論文 11-1-3

Domination이론에서의 새로운 식과 이의 신뢰성계산에 대한 적용

New formula in domination theory and it's application for reliability analysis

이 광 원*·이 일 재**·강 신 재***
Kang-Won Rhie · Ii-Jae Lee · Sin-Jae Gang

ABSTRACT

In a series of original papers, [1-17] efficient methods and algorithms have been presented, for the exact solution of many reliability problems represented by binary networks. A starting point of these methods was the concept of domination, firstly introduced in relation with reliability problems in [2]. It's application to directed networks resulted in the development of a topological formula for the classical problem of the two terminal reliability. This result was extended later to the all-terminal and the k-terminal reliability problems. All papers mentioned above use a path oriented representation for the network topology. In practical applications, however, it is common and often advantageous to work with cut sets. This article considers the Domination theory for reliability problem of a network. Some topological formula are derived and the power and the application of this formula are shown through the alternative proof of topological formula of A. Satyanarayana[2].

1. 요 약

A. Satyanarayana와 다른이들은 [1.2.5]에서 domination이론을 사용하여 네트워크의 정확한 신뢰도 계산을 위한 새로운 topologic formel을 발견하였다. 이들은 이식을 통하여 그래프 G로 표현되는 어떤 시스템이나 네트워크의 신뢰도 계산을 위하여 path 또는 k-tree를 사용한 Inclusion-Exclusion식에 나타나는 항들($=2^m-1$, m은 path나 k-tree의 수)중 서로 소거되지 않는 항들은 그래프 G의 acyclic k-부분그래프(subgraph)와 1대 1로 상응되며, cyclic-과 $\bar{k}$-부분그래프들에 상응되는 항

* 호서대학교 산업안전공학과
** 호서대학교 산업안전공학과
*** 한국가스공사 연구개발원

들은 소거되어지거나 Inclusion-Exclusion식에 나타나지 않는 -결국 신뢰도 계산에 필요없는- 항들임을 밝혔다.

이들은 이성질을 이용하여 그래프 G의 정확한 신뢰도계산을 위한 빠른 알고리즘을 제시하였다. 이 알고리즘은 결국 그래프 G의 path나 k-tree를 기초로 하는 Inclusion-Exclusion식에서 나타나는 항들중 소거되지 않는 항들에 1:1로 대응하는 acyclic k-subgraph만을 찾아 신뢰도계산을 할 수 있게 하여 준다. 이때 acyclic k-subgraph들은 각각의 domination을 갖으며, 이들은 Inclusion-Exclusion식에서 대응되는 항의 부호들의 합과 같다.

본 논문에서는 첫째로 신뢰도계산을 위하여 주어진 어떤 그래프 G에서 G를 구성하는 선(edge)을 기초로 하는 어떤 임의로 주어진 family M(G) (예 : cutset이나 path, 또는 k-tree 등의 family)에 의한 (부분)그래프의 domination에 대한 성질을 관찰하고 몇가지 식을 유도한 후, k-tree의 family K(G)를 기초로 한 어떤 그래프의 domination과 Inclusion-Exclusion식과의 관계를 고찰하고, 이식의 강력함과 응용의 가능성을 A. Satyanarayana의 topologic formel의 재증명을 통하여 보인다.

2. 문제의 제기

어떤 시스템에서 시스템 성분들의 신뢰도 혹은 고장도가 주어지고 전체 시스템의 신뢰도 검사가 자주 요구된다. 이때 시스템의 구조는 그래프(네트워크)나 논리나무(logic tree)로 주어지게 된다.

신뢰도 검사는 이들 그래프의 두 절점(vertix) 혹은 여러개의 절점이 연결되어있을 확률을 계산하며, 논리나무인 경우 톱사상(Topevent)이 일어날 확률을 계산하여 실현화 시킨다. 이때 확률계산의 복잡도는 주어진 시스템의 크기와 구조에 의해 결정된다.

본 논문에서는 절점의 집합 V와 방향이 주어진 선(혹은 가지, directed edge)들의 집합 E로 이루어진 선형 방향성-(linear directed-) 그래프 G=(V,E)를 관찰한다.

E에 속하는 모든 선 e은 확률 p를 갖는 정상상태와 확률 1-p를 갖는 고장상태를 갖게 되며, 선의 형태로 나타나는 부품들은 고장시 서로 독립적이라 가정한다.

절점들은 선들(즉 부품들)의 연결을 나타내주며 완벽하다고(즉 고장날 수 있는 확률이 0이라고) 가정한다.

비방향(undirected) 그래프나 부분적인 비방향 그래프들은 간단히 비방향선을 방향이 서로다른 한쌍의 방향선(antiparallel-directed edge)로 바꿀 수 있으므로[2], 비방향그래프라는 조건은 그리 큰 제약이 아니나, 그래프에 한부품이 한번밖에 나타나지 못하는 linear-그래프라는 조건은 많은 경우(예를 들면 3중 2구조) 제약을 받게된다.

신뢰도검사의 목적에 따라 n개의 절점을 갖는 그래프에서 출발점(source vertex, V_S 혹은 s로 표기)과 도착점(terminal vertex, V_K)이 결정되며 V_K의 수 $|V_K|$에 따라

1) source to terminal (s−t)Problem($|V_K|=1$)
2) source to all termenal(SAT)Problem($|V_K|=n-1$)
3) source to K-terminal(SKT)Problem($1\le|V_K|\le n-1$)

으로 구분된다. 1과 2는 3의 특별한 경우, 즉 $|V_K|=1$과 $|V_K|=n-1$인 경우이므로 앞으로는 SKT신뢰도 문제에 대하여만 관찰하기로 한다.

그래프이론상으로 SKT신뢰도 R(G)는 출발점 s와 V_K에 속하는 모든 절점들이 연결되는 확률로 정의된다.

어떤 k-tree K_i는 출발점 s와 V_K에 속하는 모든 절점을 연결시켜주는 최소한의 선의 집합으로 정의되며, $Ind(V_i)$ 또는 $Outd(V_i)$는 절점 V_i에 도착되는 선 또는 출발하는 선의 수를 나타내준다.

