

沿岸 海水流動에 관한 3次元 亂流模型의 比較評價 Comparative Evaluation of Three-dimensional Turbulence Models in Coastal Region

鄭 泰 成*

Tae Sung Jung*

要 旨 : 沿岸 海水流動에 관한 3차원 數值模型의 적용에서 鉛直 渦粘性係數의 精確한 산정은 매우 중요하다. 본 연구에서는 연안 해수유동 계산시 널리 사용되고 있는 연직 와점성계수 算定方法들을 定常 開水路 흐름과 非定常流인 潮流의 해석에 적용하여 水理實驗資料와 比較評價하였다. 계산결과에 의하면, 정상류에 대해서는 비교된 모든 모형이 實驗値와 대체로 일치하는 양호한 결과를 보였다. 그러나, 비정상류인 潮流에 대해서는 亂流 輸送方程式을 해석하는 2-방정식과 1-방정식 난류모형들은 대체로 실험치와 일치하는 결과를 주었으나, 0-방정식 모형은 亂流의 輸送現狀을 제대로 고려하지 못하여 位相에서 실험치와 많은 차이를 보였다.

Abstract □ In estuarine 3-dimensional numerical modeling, it is very important to calculate vertical eddy viscosity accurately. Various turbulence models employing eddy viscosity concept were applied to the steady flow in an open-channel and the tidal flow in long tidal channel and compared. The evaluations include the verification tests against experimental data sets for steady and tidal flows. The simulation results have shown that the compared models are in good agreements with experimental data of steady flow while only $k-\epsilon$ model, $k-l$ model, and 1-equation model with well-defined mixing length profile give good agreements with experimental data of tidal flow.

1. 序 論

沿岸海域에서 물의 流動 및 물질의 擴散을 解析하기 위한 방법으로 數值模型이 널리 사용되고 있으며, 최근에는 전산기의 計算能力이 향상됨에 따라 2次元 模型에 비하여 3次元 模型의 사용이 급속히 증가하고 있다. 이러한 원인은 淺水方程式을 支配方程式으로 하는 平面 2次元 模型은 水面變位는 비교적 精確히 계산할 수 있으나 流速의 鉛直分布와 水面과 바다 境界層의 分布特性을 제대로 표현할 수 없기 때문이다. 특히 沿岸 環境問題와 관련된 水理學의 問題인 汚染物質 擴散과 堆積物의 移動·擴散 問題와 관련하여 흐름의 3차원 分布特性은 매우 중요하다.

그러나, 3차원 모형의 사용은 2차원 모형에 비하여 비싼 계산비용과 많은 시간을 투자하여야 결과를 얻을

수 있으며, 2차원 모형에서는 나타나지 않는 鉛直層間의 內部 摩擦項(Reynolds 응력항)의 처리에 대한 추가적인 문제점을 안고 있다. 계산시간의 증가문제는 날로 증가하는 전산기 계산능력의 향상으로 극복될 것으로 보인다. 3차원 모형의 계산결과는 내부 마찰항 즉 鉛直擴散의 산정방법에 따라 크게 영향을 받으며, 이를 위하여 많은 방법들이 사용되어 왔다. 亂流에 의한 연직확산 즉 Reynolds 응력항을 계산하기 위하여 Boussinesq 근사에 의해 渦粘性係數의 개념을 도입한 다음과 같은 방법들이 널리 사용되고 있다. 3차원 모형의 초기에는 연직 와점성계수로 상수를 사용하는 방법이 널리 사용되어 왔으며, 이러한 방법은 현실과 거리가 있는 포물선형의 流速分布를 산정하는 것으로 알려져 있다. 따라서, 흐름 특성과 연관지어 亂流擴散을 나타내려는 방법들이 개발되어 流速, 剪斷, 水深, 혼합

*韓南大學校 土木工學科 (Department of Civil Engineering, Hannam University, Daejeon 306-791, Korea)

