Journal of Historia Mathematica Vol. 9. No. 1, (1996), 40 - 41.

사인과 코사인의 미분

영동공과대학교 **이 무 현**

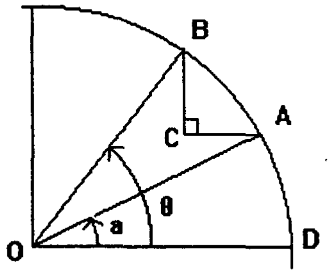
뉴턴과 라이프니츠가 미분을 처음 개발했을 때는 '변수가 한없이 작게 변화할 때 함수값과 변수의 변화율'이라는 개념을 썼다. 그러나 당시는 극한의 개념이 엄밀하지가 않았으며, 19세기에 바이어슈트라가 입실론, 델타를 도입하여 극한의 개념을 정립하였다. 그 덕분에 미분과 적분이 크게 발달하기는 하였지만, 이런 엄밀성은 미분을 너무 수식화, 형식화하여 '함수값과 변수의 변화율'이라는 미분의 원래 뜻에서 오히려 멀어지게 만들었다.

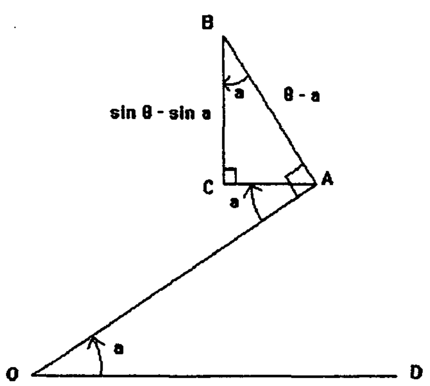
사인과 코사인을 미분하는 것도 그런 예이다. 우리 주위의 모든 수학책들은 사인을 미분할 때 삼각 함수의 덧셈, 뺄셈 공식을 써서

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

라 바꿔서 계산을 한다. 그러나 이런 방식은 학생들에게 "미분이란 어떤 복잡한 공식이다." 라는 인상을 주며, 변화 비율이라는 원래의 뜻을 깨닫지 못하게 한다. 그러니 뉴턴과 라이프니츠가 생각한 미분의 개념을 써서 사인과 코사인을 미분해 보자.

라디안을 써서 각을 표시하면, 반지름이 1인 원 위를 어떤 점이 움직일 때 기준점 $(0, 1)$에서 그 점이 움직인 거리가 변수 θ이고, 그 점의 높이는 $y = \sin\theta$이며, 그 점의 가로 위치는 $x = \cos\theta$이다. 각이 a인 점이 고정되어 있다고 하고, 변수 θ가 a에 한없이 가까이 갈 때 변수 θ와 함수 $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$들간의 변화율을 구해 보자.





우선 θ, α가 둘 다 1 사분면에 있다고 하고 $\theta > \alpha$라고 하자. 점 $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$에서 수평으로 선을 긋고, 점 $B = (\cos\theta, \sin\theta)$에서 수직으로 선을 그어서, 두 선이 만나는 점 $C = (\cos\theta, \sin\alpha)$를 잡아라. 그러면 그림처럼 삼각형 ABC가 생긴다. 물론 이 삼각형에서 변 AB는 직선이 아니라 원둘레 곡선이니 엄밀한 의미에서는 삼각형이 아니다. 그러나 미분을 구하기 위해서 θ가 α에 한없이 가깝다고 생각하면 변 AB는 사실상 직선이 된다.

θ가 α에 한없이 가까이 갔다고 하면, 삼각형 ABC는 한없이 작은 직각 삼각형이 된다. 각 AOD의 크기는 α이고, 각 OAC는 각 AOD와 엇각이니 역시 크기가 α이다. 각 ABC와 각 CAB를 더하면 직각이 된다. 그런데 각 OAB가 직각이니, 각 ABC와 각 OAC는 크기가 같다. 즉, 각 ABC의 크기는 α이다.

사인 함수를 미분하기 위해서, 이 때 사인 함수와 변수의 변화율을 구해 보면, 변수는 AB만큼 변했고 사인 함수는 CB만큼 변했다. 즉,

$$\text{사인 함수의 변화율} = \frac{CB}{AB}.$$

그런데 한없이 작은 직각 삼각형 ABC에서 각 B의 크기는 α이니, 위의 비율은 바로 $\cos\alpha$가 된다. 즉,

$$\text{사인 함수의 변화율} = \frac{CB}{AB} = \cos\alpha.$$

코사인 함수를 미분하기 위해서, 이 때 코사인 함수와 변수의 변화율을 구해야 하는데, 변수는 AB만큼 변했고 코사인 함수는 AC만큼 값이 줄었으니,

$$\text{코사인 함수의 변화율} = -\frac{CA}{AB}.$$

그런데 한없이 작은 직각 삼각형 ABC에서 각 B의 크기는 α이니, CA와 AB의 비율은 바로 $\sin\alpha$가 된다. 즉,

$$\text{코사인 함수의 변화율} = -\frac{CA}{AB} = -\sin\alpha.$$

θ가 α보다 더 작거나 또는 θ, α가 다른 사분면에 있을 때에도 마찬가지 방법으로 보일 수 있다. 따라서 $(\sin\theta)' = \cos\theta$ 이고 $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ 이다.

참고문헌

1. Isaac Newton, Principia, Vol. I pp.32-52, University of California Press, 1934