정의에 의해 k-tree는 출발점 s에서 Ind=0이며 다른 모든 k-tree에서는 Ind=1이다[20]. 구조학적으로 K-tree는 s에서 모든 절점 V_K로 정확히 하나만의 path를 갖는 최소 부분그래프이다. 이상에서 R(G)는 그래프 G가 최소한 하나의 작동되는 k-tree를 갖을 확률로 쓸 수가 있다.

G의 k-tree 집합을 $K(G)=\{K_1, K_2, \cdots, K_m\}$, k-tree의 수 $|K(G)|$를 m이라 하고 A_i를 K_i에 속하는 모든 선(이에 대응하는 부품)이 정상일 사건이라 하면 Inclusion-Exclusion식에 의해 R(G)는

$$R(G)=P(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}P(A_i\cap A_j)+\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m) \cdots\cdots (1)$$

로 나타내어 진다.

사건 $A_i \cap A_j \cdots \cap A_l$는 해당되는 k-tree들 K_i, K_j, …, K_l에 포함되는 모든 선이 정상일 사건을 뜻한다.

식(1)에서 보듯 k-tree에 속하지 않는 선($\bar{k}$-선)들은 신뢰도 계산에 영향을 주지 못하게되며 이러한 $\bar{k}$-선들을 포함치 않은 그래프들을 k-그래프라 부른다[1]. 결국 k-그래프들은 모든 선이 최소한 한번은 k-tree에 속하는 그래프이다.

$|V_K|=1$ 또는 $|V_K|=n-1$인 경우 [2,5]에서는 k-그래프를 p-그래프, t-그래프라고 부른다.

어떤 k-그래프 G의 formation은 G의 선을 모두 포함하는 k-tree들의 합집합으로 정의된다.

Formation을 이루는 k-tree의 수가 짝수이면 짝수 formation, 홀수이면 홀수 formation이라 하고 G의 domination은 홀수formation의 수에서 짝수 formation의 수를 뺀 값으로 정의된다(3.1절 참조).

식(1)에서 항 $A_i \cap A_j \cdots \cap A_l$는 G의 어떤 k-부분그래프($G_a$라 표시하자)에 상응하게 된다. 즉 G_a에 포함되어지는 선들은 항 $A_i \cap A_j \cdots \cap A_l$에 대응하는 k-tree들이 포함하는 선들이며 $d(G_a, K(G))$를 K(G)를 기초로한 G_a의 domination이라 표시한다.

모든 k-tree 또는 이들의 합집합으로 구성되는 (부분)그래프들은 k-그래프들이며(즉 $\bar{k}$-선이 없는 그래프) 이로부터 K(G)를 기초로한 어떤 $\bar{k}$-(부분)그래프의 domination은 0임을 쉽게 알 수 있다.

위의 정의로 부터 식(1)에 나타나는 모든항은 상응되는 부분그래프(모두 k-부분그래프)로 바꾸어 쓸 수 있다. 즉 식(1)은

$$R(G)=\sum_{\forall G_a} d(G_a, K(G))\cdot P(G_a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

여기에서

$P(G_a)$: G_a에 포함되는 모든 선이 정상일 확률

G_a : 식(1)에 나타나는 항(선들의 집합)에 대응되는 k-부분그래프

로 쓸 수 있으며, Satyanarayana는 [1]에서

$$d(G_a, K(G))=\begin{cases} 0, & \text{만약 } G_a\text{가 cyclic-or } \bar{k}\text{-부분그래프} \\ (-1)^{b-n+1}, & \text{만약 } G_a\text{가 acyclic k-부분그래프} \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

가 됨을 보여주었다. 여기서 b와 n은 G_a 부분그래프의 선수와 절점수 이다.

Satynarayana와 동료들은 s-t신뢰도 문제해결을 위한 모든 acyclic p-부분그래프를 찾는 알고리즘을 [2, 3, 4]에서 SAT-Problem을 위한 모든 acyclic t-부분그래프를 찾는 알고리즘을 [5,6]에서 그리고 SKT-Problem을 위한 모든 acyclic k-부분그래프를 찾는 알고리즘을 [1]에서 보여주었으며 이들 모두 결국은 Inclusion-Exclusion식의 소거되지 않는 항들을 찾는 것이다.

다음장에서는 domination의 몇가지 식과 성질을 고찰하고, 새로운 식을 유도, 증명한후 이들을 이용하여 식(3)의 증명을 간단하게 해 보이기로 한다.

3. 임의의 집합 family를 기초로 한 어떤 (부분)그래프의 domination을 계산하기위한 식들

임의의 그래프 G의 선집합 E를 기초로 구성되는 path나 k-tree 또는 cutset 등의 family와 같은 임의의 family를 기초로 하는 부분그레프들의 domination을 관찰하고 이들의 관계식을 구하여 본다.

3.1 formation와 domination의 정의

G의 어떤 임의의 부분그래프를 G_a라 하고 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_b\}$를 G의 선집합, $E_a(\subseteq E)$는 G_a의 선집합, $M(G)=\{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$을 E의 원소를 기초로 한 임의집합의 family($M_i \subseteq E$)라 하면 모든 M(G)의 subfamily집합 $\underline{M}_i=\{M_i, M_j, \cdots, M_l\}$들이

$$\bigcup_{j=i}^{l} M_j=E_a$$

인 경우 G_a의 formation이라 한다. 만약 $|\underline{M}_i|$(=$\underline{M}_i$에 포함된 M_i수)가 짝수이면 짝수 formation, 그렇지 않으면 홀수 formation이라 하고 N_e와 N_o를 짝수와 홀수 formation의 수를 나타낸다 하자. 그러면 domination $d(G_a, M(G))$는

$$d(G_a, M(G))=N_o-N_e \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

로써 정의된다. 만약 M(G)가 k-tree들의 family K(G)이라면, Ga의 domination값은 Inclusion-exclusion식에 나타나는 항중 Ga에 대응하는 선들을 갖는 항들의 부호의 합이 된다.

