Historia Mathematica Vol. 9, No. 2 (1996), 54 - 57.

코시의 무한소 개념에 대해서[1)]

Nigel Cutland, Christoph Kessler, Ekkehard Kopp and David Ross
영동공과대학 이 무 현

19세기에 나온, 해석학에 관한 수학 저술들은 연속체(continuum)에 대한 코시(Cauchy)의 개념을 많이 논하고 있다. 특히 코시의 무한소 개념의 본성에 대해서 논하고 있다. 존 클리브와[1972] 라카토스는[1978] 코시의 '동적인' 무한소 개념을 비표준 실수 모형에서 구현할 수 있다고 주장해 이 논쟁에 부채질을 했다. 클리브는 코시의 무한소를, 0으로 가는 수열의 무한 정수에서의 값이라고 해석했다. 어떤 무한소 $x\in{}^{*}R$ 에 도달할 수 있다는 말은, 0으로 가는 수열 s_n(즉, $s_n\to 0$) 이 있어서 어떤 무한 M 에 대해서 $x=s_M$ 이 된다는 뜻이다.(클리브 [1972] 참조)

클리브는 모든 무한소에 도달할 수 있는 어떤 비표준 실수 모형 ${}^{*}R$ 이 있다고 주장했다.(정리 5) 그의 증명을 보면, 그는 D 가 N 의 비주 극필터(non-principal ultrafilter)이면서 ${}^{*}R$ 가 울트라파워 R^N/D 일 때 그렇게 된다고 주장했다.

우리는 이 논문에서, D 가 특별한 종류의 극필터인 경우에 그리고 그경우에만 그의 주장이 옳음을 보이겠다. 즉, P-point 인 경우(아래에서 정의함)에만 그렇게 됨을 보이겠다. 컨티눔 가설이나 마틴의 공리(Martin's Axiom)를 채택하면, P-point 가 존재함을 보일 수 있다. 그러나 모든 극필터들이 P-point 인 것은 아니다. 그러므로 컨티눔 가설이나 마틴의 공리를 채택하면 클리브의 정리는 사실이 되지만, 좀더 조심스럽게 증명해야 한다. 반면에, P-point 가 없다는 명제와 집합론의 공리들(ZFC)은 서로 상충하지 않는다. 이 문제는 제크의 책[1978] pp. 257 - 8 에 다루어 놓았다. 그러므로 집합론의 공리들을 택하더라도, 모든 무한소들에 도달할 수 있는 R^N/D 모형이 있음을 증명할 수는 없다.

정의 : N 에 대한 극필터 D 가 P-point 라는 말은, $N=\bigcup_{n\in N}X_n$ 이 서로 만나지 않는 합인 경우, 어떤집합 $A\in D$ 가 있어서, 어떤 n에 대해서 $A\subseteq X_n$ 이거나 또는 모든 n에

1) 이글은 영국에서 출판된 Brit. J. Phil. Sci. 39(1988). 375-378 를 번역한 논문이다.

대해서 $A-X_n$ 이 유한임을 뜻한다.
다음은 쉽게 증명할 수 있다.

보조정리 : D 가 P-point 인 것과 다음은 동치이다 : $x=[(x_n)]\approx 0$ 이면, 어떤 $A\in D$ 가 있어서, A 상에서 $x_n \to 0$ 이다.
(여기서 $[(x_n)]=\{(y_n)\in R^n : (x_n)\equiv(y_n)\}$. $(x_n)\equiv(y_n)$ 이라는 말은 $\{n: x_n=y_n\}\in D$.
그리고 $x\approx 0$ 이라는 말은 x가 무한소라는 뜻임.)
이제 다음을 증명할 수 있다.

정리 : D 가 P-point 이면 R^N/D 의 모든 무한소들에 도달할 수 있으며, 또한 그 역도 성립한다.