길이 등의 函數(Bowden *et al.*, 1959; Jin and Kranenburg, 1993)로 표현하여 왔다. 또한, Prandtl의 혼합거리 개념은 함수형태의 와점성계수 산정식(Sheng *et al.*, 1989; 이·정, 1996)을 제공하며, 이와 같은 방법들을 0-방정식 亂流模型이라고 한다. 그러나, 이와 같은 방법들은 시간에 따른 亂流의 輸送過程을 단순히 平均流와 연관지어 해석하는 방법으로 亂流의 擧動을 평균류에 의하여 나타낼 수 없는 흐름에 대해서는 誤差를 야기할 수 있다. 이에 따라 亂流의 輸送方程式을 직접 해석하여 와점성계수를 구하는 모형이 개발되었다. 난류 운동에너지 수송방정식의 해석결과와 정의한 혼합거리에 의해 와점성계수를 구하는 방법인 1-방정식 난류모형(Liu and Leendertse, 1979; Smith and Takhar, 1981), 난류 운동에너지와 혼합거리에 대한 수송방정식들을 해석하여 와점성계수를 구하는 $k-l$ 난류모형(Mellor and Yamada, 1982), 난류 운동에너지와 난류 운동에너지의 減衰率에 대한 수송방정식들을 해석하는 $k-\epsilon$ 난류모형(Rodi, 1984)이 있다. $k-l$ 모형과 $k-\epsilon$ 모형은 2개의 亂流 輸送方程式을 해석한다고 하여 2-방정식 난류모형으로 불리운다. 이 외에 와점성계수의 개념을 도입하지 않고 Reynolds 응력항을 직접 해석하는 Reynolds 응력 난류모형(Rodi, 1984)이 있다. 난류모형에 대해서는 ASCE Task Committee의 논문(ASCE, 1988)에 잘 정리되어 있다.

위와 같이 여러가지의 鉛直 渦粘性係數 算定方法들이 제시됨에 따라 沿岸 海水流動의 연구에 적합한 난류모형을 찾기 위하여 난류모형들의 特性에 대한 比較研究가 수행되어 왔다. 연안 해수유동 계산에 적합한 0-방정식을 찾기 위한 연구가 수행되어 Tee(1979)와 Davies(1993)는 多數의 函數式들을 제안하여 潮流分布를 계산하고 潮流分布 計算結果와 觀測資料의 비교로부터 바닥경계층 변화를 고려한 分布形態는 조류분포를 비교적 정확히 계산한다고 하였으며, 水深平均된 연직 와점성계수의 값은 Bowden *et al.* (1959)이 제안한 平均流速과 水深의 函數로 나타내는 방법이 비교적 적절함을 보였다. 그러나 이와 같은 0-방정식 모형은 모형내 상수가 適用地域에 따라 변화되는 모습을 보이고 있다(Tee, 1987). 이에 따라 난류의 수송방정식을 해석하는 모형에 대한 연구가 시도되어 왔다. 정 등(1994)은 2-방정식 모형인 $k-\epsilon$ 과 $k-l$ 모형, 1-방정식 모형을 사용하여 風性流의 水深分布를 계산한 결과와 水理實驗資料의 비교를 통하여 2-방정식 모형이 비교적

풍성류의 수심분포를 잘 재현함을 보이고, 1-방정식 모형은 혼합길이 산정식에 따라 계산결과가 크게 영향을 받음을 보였으며, 亂流混合이 全水深에 일어나는 경우의 취송류 계산에 적합한 간단한 함수형태의 0-방정식 모형을 제안하였다. 이·최(1995)는 $k-l$ 모형, 1-방정식 모형, Prandtl의 혼합거리 모형을 사용하여 수심이 변화하는 수로에서의 흐름분포와 潮流, 風性流의 水深分布를 계산하고 流速 觀測資料와 比較하였으며, $k-l$ 모형만이 모든 경우에서 실험치와 일치하는 양호한 계산결과를 나타낸다고 하였다.

본 연구에서는 渦粘性係數의 개념을 도입한 亂流模型 즉 0-, 1-, 2-방정식 난류모형들을 沿岸 海水流動을 대표하는 潮流와 정상류인 開水路 흐름의 해석에 적용하고 유속, 난류, 와점성계수의 時·空間的인 분포특성을 검토하여, 각 모형의 특성을 비교하였다. 기존의 난류모형의 비교연구는 주로 유속분포만을 실험치와 비교하여 亂流의 鉛直構造에 대한 면밀한 검토가 실시되지 않았으나, 본 연구에서는 模型 特性의 자세한 분석을 위하여 亂流의 鉛直構造에 대한 검토를 개수로에 대한 수치실험시 수리실험자료와 비교를 통하여 시도하였으며, 현재 사용되고 있는 난류모형들의 상대적 특성 파악이 가능하도록 가능한 많은 모델들을 비교하기 위하여 총 9개 모형의 적용결과를 비교하였다. 往復性 흐름인 潮流 解析에서는 조류의 振幅과 位相에 대한 수리실험자료와 비교하고, 연직 와점성계수와 혼합길이의 수심분포 및 시간변화 특성을 조사하였다.