[예 1] one source one terminal (s-t)problem with bridge structure

절점이 4개이고 선의 집합 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$인 graph $G=(V, E)$에서 하나의 출발점 s와 도착점 t를 갖는 경우를 생각하여 보자. G의 k-tree들은 $k_1=\{1,5\}$, $k_2=\{2,6\}$, $k_3=\{1,4,6\}$, $k_4=\{2,3,5\}$ 등 4개이며 이들의 family $K(G)$는 $\{\{1,5\}, \{2,6\}, \{1,4,6\}, \{2,3,5\}\}$이다.

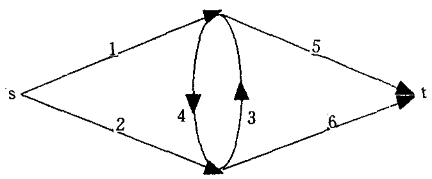

Fig. 1 A graph with bridge structure

이때 선 $\{1,2,3,4,5,6\}$을 갖는 G의 formation은 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, $\{k_1, k_3, k_4\}$, $\{k_2, k_3, k_4\}$, $\{k_3, k_4\}$ 등 4개이며, 이중 짝수와 홀수 formation이 2개씩이므로 식(4)에 의해 G의 domination은 0이 된다. 유사하게 선 3 하나가 빠진 그래프 $Ga(=G-\{3\})$은 하나만의 홀수 formation $\{k_1, k_2, k_3\}$를 갖으며, 식(4)에 의해 이의 domination은 1이다. $K(G)$를 기초로 하는 Inclusion-exclusion식에는 아래와 같이 그래프 G에 대응하는 항 $\{1,2,3,4,5,6\}$은 4번 나타나게 되며, +가 두번, −가 두번 나타나므로 상쇄되고 $\{1,2,4,5,6\}$은 +의 부호를 갖는 하나의 항이 나타난다.

$$
\begin{aligned}
R(G)&=p(\bigcup_{i=1}^{4} A_i)\\
&=\sum_{i=1}^{4} p(A_i)-\sum_{i=1}^{4}\sum_{i<j} p(A_i\cap A_j)+\cdots\\
&\quad+(-1)^{4-1}p(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\\
&=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+p(A_4)\\
&\quad-p(A_1\cap A_2)-p(A_1\cap A_3)-p(A_1\cap A_2)\\
&\quad-p(A_2\cap A_3)-p(A_2\cap A_4)-p(A_3\cap A_4)\\
&\quad+p(A_1\cap A_2\cap A_3)+p(A_1\cap A_2\cap A_4)\\
&\quad+p(A_1\cap A_3\cap A_4)+p(A_2\cap A_3\cap A_4)\\
&\quad-p(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\\
&=p(1,5)+p(1,4,6)+p(2,6)+p(2,3,5)\\
&\quad-p(1,4,5,6)-p(1,2,5,6)-p(1,2,3,5)\\
&\quad-p(1,2,4,6)-p(\mathit{1,2,3,4,5,6})-p(2,3,5,6)\\
&\quad+p(\mathit{1,2,4,5,6})+p(\mathit{1,2,3,4,5,6})\\
&\quad+p(1,2,3,5,6)+p(\mathit{1,2,3,4,5,6})\\
&\quad-p(\mathit{1,2,3,4,5,6})
\end{aligned}
$$

3.2 새로운 식의 유도

이장에서는 [8]에 언급된 coherent 시스템에 있어서의 signed domination 이론을 확장하여 다음장에 필요한 새로운 식을 유도한다.

관찰되어지는 것은 어떤 임의의 그래프 $G=(V, E)$와 G를 기초로 정의되는 임의의 집합 family $M(G)=\{M_i \mid M_i \in E\}$, $|M_i|=n$과 임의의 부분그래프 G_a이다. 여기서 G나 G_a가 $\bar{k}$-그래프이어도 상관이 없고, $M(G)$가 clutter가 아니어도 상관없다.

$M(G)$의 모든 원소 M_i에서 어떤 선들 $\underline{e}(\underline{e}\subseteq E)$를 제거한 family를 $M(G)-\underline{e}=\{M_1-\underline{e}, M_2-\underline{e}, \cdots, M_n-\underline{e}\}$로써 표시할 때 다음의 Theorem이 성립한다.

Theorem 1

$\underline{e}$가 G_a의 임의의 선집합이라 하면

$$d(G_a-\underline{e}, M(G-e)=\sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i, M(G)) \cdots\cdots (5)$$

증명 :

모든 $\underline{e}_i\subseteq\underline{e}$에 대하여 모든 부분그래프 $G_a-\underline{e}_i$에 대한 fomation들의 family를 $\boldsymbol{F}$라 하자.

정의에 의하여 $M_i(\in M(G))$와 $M_i'=M_i-\underline{e}(\in M(G)-e)$은 1 : 1로 대응하게 된다. $\boldsymbol{F}$의 임의의 한 원소 F에 대하여 F′가 F에 속한 모든 집합들 M_i에서 대응되는 집합 $M_i'=M_i-\underline{e}$로 대치하여 얻어지는 집합이라 하자. 여기서 F′는 $M-\underline{e}$를 기초로한 부분그래프 $G_a-\underline{e}_i$의 formation이고 $|F|=|F'|$이다.

즉 $M(G)$를 기초로한 부분그래프 $G_a-\underline{e}$의 fomation들과 $M(G)-\underline{e}$를 기초로한 부분그래프 $G_a-\underline{e}$ formation과는 항상 1 : 1로 대응되며, 이들은 $|F|=|F'|$와 함께 Theorem 1의 증명을 할 수 있다.