증명 : 먼저, D가 P-point 라고 가정하자. 그리고 $x=[(x_n)]\approx 0$ 이라고 하자. 집합 $A\in D$ 를 앞의 보조정리와 같이 잡아서, A 상에서 $x_n\to 0$ 이 되도록 해라. (s_n) 을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n=\begin{cases} x_n, & x\in A \text{ 인 경우} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

그러면 (s_n) 은 0으로 가는 수열이며, $w=[(1,2,3,\cdots)]$ 에 대해서 $x=s_w$ 이고, w 는 무한대임이 명백하다. 역으로, R^N/D 에 있는 모든 무한소들에 도달할 수 있다고 하자. $x=[(x_n)]\approx 0$ 이라 하자. 그러면 어떤 집합 $A\in D$ 상에서 $x_n\to 0$ 임을 보이겠다.
$y_n=x_n+a_n$ 이라 놓아라. 여기서 (a_n) 은 $a_n\to 0$ 이면서 $n\neq n'$ 이면 $y_n\neq y_{n'}$ 이도록 잡아라. 그러면 $y=[(y_n)]\approx 0$ 이니, 어떤 0으로 가는 수열 (s_n)에 대해서 $y=s_M$ 이다. 그러므로 어떤 $A\in D$ 가 있어서, $n\in A$ 에 대해서 $y_n=s_{m_n}$ 이다. 만약 $n, n'\in A$ 이고 $n\neq n'$ 이면, $m_n\neq m_{n'}$ 이다. 따라서 A 상에서 $m_n\to\infty$ 이며, 따라서 A 상에서 $y_n(=s_{m_n})\to 0$ 이다. 그러므로 A 상에서 $x_n\to 0$ 이며, 따라서 D 는 P-point 이다.
이 증명은 P-point 에 대한 다음 성질을 암시하고 있다.

따름정리 : $w=[(1,2,3,\cdots)]$ 이라 하자. 그러면 D 가 P-point 라는 것과, R^N/D 에 있는 모든 무한소들이 어떤 0으로 가는 수열 (s_n) 이 있어서 s_w의 형태로 되어 있다는 것이 동치이다.

참조 :

(i) 코시의 무한소의 본질에 관한 역사적 관심은 그가 1821년에 출판한 유명한 논문 Course d'Analyse 에 들어있는 실수(mistakes)에 초점을 맞추고있다. 연속인 함수들

이 수렴하면 그 극한도 연속이 된다는 그의 주장이 특별한 관심을 불러 일으켰다. 아벨(1826)과 다른 사람들이 푸리에 급수를 써서 만든 반례들을 코시는 처음에는 무시하였고 스토크스(Stokes, 1847)와 지델(Seidel,1848)이 평등수렴의 개념을 써서 이와

비슷한 결과들을 발표하고 난 이후에, 코시[1853]는 자신의 정리에 약간의 제약이 따른다고만 시인했기 때문이다. 코시의 논문은 스토크스나 지델의 결과들을 언급하지 않고 있으며, 연속체(continuum에 대한 그의 개념이 바이어스트라스의 개념과 같다면, 그가 약간 수정한 정리는 뭘 주장하는지 분명치가 않다. 로빈슨(Abraham Robinson, 1966)은 코시의 원래 '정리' (original theorem)에 대하여 비표준 해석학의 관점에서 최초로 형식화 하면서 다루었다. 코시의 연속체를을 비표준 실수 $^*R$ 과 동일시하여 다루었다. 라카토스(Imre Lakatos, 1978)는 코시의 논문이 훨씬 더 '동적인' 연속체 개념을 제시하고 있음을 지적했다. 코시는 $(1/n)$ 처럼 "움직이는 점" 들도 무한소의 개념에 포함시켰다. 그의 정리에 대한 반례들이 실패하는 경우는 바로 이런 점들이라고 코시는 주장했다.(스팔트[1983] 참조) 클리브가 쓴 논문의[1972] 목적은, $^*R$ 라는 틀에서 코시의 정리를 엄밀하게 기술하고 증명할 수 있다는 주장을 상세하게 설명하는 것이었다. 코시의 정의에 따르면, 무한소의 개념은 '변화하는 양'에 종속되어 있다.(클리브가 그의 논문에서[1979] 보였듯이, 변화하는 양은 1920년대에 이르기까지 해석학 교과서들의 주제로 남아 있었다.)