2. 數值模型

난류모형들의 비교를 위하여 사용한 3차원 모형의 支配方程式, 境界條件, 數值解析方法은 다음과 같다.

Reynolds 平均된 3次元 連續方程式과 運動量方程式은 직교좌표계(x 가 북쪽으로, y 가 동쪽으로, z 가 水面에서 바닥으로 증가하는 좌표)에서 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + fv = \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - fu =$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

(3)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 g$$

(4)

여기서, $(u, v, w) = (x, y, z)$ 方向의 流速成分, $f =$ Coriolis 常數, $\rho_0 =$ 물의 基準密度, $p =$ 壓力, $A_H =$ 水平 渦粘性係數, $A_V =$ 鉛直 渦粘性係數로 0-, 1-, 2-방정식 난류모형들을 사용하여 계산하였으며, $g =$ 重力加速度이다.

바닥 境界條件으로 유속에 대하여는 無滑動條件 $u = v = w = 0$ 을 사용하였다. 유속에 대한 무활동조건은 많은 격자수로 수심을 분할하여 계산하지 않으면, 바닥 경계층을 정확히 표현하지 못하여 유속의 연직분포를 정확히 표현하지 못하는 것으로 알려져 있다. 그러나, 計算 鉛直層數의 증가는 계산시간의 증가를 가져와 실용성이 없다. 벽면함수의 개념(Rodi, 1984)을 도입하여 바닥경계층에서 난류 운동에너지 $k = u_{*b}^2/0.3$, 난류 운동에너지의 감쇠율 $\varepsilon = 0.3 k^{3/2}/(K\Delta z)$ 로 표현하고, u_{*b}^2 은 u_b^2 에 비례하고 $A_V = 0.09 k^2/\varepsilon$ 라는 관계를 이용하면 바닥층에서 연직 와점성계수는 다음과 같이 표현된다.

$$A_{Vb} = CKu_b \Delta z$$

(5)

여기서, $u_{*b} =$ 바닥 마찰유속, $C =$ 상수, von Karman 상수 $K = 0.4$, $u_b =$ 바닥층에서의 유속, $\Delta z =$ 바닥층의 격자크기이다.

벽면함수 개념을 도입하여 바닥층에서의 연직 와점성계수를 식 (5)에 의하여 계산하여 바닥 근처에서 유속 계산결과가 실제 유속분포와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 이와 같은 개념은 육지경계에 대하여서도 성립한다.

식 (1)-(4)의 數值解析은 有限差分法을 사용하였다. 鉛直擴散項, 水面傾斜項을 陰解法으로 해석하고, 移流項과 水平 擴散項을 FTCS(Forward Time and Centered Space)법에 의해 해석하였으며, 수면변위 η 는 橢圓型 差分式을 유도하여 해석한다. 計算格子體系로는 水平流速 u, v 를 같은 격자점에서 계산하고 水面變位를 그 중간점에서 계산하는 B-형 격자를 사용하였다.

수치모형에 관한 내용은 정·이(1994)에 자세히 기술되어 있다.

3. 亂流模型

渦粘性係數의 개념을 도입한 모형들이 비교되었으며, 연직 와점성계수를 구하기 위하여 사용하는 난류 수송방정식의 수에 따라 다음과 같이 분류된다.