[예 2]

Fig. 1의 graph $G=(V, E)$에서 G의 선들의 임의의 부분집합 $M_1=\{1,2\}$, $M_2=\{5,6\}$, $M_3=$

$\{1,3,6\}$, $M_4=\{2,4,5\}$ 등 4개의 부분집합들로 구성되는 임의의 family를 $M(G)=\{\{1,2\}, \{5,6\}, \{1,3,6\}, \{2,4,5\}\}$라 하자. 관찰되어지는 임의의 subgraph G_a는 선 2 하나가 빠진 그래프라 하고($G_a=G-\{2\}$), subgraph G_a에 포함되는 임의의 선의 부분집합을 $\underline{e}=\{1,4\}$라 했을 때 $M(G)-\underline{e}=M(G)-\{1,4\}=\{M_1', M_2', M_3', M_4'\}=\{\{2\}, \{5,6\}, \{3,6\}, \{2,5\}\}$가 된다. 여기에서 $M(G)$를 기초로 하는 모든 $\underline{e}_i\subseteq\{1,4\}$에 대한 부분그래프 $G_a-\underline{e}_i$의 fomation의 family를 $\boldsymbol{F}$라 할때, $\boldsymbol{F}$는 $\{1,3,4,5,6\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{3,5,6\}$의 선들을 갖는 subgraph들의 formation들에 대한 집합이다. $\{1,3,4,5,6\}$을 구성하는 formation은 존재치 않으며(M_1과 M_4는 선 2를 포함하므로 $\{1,3,4,5,6\}$에 대한 formation 형성하는데 기여를 하지 못하며, M_2와 M_3모두 $\{4\}$ 포함치 않으므로 $\{1,3,4,5,6\}$를 형성할 수 없다.), $\{1,3,5,6\}$의 formation은 $\{M_2, M_3\}$하나가 존재하고, $\{3,4,5,6\}$이나 $\{3,5,6\}$을 구성하는 formation도 존재하지 않는다. 결국 $\boldsymbol{F}=\{\{M_2, M_3\}\}$이다. $M(G)-\underline{e}$를 기초로 하는 부분그래프 $G_a-\underline{e}$의 fomation의 family를 $\boldsymbol{F}$라 하면 결국 $\{3,5,6\}$의 formation의 집합은 $\boldsymbol{F}=\{\{M_2', M_3'\}\}$가 되며 F의 원소와 1 : 1로 대응하고, 결국 $\boldsymbol{F}$와 $\boldsymbol{F}$를 기초로 한 $G-\{2\}$의 domination은 둘 모두 짝수 formation 하나씩만을 포함하므로 -1이다.

Corollary 1

$|\underline{e}|=1$이면 식(5)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d(G_a-e,\ M(G))$$
$$=d(G_a-e,\ M(G)-e)-d(G_a,\ M(G)) \quad \cdots\cdots (6)$$

Theorem 2

$\underline{e}$가 G_a의 임의의 선집합이라면 다음식이 성립한다.

$$d(G_a-\underline{e},\ M(G))=d(G_a-\underline{e},\ M(G)-\underline{e}) - \sum_{\underline{e}_i\subset\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)) \quad \cdots\cdots (7)$$

$$d(G_a-\underline{e},\ M(G))=\sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)\cdot(-1)^{|\underline{e}-\underline{e}_i|} \quad \cdots\cdots (8)$$

증명 :

식(7)은 Theorem 3-1로부터 쉽게 유도되어진다.

식(8)은 $\underline{e}$의 선수에 대한 귀납법으로 증명한다.

Ⅰ. $|\underline{e}|=1$; 식(8)은 식(6)과 동일하다.

Ⅱ. $|\underline{e}|=n$일 때 식(8)이 맞는다고 귀납적 가정을 하고,

Ⅲ. $\underline{e}\cup e$에 대하여

$$d(G_a-\underline{e}-e,\ M(G)) = \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}\cup e} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)\cdot(-1)^{|\underline{e}\cup e-\underline{e}_i|} \quad \cdots\cdots (9)$$

를 증명하면 된다.

모든 $\underline{e}_i\subseteq\{\underline{e}\cup e\}$에 대하여 부분그래프들 $G_a-\underline{e}_i$를 선 e를 포함한 것들과 포함치 않은 것으로 분리하여 식(9)를 다시 쓰면

$$d(G_a-\underline{e}-e,\ M(G)) = \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)\cdot(-1)^{|\underline{e}\cup e-\underline{e}_i|}) + \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i-e,\ M(G)-\underline{e}_i-e) \cdot(-1)^{|\underline{e}\cup e-\underline{e}_i\cup e|} \quad \cdots\cdots (10)$$

이 된다. 그래프 $G_a-\underline{e}_i-e$는 G_a-e에서 n개의 선을 제거한 것과 같으므로 귀납적 가정을 사용하면

$$d(G_a-\underline{e}-e,\ M(G))=\sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)\cdot(-1)^{|\underline{e}-\underline{e}_i|} \quad \cdots\cdots (11)$$

을 얻을 수 있고 이를 식(6)을 다시 적용하면

$$d(G_a-\underline{e}-e,\ M(G)) = \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} \{d(G_a-\underline{e}_i-e,\ M(G)-\underline{e}_i-e) - d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)\}(-1)^{|\underline{e}-\underline{e}_i|}$$
$$= \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i-e,\ M(G)-\underline{e}_i-e)(-1)^{|\underline{e}-\underline{e}_i|} + \sum_{\underline{e}_i\subseteq\underline{e}} d(G_a-\underline{e}_i,\ M(G)-\underline{e}_i)(-1)^{|\underline{e}\cup e-\underline{e}_i|} \quad (12)$$

이 된다. 식(12)는 증명하려는 식(10)과 같으므로 Theorem 2의 증명은 완성된다.

지금까지 증명되었던 식들은 임의의 집합 family $M(G)$를 기초로 하였었다. 특히 $M(G)$가 최소화집합(minimize set, clutter : 즉 $M(G)^{min}$의 모든 원소들은 $M(G)^{min}$의 다른원소에 대하여 진부분집합이 아니다.)라는 제약이 없었다. 다음에는 domination의 최소화특성에 대하여 관찰하기로 한다.

$M(G)^{min}$을 $M(G)$의 최소화 집합이라 하면 다음 Theorem이 성립한다.

