)^n\beta^2]^{1/2},\quad n=1,2 \quad \cdots\cdots (15)$$

이다.

식(7a, b)로 부터 유도되는 $Q(\tau)$와 $\psi(\tau)$의 값과 식(14)를 경계조건의 식(13a, b, c, d)에 대입하고, 무차원 매개변수

$$s=\frac{2l}{k},\quad \varepsilon=\frac{E}{G},\quad K_T=\frac{C_Tl^3}{EI}$$

$$\Omega^2=\frac{\rho A\omega^2l^4}{EI},\quad P_L=\frac{P}{P_E},\quad P_E=\pi^2\frac{EI}{4l^2}$$

$d(b_{jk})=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{4\varepsilon\theta}{K's^2}\lambda_2^2\right)\lambda_1 \\ \left(\frac{4\Omega^2\varepsilon}{K's^2}+\lambda_1^2\right)\cosh\lambda_1 & \left(\frac{4\Omega^2\varepsilon}{K's^2}+\lambda_1^2\right)\sinh\lambda_1 \\ \left(\frac{\pi^2P_L}{4}-\theta\lambda_2^2\right)\lambda_1\sinh\lambda_1+K_T\cosh\lambda_1 & \left(\frac{\pi^2P_L}{4}-\theta\lambda_2^2\right)\lambda_1\cosh\lambda_1+K_T\sinh\lambda_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{4\varepsilon\theta}{K's^2}\lambda_1^2\right)\lambda_2 \\ \left(\frac{4\Omega^2\varepsilon}{K's^2}-\lambda_2^2\right)\cos\lambda_2 & -\left(\frac{4\Omega^2\varepsilon}{K's^2}+\lambda_2^2\right)\sin\lambda_1 \\ -\left(\frac{\pi^2P_L}{4}+\theta\lambda_1^2\right)\lambda_2\sin\lambda_2+K_T\cos\lambda_2 & \left(\frac{\pi^2P_L}{4}+\theta\lambda_1^2\right)\lambda_2\cos\lambda_2+K_T\sin\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$=0 \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\theta = \frac{1}{1-(16\epsilon\,\Omega^2/K's^4)}\,\theta \quad \cdots\cdots (16)$$

을 도입하면 다음 4개의 선형제차 대수 방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{4} b_{jk}c_k = 0,\ j=1,2,3,4 \quad \cdots\cdots (17)$$

대수방정식의 계(17)이 뜻을 갖는 해를 갖기 위해서는 그 계수의 행렬식이 영(zero)이 되어야 한다.

行列式(18)을 전개하면 壓縮從動力을 받는 비보존적 탄성계 Fig. 1의 진동수 방정식이 된다.

3. 수치해석 및 고찰

行列式(18)은 無次元 從動力 P_L과 振動數 Ω^2를 변수로 갖는다. 그러므로 충분히 작은 값 P_L을 선택하여 식(18)을 만족시키는 Ω^2를 구하면, 외팔보의 橫振動의 제 1,2차 모우드(mode)에 해당되는 진동수를 얻게 된다. P_L의 값을 점차 增加시키면 제 1,2차 진동수는 점점 가까워져서 겹쳐지게 되는데, 그때의 P_L값이 系의 풀러터 荷重 P_{LCr}이며, 외팔보가 不安定하게 되는 臨界荷重이다. P_L이 P_{LCr}보다 크게 되면 이들 진동수는 공액 복소수가 되어서 무의미하게 되고 외팔보는 안정을 잃게된다. 플러터는 $P=P_{LCr}$에서 시작되어 외팔보의 橫振動 진폭은 지수적으로 증가하여 불안정한 진동으로 되고 파괴가 일어난다.

본 연구에서는 외팔보의 자유단을 彈性支持하는 병진스프링 상수의 영향과 함께, 보의 剪斷變形과 回轉慣性이 系의 안정성에 미치는 영향을 구명하였다. 보의 세방지 s는 64로 하였으며 포아송의 비 ν는 0.3으로 하였다.

Timoshenko의 전단계수는 Cowper의 공식으로 계산하여 0.89(원형단면), 0.62(중공원형관면), 0.435(얇은 4각 중공단면), 0.185(Ⅰ형 단면)이 4종에 대하여 해석하였다.