3.1 0-方程式 亂流模型

0-방정식 난류모형은 亂流 輸送方程式을 해석하지 않고 와점성계수를 구하는 방법으로 연직 와점성계수는 水深分布를 나타내는 分布函數 $f(z)$ 와 연직위치와 상관없이 일정한 값 A_{V0} 의 곱으로 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_V = A_{V0} f(z)$$

(6)

A_{V0} 는 일반적으로 全水深 H , 水平流速, 摩擦流速 등의 함수이며, 여러 연구자들에 의해 Table 1과 같은 식들이 제안되어 왔다. 표와 그림에서 Jung *et al.* (1994)은 정 등(1994)이다. Bowden *et al.* (1959)은 Irish해의 現場調查結果를 토대로 구한 것이며, Nezu와 Rodi (1986)는 開水路 定常流 水理實驗結果로부터 구하였으며, Sheng *et al.* (1989)은 Prandtl의 혼합거리 개념에 근거를 둔 것이며, Jin and Kranenburg(1993)는 개수로에서 數值實驗과 水理實驗 結果의 比較를 통하여 구한 것으로 연직방향 분포형태는 현장자료로부터 구한 Bowden *et al.* (1959)과 마찬가지로 포물선형이나 A_{V0} 의 계산에 平均流速 대신에 摩擦流速을 사용한다. 이외에 정 등(1994)은 풍성류 계산시 분포형태로 최대치가 마찰경계층 부근으로 치우친 分布函數를 사용하였으며, Davies(1993)와 Tee(1979)는 조류계산시 경계층에서 직선으로 변화하고 내부층에서는 일정한 값을 갖는 형태의 포물형을 단순화한 형태의 식을 사용한 바 있다. Table 1에 의하면 대부분의 방법이 中間水深에서 가장 큰 값을 갖는 포물선형의 분포를 갖는 함수로 와점성계수를 표현하고 있다. 본 비교연구에서 개수로 정상류의 유속분포 계산시는 Sheng *et al.* (1989), Jin and Kranenburg(1993), 정 등(1994)을 사용하였으며, 조류계산시는 Bowden *et al.* (1959), Sheng *et al.* (1989), Jin and Kranenburg(1993), 정 등(1994)의 계산식을 사용하였다.

Table 1. Examples of 0-equation turbulence model

Researcher	A_{v_0}	$f(z)$	Remark
Bowden <i>et al.</i> (1959)	0.0025 HV	$4\alpha(1-\sigma)$	V = Depth-averaged velocity $\sigma = z/H$
Nezu and Rodi (1984)	$au_{*b} H$	$4\alpha(1-\sigma+\beta)$	u_{*b} = Bottom friction velocity α = Constant $\beta = f(\sigma)$
Sheng <i>et al.</i> (1989)	Cq	Λ -Boundary layer $ d\Lambda/dz \leq 0.65$ -Internal layer $\Lambda \leq C_1 H$	C = 0.25 $q = 1.633\Lambda \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2}$ $C_1 = 0.1-0.25$ Λ = Turbulent macroscale
Jin and Kranenburg (1993)	$0.1 u_* $	$4\alpha(1-\sigma)$	$ u_* = \text{Max}(u_{*b} , u_{*s})$ u_{*s} = Surface friction velocity
Jung <i>et al.</i> (1994)	A	$(1-\sigma)\sqrt{\sigma}$	$A = f(H, u_*)$ - Wind-driven flow

3.2 1-方程式 亂流模型

난류 운동에너지 수송에 관한 방정식과 혼합거리 산정식으로부터 와점성계수를 구하는 모형으로 연안 해수유통의 연구에 널리 사용되어 왔다. Johns(1978)는積分形態의 혼합거리 산정식을 제안하였으며, Liu and Leendertse(1979)는 1-방정식 모형을 사용하여 베링해의 Bristol 만에서 바람과 조석에 의한 해수유통을 계산하였으며, Smith and Takhar(1981)는 하구에서 潮汐傳波를 해석하였다. Mofjeld and Lavelle(1984)는 Ekman 경계층 문제와 조류를 해석하고 산정식내 상수를 결정하였으며, Nezu and Rodi(1986)는 개수로 등류에 대한 수리실험결과로부터 혼합길이의 분포와 와점성계수의 분포를 조사하였다. Davies(1991)는 조류계산시 혼합거리 형태에 따른 反應特性을 조사하고 혼합거리가 계산결과에 크게 영향을 미친다는 연구결과를 얻었으며, 정 등(1994)은 풍성류 계산시 난류모형들을 비교하고 혼합거리의 형태로 포물선형을 제안하였다. 난류 운동에너지 k의 수송방정식은 다음과 같다(Rodi, 1984).