Theorem 3
$d(G_a,\ M(G))=d(G_a,\ M(G)^{min})$

증명 :
M(G)의 한원소인 M_j가 minimal이 아니라 하자. 그러면 M(G)에는 M_j에 포함되는 원소 M_k(즉 $M_j \supseteq M_k$)가 존재한다.

$\boldsymbol{F}$를 M(G)를 기초로한 G_a의 formation들의 family라하면 우리는 $\boldsymbol{F}$를 두개의 부분집합 $\boldsymbol{F}_1=\{F_1 \mid M_j \in F_1\}$과 $\boldsymbol{F}_2=\{F_2 \mid M_j \notin \boldsymbol{F}_2\}$로 나눌 수 있다.

이때 d_1과 d_2를 $\boldsymbol{F}_1$과 $\boldsymbol{F}_2$를 기초로 한 G_a의 domination이라 하면
$d(G_a,\ M(G))=d_1+d_2$ .... (14)
가 성립한다.

만약 어떤 formation $F_1(\in \boldsymbol{F}_1)$이 M_k를 갖고있지 않으면 M_k를 포함시켜도 $\boldsymbol{F}_1$에 존재하는 G_a의 Fomation이 되며, 반대로 M_k를 포함한 것이면 M_k를 제거해도 M_j를 포함하므로 G_a의 formation으로 남게된다. 즉 $\boldsymbol{F}_1$에 포함되는 짝수 formation과 홀수 formation의 수는 같으며 결국 $d_1=0$이 된다.

$\boldsymbol{F}_2$는 M_j를 포함치 않은 모든 formation들의 family이므로 $d(G_a,\ M(G))=d(G_a,\ M(G)-M_j)$가 되며 (14)와 함께
$d(G_a,\ M(G))=d(G_a,\ M(G)-M_j)$ .... (15)
가 성립된다. 지금까지의 과정을 모든 최소가 아닌 집합들에 대하여 반복하면 Theorem 3은 증명된다.

지금까지 3개의 Theorem을 통하여 임의의 family M(G)를 기초로 한 임의의 부분그래프 G_a의 domination성질을 알아 보았다. 다음장에서 M(G) =K(G), 즉 k-tree들의 family를 기초로 한 그래프들의 domination에 대하여 관찰하여 보고, 이를 사용하여 A. Satyanarayana의 식을 증명하여 본다.

4. A. Satyanarayana의 '새로운 topologic식'의 새로운 증명

A. Satyanarayana와 A. Prabhaker는 제일먼저 source to terminal문제에서 (s−t)Path를 사용한 경우에 어떤 p-그래프 G_a의 domination에 대한 크기는
$d(G_a,\ P(G))=$
  0 : 만약 G가 cycle를 포함한 경우
  $(-1)^{b-n+1}$: 만약 G가 acycle p-그래프이고 b개의 선과 n개의 절점을 갖는 경우
  .... (16)
임을 증명하였고[2] 그후 [3,4]를 통하여 보완되었다.

SAT-와 SKT-문제에 대하여는 [3,4]에서 발표되었으며, [5,6]에서 A. Satyanarayana와 Hagstrom는 SMT 문제에서 T(G)를 기초로한 t-그래프의 domination이 위와 비슷함을 보여주었다. 그들이 사용한 주요한 idea는

1) 만약 어떤 acyclic-not-trivial-t-그래프 G에는 항상 최소한 하나의 선 e가 존재하며, 이의 제거후 G-e는 항상 다시 acyclic t-부분그래프가 되며 G와 G-e의 domination은 서로다른 부호를 갖게 됨을 보이고,
2) cycle을 포함한 그래프에서는 formation의 family를 분할(Partition)하고 이들의 짝수와 홀수 formation의 수가 같음을 보여 domination이 0임을 증명하였다.
3) [1]에서 Satyanarayana는 SKT Problem을 위하여 K(G)를 기초로한 어떤 k-그래프의 domination 이 T(G)를 기초로한 것과 같음을 보여주었다. 여기서 T(G)는 G의 spannened tree이다.

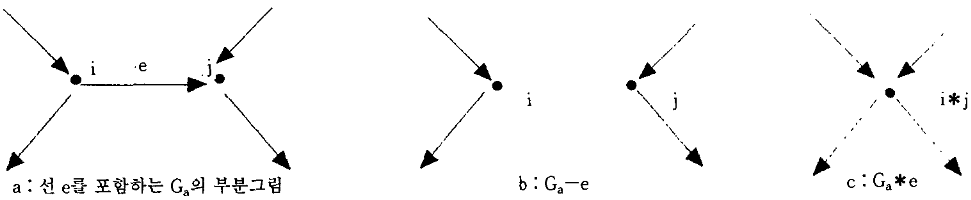

Fig. 2 Elimination and contraction of one edge e

본장에서는 앞장에서 나온 Theorem들만을 사용하여 임의의 부분그래프 G_a들의 k-tree들을 기초로 한 domination의 성질을 연구하고, 이로부터 Satyanarayana의 식(16)을 매우 간단하게 증명해 보인다.

다음장에서는 두가지의 조작(제거와 축약, elimination and contraction)에 따르는 domination의 관계를 살펴본다. G_a에서 어떤 선 e를 제거하면 G_a-e라 표현하고, 단순한 선 e의 제거를 의미한다. G_a에서 어떤 선 e를 '축약'하면 G_a*e라 표현하고, G_a*e는 선 e의 제거한후 출발점과 도착점을 묶어주는 것을 의미한다(Fig. 2 참조).

4.1 K(G)를 기초로한 그래프 G, $G-\underline{e}$, $G*\underline{e}$의 domination관계

k-tree의 family K(G)를 기초로한 어떤 부분그래프 $G_a-\underline{e}$의 domination을 관찰하여 보자.

K(G)의 k-tree들중 $\underline{e}$에 속하는 선들을 포함하는 k-tree들은 $G_a-\underline{e}$의 fomation에 참여할 수가 없다.

즉 $K(G\,|\,\underline{e})$를 $\underline{e}$에 속하는 선들을 포함하지 않은 k-tree들의 family라 한다면

$$d(G_a-\underline{e},\ K(G))=d(G_a-\underline{e},\ K(G\,|\,\underline{e})) \cdots\cdots\cdots (17)$$

가 성립한다.