Fig. 2는 무차원 스프링상수 $K_T=10$, Timoshenko 전단계수 $K'=0.89$일 때의 固有値曲線이다. 즉 固有値方程式 (17)의 두 固有値 P_L과 Ω^2의 관계이다. 이 그림에서 곡선의 최대치의 좌표 $P_L=9.1486$이 臨界플러터하중 P_{Lcr}과 된다. 그러므로 $\Omega^2_{cr}=111.5$가 臨界플러터 진동수가 되고, P_L의 값이 P_{Lcr}이상이 되면 界는 불안정해진다. 界의 安定領域은 P_{Lcr}이하의 全領域이다. $P_L=0$일때의 두 진동수는 系의 1,2차 고유진동수이다.

Fig. 3과 Fig. 4 그리고 Fig. 5는 외팔보의 자유단을 지지하는 병진스프링의 무차원상수 K_T와 Timoskenko의 전단계수 K'의 크기가 系의 臨界플러터하중과 臨界플러터진동수에 미치는 영향을 표시한 것이다. K_T가 증가할 수록 臨界플러터하중은 線形적으로 증가함을 보이고, 臨界플러터 진동수는 $K_T=10$이 될때 까지는 거의 변화가 없으나 K_T가 10이상에서는 크게 감소함을 알 수 있다. 또 K'의 값이 작을수록 그 영향이 크게 나타나서 系의 臨界플러터하중과 臨界플러터진동수를 감소시키고 있다.

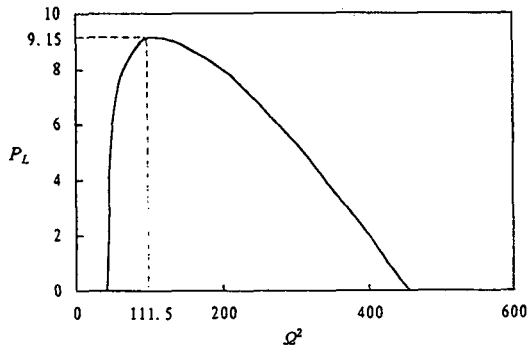

Fig. 2 Eigenvalue curve. $K'=0.89$, $K_T=10$, s=64

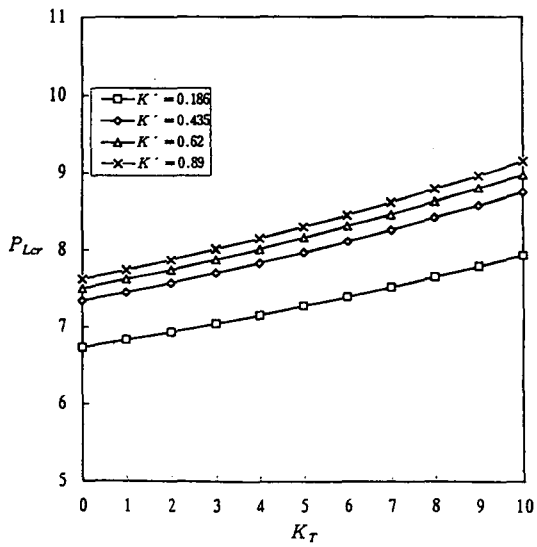

Fig. 3 Variation of P_{Lcr} versus K_T for K'

Fig. 3에서 K′=0.89와 K_T=0일때의 臨界플러터 하중은 7.621이다. 이 값은 Beck[6]의 8.1259(=20.05×(4/π^2))보다 약 6.2% 낮은 값으로 보의 전단변형과 회전관성의 영향이다.