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(uk)}{\partial x} + \frac{\partial(vk)}{\partial y} + \frac{\partial(wk)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_v}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P_v - \epsilon + F_k \quad (7)$$

여기서, ϵ = 난류 운동에너지의 減衰率 = $0.3 k^{3/2} / l$, 亂流生成項 $P_v = A_v [(\frac{\partial u}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2]$, $\sigma_k = 1.0$, k의 水平擴

散項 $F_k = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{A_H}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{A_H}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y})$ 이다.

식 (7)로부터 계산한 k와 정의한 혼합거리 l로부터 와점성계수는 다음과 같이 계산된다.

$$A_v = C_k \sqrt{k} l \quad (8)$$

여기서, $C_k = 0.3$ 이다.

혼합거리의 형태는 연구자들에 의하여 Table 2와 같이 제안되었으며, Table 2에서 비교적 간단한 형태인 Nezu and Rodi(1986)와 정 등(1994)이 비교를 위하여 사용되었다. 비교에 사용되지 않은 식들은 비교에 사용된 식과 수면부근에서는 많은 차이를 보이나 바닥경계 부근에서는 대체로 비교에 사용된 2개의 식과 일치한다. 비교를 위한 혼합길이 산정방법을 선정하기 위한 민감도 분석결과에 의하면, 수면부근 즉 상층에서의 혼합길이 분포가 개수로 유속분포 계산결과에 미치는 영향은 작아 수면부근에서 혼합길이 변화는 무시하고 2개의 식만을 비교하였다. 식 (7)의 바닥 경계조건은 $k = 0$ 이고, 수면 경계조건은 $\partial k / \partial z = 0$ 이다(Alfrink and van Rijn, 1983).

Table 2. Examples of mixing length in 1-equation turbulence model

Researcher	Mixing length	Remark
Johns(1978)	$l = -\frac{K\sqrt{k}l^{-1}}{\frac{d}{dz}(\sqrt{k}l^{-1})}$	- Tidal flow - Bottom condition : $l = Kz_0$
Liu and Leendertse (1979)	$l = KH[1 - \sigma]\sqrt{\sigma}$	- Combined flow induced by wind and tide
Smith and Takhar (1981)	$x \ l = \lambda Herf[4(1 - \sigma)]$	- Tidal flow - $\lambda = 0.105$
Molfjeld and Lavelle (1984)	$l = \frac{Kz_1}{1 + Kz_1/l_0}, \ l_0 = \gamma \frac{\int_{z_0}^H z_1 q dz_1}{\int_{z_0}^H q dz_1}$	- $\gamma = 0.2 \pm 0.04$ - Tidal flow - z_1 = Distance from water surface - z_0 = Roughness length
Nezu and Rodi(1986)	$l = KH[1 - \sigma]\sqrt{\sigma}$	- Open-channel flow - Hydraulic experiment
Jung <i>et al.</i> (1994)	$l = C_i H(1 - \sigma)\sigma$	Wind-driven flow - C_i = 상수

3.3 2-方程式 亂流模型

2-방정식 모형은 모형내 상수가 각종 흐름에 대하여 대체로 보편성을 갖고 있어 예측성이 있는 것으로 알려져 있으며(Blumberg and Mellor, 1987; 정, 1996), 각종 水理現狀의 연구에 널리 사용되어 왔다. 난류 운동 에너지와 그 감쇠율의 수송방정식을 해석하여 와점성 계수를 계산하는 $k-\epsilon$ 모형은 개수로 흐름 해석(Alfrink and van Rijn, 1983), 沿岸海域의 潮流 解析(정, 1996), 風性流 解析(Koutitas, 1987), 溫排水 擴散現象의 解析(Raithby *et al.*, 1987) 등에 활용된 바 있으며, 난류 운동 에너지와 혼합길이의 수송방정식을 해석하여 와점성 계수를 구하는 $k-l$ 모형은 Mellor and Yamada(1982)에 의하여 제안된 모형으로 연안 해수유동 연구에 널리 사용되고 있으며(Oey *et al.*, 1985; Blumberg and Mellor, 1987), 개수로 흐름의 해석(Blumberg *et al.*, 1992)에도 사용된 바 있다.