$K(G\,|\,\underline{e})$에 속하는 k-tree의 합은 $\underline{e}$를 포함치 않는 k-부분그래프인 G_i를 형성하게 된다. 만약 G_i가 $\underline{e}$만 포함치 않으면 $G_i=G-\underline{e}$가 되며, 그렇지 않으면 G_i는 $G-\underline{e}$의 최대 k-부분그래프이다. 두 경우 모두 $G-\underline{e}$의 k-tree family는 $K(G\,|\,\underline{e})$이다. 만약 $K(G-\underline{e})$를 $G-\underline{e}$의 k-tree family라 표시하면

$$\begin{aligned} d(G_a-\underline{e},\ K(G)) &= d(G_a-\underline{e},\ K(G\,|\,\underline{e}) \\ &= d(G_a-e,\ K(G-e)) \cdots\cdots\cdots (18) \end{aligned}$$

가 성립하게 되며, 식(6)은 식(18)과 함께

Theorem 4

$$\begin{aligned} d(G_a-e,\ K(G)-e) &= d(G_a-e,\ K(G-e)) \\ &\quad +d(G_a,\ K(G)) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19) \end{aligned}$$

가 성립한다.

이제 출발점 s에서 출발하는 임의의 선 e를 관찰하여 보자.

G*e를 선 e를 contraction 한 그래프라 하고 이 그래프의 k-tree family를 K(G*e)로 표시하자(Fig. 3, 4 참조).

Theorem 5는 K(G*e)가 $\{k(G)-e\}^{min}$과 같음을 보여준다.

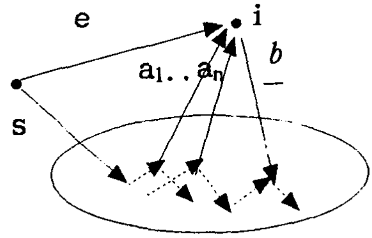

Fig. 3 A graph G with an edge e

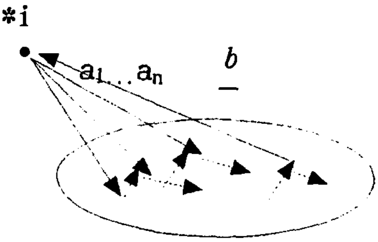

Fig. 4 Graph G*e

Theorem 5

선 e가 출발점 s에서 출발한 임의의 선이라 할때

$$K(G*e)=\{k(G)-e\}^{min} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

이 성립한다.

증명 :

V_e : e의 도착 절점

K_i : 그래프 G의 임의의 k-tree, 즉 $K_i \in K(G)$이다.

K_i-e : 선 e를 제거한 K_i-tree 즉 $K_i-\{e\}$, $K_i-e \in \{K(G)-e\}$

K_i*e : K_i를 선 e에 관해 contraction한 k-tree

K_i^* : K(G*e)에 속하는 k-tree

정의에 의하여 K_i와 K_i-e는 G의 부분그래프이고 K_i*e와 K_i^*는 G*e의 부분그래프이다.

Theorem 5는 다음의 두단계로 증명되어질 수 있다.

A. $\forall K_i : \exists K_i^* \mid K_i-e \supseteq K_i^*$ 즉 그래프 G의 모든 k-tree에 대하여 그래프 G*e에서는 $K_i-e \supseteq K_i$

*의 관계가 성립하는 어떤 k-tree K_i^*가 존재한다.

B. $\forall K_i^* : K_i^* \in \{K(G)-e\}$ 즉 그래프 $G*e$의 모든 k-tree들은 $\{K(G)-e\}$의 원소이다.

A. K_i는 G 상에서 모든 도착점의 집합 V_k에 도착하는 선들을 포함한 부분그래프이다. V_k에 속한 절점들은 K_i에 속한 선들에 의해 s로부터 도착되어 질 수 있으며, K_i에 속하는 선들은 이를 위해 모두 필요하다. 선 e의 contraction 이후도 s는 K_i*e만으로도 모든 V_k에 연결되어 진다. 결국 K_i*e는 항상 하나의 k-tree K_i^*를 포함하며 K_i-e와 K_i*e는 같은 선집합이므로 K_i-e는 항상 $G*e$의 하나의 k-tree를 포함한다.

B. $\underline{b}=O_e$(절점 V_e서 출발하는 선들)라 하자. K_i^*의 선집합는 다음과 같이 disjoint인 두개의 부분집합으로 나눌 수 있다.

B_b : $\underline{b}$로 시작되는 모든 path에 속하는 선들

B_r : B_b에 속하지 않는 선들

여기서 도착점집합 V_k역시

V_b : B_b에 속하는 선들로 도착되어지는 도착점들의 집합

V_r : $=V_k-V_b$

로 나눌 수 있다.

만약 $B_b \neq \{\ \}$이면 K_i^*에 대응하는 k-tree K_i를 선 e를 삽입함으로서 얻을 수 있게 된다. $\{K(G)-e\}^{min}$에서 K_i-e의 진부분집합이 존재할 수 없고, K_i-e와 K_i*e의 선집합이 같으므로 결국 $K_i^*=B_b \cup B_r \in \{K(G)-e\}^{min}$이다.

만약 $B_b=\{\ \}$인 경우 V_b 역시 공집합이 되며 V_r에 포함되는 모든 출발점이 포함되며 K_i^*가 s와 V_k를 모두 연결시키므로 역시 선 e를 K_i^*에 삽입함으로써 K_i를 얻게되며 결국 $K_i^* \in \{K(G)-e\}^{min}$을 만족시킨다. K_i^*이 graph G의 K-ree가 되며 A.와 B.에 의하여 Theorem 5는 증명되었다.

식(19)는 Theorem 3,5와 함께 e가 출발점이 s인 임의의 선이라면

$$d(G_a-e,\ K(G*e))=d(G_a-e,\ K(G-e) +d(G_a,\ K(G)) \quad \cdots\cdots (21)$$

가 성립한다.