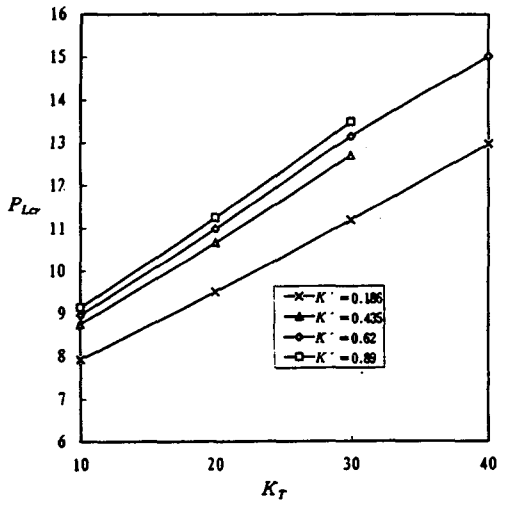

Fig. 4 Variation of P_{Lcr} versus K_T for K′

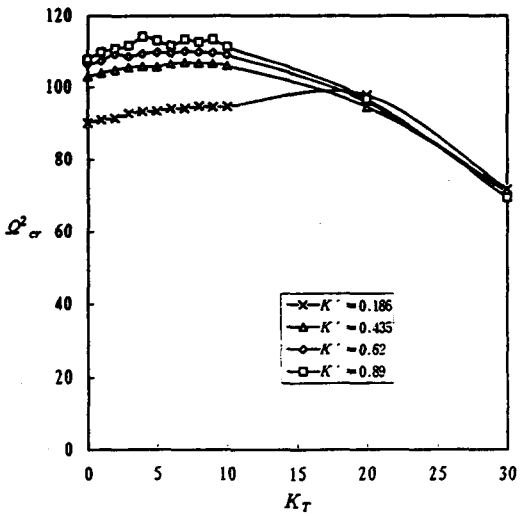

Fig. 5 Variation of Ω^2_{cr} versus K_T for K′

4. 결 론

자유단이 竝進스프링으로 彈性支持되고 壓縮從動力이 작용하는 Timoshenko 외팔보의 安定性을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 자유단을 拘束하는 竝進스프링은 플러터하중을 더 크게하여 계의 安定性을 增加시킨다.
2) Timoshenko의 剪斷係數가 작을 수록 플러터 荷重을 낮게하여 系의 安定性을 減少시킨다.
3) 플러터 진동수는 자유단의 竝進스프링 상수에 거의 영향을 받지 않으며, K′의 값에는 조금 영향을 받아서 비례적으로 낮아진다.

참 고 문 헌

1) L. Euler, Method of Finding Curves Possessing the properties dither of a Maximum or of a Minimum, or the Solution of the Isoperimetric Problem in its Widest Sense, Gostekkizdat, p. 491, 1934.
2) E. L, Nikolai, On the Stability of the Rectiolinear Form of Equilibrium of a Bar in Compression and Torsion, Izv. Leningr politekn in-ta Vol. 31, 1928.
3) H. Ziegler, Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik, Ingenieur-Archiv, Vol. 20, pp. 49~56, 1952.
4) A. Pfluger, Zur Stabiliat des Tangential Gedruckten States, Zeitschrift fur angewandte Mathemaik und Physik, Vol. 35, p. 191, 1995.
5) V. I. Feodos'ev, Selected Probleme and Question in Resistance of Materials, Gostekhizdat, 1953.
6) M. Beck, Die Knicklast des Einseitig Eeingespannten, Tangential Gedrucken Stabes, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, Vol. 3, pp. 225~229, 1952.
7) V. V. Bolotin, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, Oxford, 1963.
8) H. Leipholz, Stability of elastic systems, sijthoff & Noordhoff, 1980.
9) W. W. Walter and M. Levinson, Destabilization of a Nonconservatively Loaded Eastic System due to Rotary Inertia, Canadian Aeronauties and Space Institute Transactions Vol. 1, pp. 91~93, 1968.

10) S. Nemat-Nasser, Instability of a Cantilever under a Follower Force Accoding to Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, pp. 484~485, 1967.

11) A. N. Kounadis and J. T. Katsikadelis, Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column, Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, pp. 171~178, 1976.

12) G. L. Anderson, the Influence of Rotatory Inertia, Tip Mass, and Damping on the Stability of a Cantilever Beam on an Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 43, pp. 540~552, 1975.

13) G. L. Anderson, J. D. Vasilakis and J. J. Wu, The Influence of Tip Mass offset on the Stability of Beck's Column, Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 475~480, 1979.

14) 尹漢翼, 金光植, 말단질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안전성에 미치는 영향, 대한기계학회 논문집 제8권, 제2호, pp. 119~126, 1984.

15) G. R. Cowper, The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335~340, 1966.