$k-\epsilon$ 모형에서 난류 운동에너지 k 의 수송방정식은 1-방정식 모형의 수송방정식 (7)과 같으며, 난류 감쇠율 ϵ 에 대한 輸送方程式은 다음과 같다(Rodi, 1984).

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(u\epsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(v\epsilon)}{\partial y} + \frac{\partial(w\epsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_v}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon} P_v - C_{2\epsilon} \epsilon) + F_\epsilon \quad (9)$$

여기서, $C_{2\epsilon} = 1.92$, $\sigma_\epsilon = 1.3$, $C_{1\epsilon} = 1.60$ (정, 1996), 水 平擴散項 $F_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_H}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_H}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)$ 이다.

$k-\epsilon$ 모형에서 와점성계수는 식 (7)과 (9)의 계산결과로부터 다음과 같이 계산된다.

$$A_v = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (10)$$

여기서, $C_\mu = 0.09$ 이다.

$k-l$ 모형은 난류 운동에너지의 두배 $q^2 (=2k)$ 와 q^2 과 혼합길이의 곱 $q^2 l$ 의 수송방정식으로 구성되어 있으며, 다음과 같다(Blumberg and Mellor, 1987).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^2}{\partial t} + \frac{\partial(uq^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vq^2)}{\partial y} + \frac{\partial(wq^2)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(A_q \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) + 2A_v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + n \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & - \frac{2q^3}{B_1 l} + F_q \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^2 l}{\partial t} + \frac{\partial(uq^2 l)}{\partial x} + \frac{\partial(vq^2 l)}{\partial y} + \frac{\partial(wq^2 l)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[A_q \frac{\partial(q^2 l)}{\partial z} \right] + l E_v A_v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{q^3 \bar{W}}{B_1} + F_l \quad (12)$$

여기서, A_q = 난류의 연직 확산계수, $B_1 = 16.6$, $E_1 = 1.8$, $E_2 = 1.33$, $\bar{W} = 1 + E_2(l/KL)^2$, $L^l = (\eta+z)^{-1} + (H-z)^{-1}$ 이다.

Blumberg *et al.* (1992)은 Blumberg and Mellor(1987)에서 연안 해수유동 연구에 사용된 방법이 개수로 흐름 계산시 自由水面의 영향을 제대로 고려하지 못함을 밝히고, 자유수면의 영향을 고려하기 위해서 \bar{W} 에 대한 식을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$\bar{W} = 1 + E_2 \left(\frac{l}{K(H-y)} \right)^2 + E_3 \left(\frac{l}{Ky} \right)^2 \quad (13)$$

여기서, $E_3 = 0.25$ 이다.

식 (11)과 (12)에서 F_q 와 F_l 은 각각 q^2 과 $q^2 l$ 의 수평확산항으로 식 (7)의 k 에 대한 수평확산항 F_k 와 유사하게 표기된다.

鉛直 渦粘性係數와 亂流 擴散係數는 식 (11)과 (12)의 해석결과로부터 다음과 같이 계산된다.

$$A_v = l q S_M \quad (14)$$

$$A_q = l q S_q \quad (15)$$

여기서, $S_M = A_1(1 - 3C_1)/(1 + 6A_1^2 G_M)$, $G_M = \frac{l^2}{q^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$, $S_q = 0.2$, $A_1 = 0.92$, $C_1 = 0.08$ 이다.

바닥 境界條件은 식 (9)는 $\partial \epsilon / \partial z = 0$, 식 (11)은 $q^2 = 0$, 식 (12)는 $q^2 l = 0$ 이고, 수면 境界조건은 $\epsilon = 0.3 \frac{k^{1.5}}{l_0}$, $q^2 = B_1^{2/3} u_*^2$, $q^2 l = 0$ 이며, l_0 는 수면에서 혼합길이이다.

4. 亂流模型의 比較

상기와 같은 數值模型들의 沿岸 海水流動에 대한 반응특성을 평가하기 위하여 개수로 정상류의 계산에 적용하여 수리실험자료와 난류의 분포특성을 비교한 후에 연안 해수유동의 주된 요인인 조류계산에 있어서 난류모형들의 특성을 비교평가하였다.