[2]에서는 p-선를 다음과 같이 정의하였다 : 어떤 p-그래프의 선 e는 그의 제거로 생성되는 부분그래프가 p-성질을 갖게 되면 p-선라 한다.

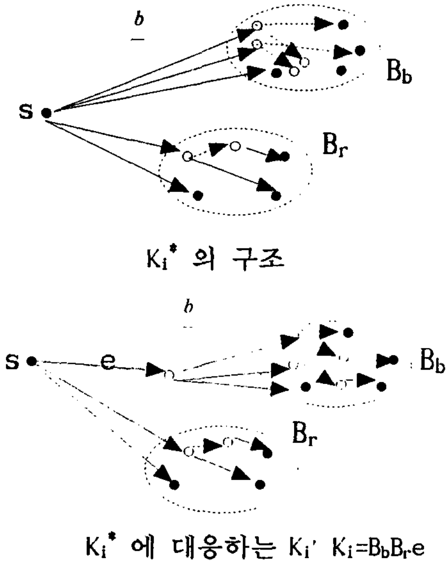

Fig. 5 An example for proof of B

하지만 우리는 여기서 p-선를 다음과 같은 뜻으로 이해하고저 한다.

만약 어떤 (sub)그래프 G_a에서 선 e의 출발점의 outdegree가 2 이상이고 도착점의 indegree가 2 이상이면 선 e는 G_a 상에서 p-선이다.

만약 어떤 그래프 G가 trivial-t-그래프 G이면 절점의 수 n은 선의 수 b보다 하나 더 많으며 k-tree는 하나만 존재한다. 반대로 어떤 그래프 G가 not-trivial-t-그래프 G이면 선의 수 b는 절점의 수 n보다 같거나 많으며 최소한 하나의 p-선 e가 존재한다.

Theorem 6

출발점이 s인 임의의 선을 e라 할때

$$d(G_a,\ K(G)) = \begin{cases} -d(G_a-e,\ K(G-e)), & \text{만약 e가 p-선이면} \\ d(G_a-e,\ K(G^*e)), & \text{만약 e가 } \bar{p}\text{-선이면} \end{cases}$$

증명 :

e의 도착절점을 V_e라 하자.

1) e가 p-선인 경우 그래프 $G_{\underline{a}}$는 e이외의 V_e를 도착점으로 하는 선들 a를 갖게된다. $\underline{a}$들은 e의 contraction 후 절점 s에 직접 도착하게 되며 이들은 $K(G*e)$에 나타나지 않는 선들이므로 결

국 식(21)의 왼쪽항 $d(G_a-e, K(G*e))$은 0이 된다.

2) e가 $\bar{p}$-선인 경우 다음과 같이 두 경우로 나눌수 있다.

① s의 outdegree가 1인 경우
모든 k-tree들은 선 e를 함유하므로 식(18)에서 $K(G|\bar{e})=K(G-e)=\{\ \}$이 되며 결국 $d(G_a-\underline{e}, K(G-\underline{e}))$는 0이 된다.

② V_e의 indegree가 1이고 s의 outdegree가 2 이상인 경우
V_e에서 출발하는 선들은 G−e상에서 s로부터 연결되지 못하므로 이들은 K(G−e)에 포함되지 않는다.

결국 2)의 경우 식(4-3)의 오른쪽 첫항은 0이 된다.

4.2 topologic formel의 재증명

A. Satyanarayana와 다른이들은 결국 다음의 식 하나를 제시하기 위하여 [1-9]에서 많은 노력을 들여서 그래프의 topologic성질들을 규명하였다. 본장에서는 전장에서 증명된 몇가지의 식을 사용하여 매우 간단하게 증명함으로서 본논문에서 증명된 식의 강력함과 이식의 응용가능성 등을 제시하고저 한다.

Theorem 7

$d(G, K(G))=$
0 : G가 $\bar{k}$-그래프인 경우(1)
0 : G가 cyclic그래프인 경우(2)
$(-1)^{b-n+1}$: acyclic k-그래프인 경우(3)

증명 :

1) $\bar{k}$-그래프인 경우; $\bar{k}$-선이 존재하며 이들은 K(G)에 포함되지 않는다. 즉 G의 formation이 존재치 않으므로 $d(G, K(G))=0$이다.

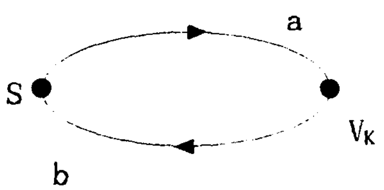

Fig. 6 A cyclic graph with two edges and two nodes

2) G가 cyclic 그래프인 경우 :
선수에 따른 Induction 증명을 사용한다. cycle을 형성하기위하여는 최소한 두개의 선이 필요하므로 선 2개를 갖는 k-그래프 부터 관찰한다.

① b=2
선 b는 $\bar{p}$-선이므로 $d(G, K(G))=0$이다.

② b=m인 경우 $d(G_m, K(G_m))=0$이라 가정하자. 이때 G_m은 선의 수가 m인 임의의 그래프이다.

③ b=m+1인 경우 : G_{m+1}을 m+1개의 선을 갖는 그래프라 하고, s에서 출발한 임의의 선을 e라 하자. 만약 G_{m+1}이 $\bar{k}$-그래프이면 (1)에 의하여 domination이 0이 되므로 k-그래프인 경우만을 관찰한다.

ⅰ) e가 p-선인 경우
Theorem 4에 의하여 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1}))=-d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}-e))$이고, $G_{m+1}-e$는 m개의 선을 갖는 그래프이다. e의 제거로 인한 cycle의 제거는 일어날 수 없으므로(e의 출발점인 s에 도착되는 선이 존재하면 $\bar{k}$-그래프이므로 e를 포함한 cycle이 존재할 수 없으므로) Induction 가정(②)에 의하여 결국 오른쪽 항 $d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}-e))$은 0이 된다.