"변화하는 양이라고 말할 때, 우리는 앞에서와 마찬가지로 값이 차례차례 약간씩 약간씩 바뀌어 값이 서로 다른 경우를 생각한다."

"차례차례 값이 변화하여 그 값이 한없이 줄어들 때, 즉 그게 모든 주어진 값보다도 더 작아진다면, 그 변수는 한없이 작아진다고 말한다. 또는 그 양을 무한소라고 부른다. 이런 종류의 변수들은 0을 극한값으로 가진다."(코시 [1821] p.4)

이러한 것들을 고려하여, 클리브는 '도달할' 수 있는 무한소라는 정의를 도입하였으며, 도달할 수 있는 무한소들만을 지닌 비표준 모형을 찾으려고 했다.

(ii) 만약 D 가 P-point 가 아니라면, 모든 $A \in D$ 에 대해서 A 상에서 $s_n \neq 0$ 인 무한소 $[s]$ 를 찾을 수 있음이 확실하다. 클리브는 코시의 무한소 개념을 R^N/F 를 바탕으로(F 는 N 상의 프레셰 필터) 엄밀하게 구성할 수 있다고 말했지만, 이것은 그걸 반박하고 있다.

(iii) 코시의 증명에 대한 클리브의 분석은 위의 고려와 아무런 상관이 없다. 클리브의 c-convergence의 정의가 바로 코시가 의도한 것이라고 받아들이면, 코시는 c-convergence 수열의 한 점 x_0 의 무한히 작은 근방에만 제한해서다루는 기술을 쓰기때문에(클리브가 증명했듯이, 이 경우 바이어스트라스의 용어로는 "평등수렴 점" 이 된다.), 지델의 결과보다 좀더 일반적인 결과들을 증명할 수 있다. 다루는 구간이 컴팩트인 경우 두 (바이어스트라스) 개념은 일치하게 된다.

참고문헌

[1]. Cauchy, A. [1821] : *Cours d'Analyse*, Paris.

[2]. Cauchy, A. [1853] : Note sur les series convergentes, etc. *Comptes Rendus*. 36, pp.456-9; Oeuvres (Ser. 1) vol. 12, pp. 30-36.

[3]. Cleave, J. P. [1972] : 'Cauchy, Convergence and Continuity' ; *The British Journal for the Philosophy of Science*, 22, pp.27-37.

[4]. Cleave, J. P. [1979] : 'The concept of variable in nineteenth century analysis' ; *The British Journal for the Philosophy of Science*, 30, pp.266-77.

[5]. Jech, T. [1978] : *Set Theory*, Academic Press, N.Y.

[6]. Lakatos, I. [1978] : 'The Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics' in : Imre Lakatos : *Philosophical Papers*, Volume 2. C.U.P.

[7]. Robinson, A. [1966] : *Nonstandard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

[8]. Spalt, D. [1983] : 'Eine langst fallige, wenngleich unnotige Rehabilitation Cauchys' ; *Mathematikunterricht*, 4, pp. 60-75.

거대한 수학체계는 자연수체계를 꼭지점으로 해서 교묘하게 균형을 잡고 있는 뒤집혀진 거대한 피라미드와 같은 형상을 하고 있다는 사실이 밝혀졌다.

- Howard Eves, *Great Moments in Mathematics*(1981)

수학의 주요한 목적이 대중적인 쓰임새이고 자연 현상에 대한 설명이라는 푸리에의 주장은 옳다. 그러나 그와같은 생각을 가진 철학자는 과학의 특유한 목적이 인간 정신에 대한 존경임을 알아야만 하며, 이런 견지에서 수론의 문제는 우주에 대한 문제만큼 가치 있음을 알아야만 한다. - Jacobi