ⅱ) e가 $\bar{p}$-선인 경우
Theorem 4에서 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1}))=d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}*e))$이고, e의 contraction후에도 여전히 $G_{m+1}*e$은 cycle을 포함하고 m개의 선을 갖는 그래프이므로 가정 ② 에 의하여 오른쪽 항 $d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}-e))$은 0이 된다.

3) G가 acyclic k-그래프인 경우 :
이 경우 역시 선수에 따른 Induction 증명을 사용한다.

① b=1; 출발점과 도착점 하나씩만 존재하므로 n=2며 이 그래프는 k-tree 하나를 갖는다. G 의 formation 역시 하나이고 이는 하나의 k-tree로 구성되므로 홀수 formation이며, 결국 domination 값 1을 갖으므로, $d=(-1)^{1-n+1}=1$과 같다.

② b=m이고 절점수가 n인 경우 $d(G_m, K(G_m))=(-1)^{m-n+1}$이라 가정하자.

③ b=m+1이고 절점수가 n인 p-acyclic 그래프

G_{m+1}을 관찰하자. 출발점에서 출발한 임의의 선을 e라 하면 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

i) e가 p-선인 경우
Theorem 6 에 의하여 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1})) = -d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}-e))$이고, $G_{m+1}-e$는 m개의 선을 갖는 그래프이다. e가 p-선이므로 $G_{m+1}-e$ 역시 k-그래프 이고, e의 제거로 인한 cycle의 생성은 일어날 수 없으므로 Induction 가정 ② 에 의하여 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1})) = -d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}-e)) = (-1)^{m+1-n+1} = (-1)^{b-n+1}$이 된다.

ii) e가 $\bar{p}$-선인 경우
Theorem 4에서 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1})) = d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}*e))$이고, e의 contraction으로 생성되는 $G_{m+1}*e$은 m개의 선과, $n-1$개의 절점을 갖는 acyclic p-그래프이므로 Induction 가정 ② 에 의하여 $d(G_{m+1}, K(G_{m+1})) = d(G_{m+1}-e, K(G_{m+1}*e)) = (-1)^{b-n+1}$이 된다.

5. 결 론

어떤 그래프에서 선의 부분집합들을 기초로한 임의의 family M(G)에 대한 몇개의 domination 관계식을 유도하였고 M(G)=K(G)일 때 나타나는 특성을 연구하여 몇가지 식을 얻었다. K(G)를 기초로한 어떤 그래프 G나 그들의 부분그래프의 domination값을 쉽게 구할 수 있는 topologic formel[1]을 쉽게 증명하였다.

앞으로는 본 연구에서 증명된 식들(5,6,7,8)을 사용하여 아직까지 연구되지 않은 cutset들의 family를 기초로 한, 즉 M(G)=C(G)인 경우의 domination의 연구와 이를 이용한 신뢰도계산의 빠른 알고리즘에 대한 연구, 또는 non-linear그래프나 fault tree에서의 신뢰도 분석 응용연구 등이 있다 하겠다.

참 고 문 헌

1) A. Satyanarayana, A unified Formula for Analysis of Some network Reliability Problems, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-31, No. 1, pp. 23~32, April, 1982.
2) A. Satyanarayana and A. Prabhakar, New Topological Formula and Rapid algorithm for Reliability Analysis of Complex networks, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-27, pp. 82~100, June, 1978.
3) R. R. Willie, A Theorem Concerning Cyclic Directed graphs with Applications to network Reliability, *networks*, Vol. 10, pp. 71~78, 1980.
4) A. Satyanarayana, A. Prabhaker, Comments on New topological formular and rapid algorithm for reliability analysis of Complex networks, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-28, p. 264, August, Oct., 1979.
5) A. Satyanarayana, J. N. Hagstrom, A New algorithm for the Reliability Analysis of Multi-Terminal networks, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-30, pp. 325~334, Oct., 1982.
6) A. Satyanarayana, J. N. Hagstrom, Combinatorial Properties of Directed graphs Useful in network Reliability, *networks*, Vol. 11, pp. 357~366, 1981.
7) J. A. Buzacott, A Recursive algorithm for Directed-graph Reliability, *networks*, Vol. 13, pp. 241~246, 1983.
8) A. Agrawal and R. E. Barlow, A Survey of network Reliability and domination Theory, *Operations Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 478~491, May~June, 1984.
9) A. Agrawal and A. Satyanarayana, An O(| E |) Time algorithm for Computing the Reliability of a Class of Directed networks, *Operations Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 493~515, May~June, 1984.
10) J. S. Provan and M. O. Ball, Computing network Reliability in Time Polynomial in the Number of Cuts, *Operations Research*, Vol. 32, No. 3, pp. 516~526, May~June, 1984.
11) A. Agrawal and A. Satyanarayana, network

Reliability Analysis Using 2-Connected Digraph Reductions, *networks*, Vol. 15, pp. 239 ~256, 1985.

12) R.k. Wood, A Factoring algorithm Using Polygon-to-Chain Reductions for Computing k-Terminal network Reliability, *networks*, Vol. 15, pp. 173~190, 1985.

13) T. Politof and A. Satyanarayana, network Reliability and Inner-Four-Cycle-Free graphs, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 11, No. 3, pp. 484~505, 1986.

14) T. Politof and A. Satyanarayana, Efficient algorithms for Reliability Analysis of Planar networks-A Survey, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-35, No. 3, pp. 252~259, August, 1986.

15) R.k. Wood, Factoring algorithms for Computing k-Terminal network Reliability, *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-35, No. 3, pp. 269 ~278, August, 1986.

16) J.A. Buzacott, Node Partition Formula for Directed graph Reliability, *networks*, Vol. 17, pp. 227~240, 1987.

17) T. Politof, On a Property of Cyclic Covers of p-graphs, *networks*, Vol. 18, pp. 51~53, 1988.

18) A. Satyanarayana and M.k. Chang, network Reliability and the Factoring Theorem, *networks*, Vol. 13, pp. 107~120, 1983.

19) M.N.S. Swamy, k. Thulasiraman, graphs, networks and algorithms, Chapter 5, Willey-Intersceince, 1981.

20) F. Harary, *graph Theory*, Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1969.