4.1 開水路 定常流

Tsuruya(1985)가 수리실험한 길이 2850 cm, 폭 150

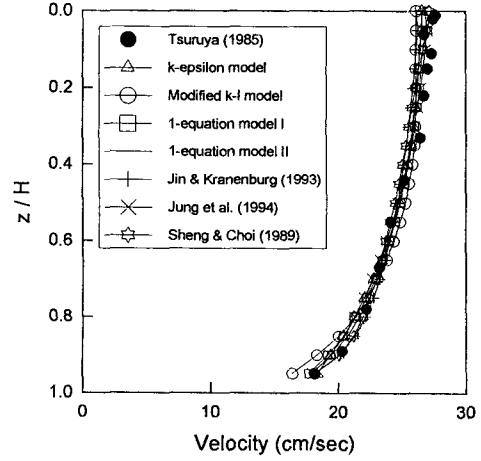


Fig. 1. Velocity profiles.

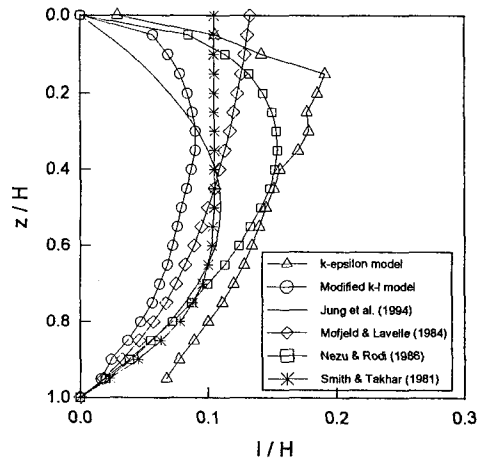


Fig. 2. Profiles of mixing length.

cm, 깊이 130 cm인 循環水路에서 평균유속 23.8 cm/sec, 수심 45 cm로 흐르는 개수로 흐름을 길이방향으로 20개, 폭방향으로 7개, 수심방향으로 20개의 격자를 구성하여 數值模擬하였다. 計算 時間間隔은 0.2초를 사용하였으며, 準定常狀態의 결과를 얻기 위하여 총 100초간 계산하였다. 수리실험은 바닥이 매끈한 수로에서 실시된 것으로 계산시 바닥 마찰계수 $C = 0.02$ 를 사용하였다. 비교된 모형은 $k-\epsilon$ 모형(Rodi, 1984), 식 (13)을 사용하는 수정된 $k-l$ 모형(Blumberg *et al.*, 1992), 2개의 1-방정식 모형, 3개의 0-방정식 모형(Sheng *et al.*, 1989; Jin and Kranenburg, 1993; 정 등, 1994)이다.

Fig. 1은 水路의 下流端으로부터 975 cm 上流地點에서 수평유속의 연직분포로 비교된 모든 모형의 계산결

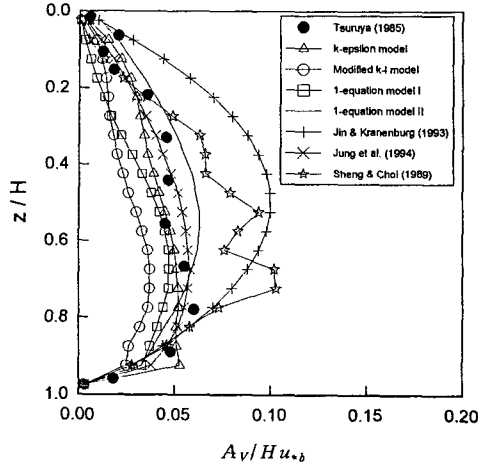


Fig. 3. Profiles of vertical eddy viscosity.

과가 대체로 Tsuruya(1985)의 實驗値와 일치하는 양호한 결과를 보이고 있다. 그림에서 1-equation model은 1-방정식 모형을 의미하며, I은 혼합길이로 中間水深에서 최대값을 갖는 拋物線形[Fig. 2의 Jung et al. (1994)]을, II는 Nezu and Rodi(1986)가 수리실험한 결과로부터 얻은 상층에서 최대치를 갖는 포물선형 분포(Fig. 2 참조)를 사용하여 계산한 결과이다. Fig. 2는 2-방정식 모형에 의해 계산된 결과로부터 구한 혼합길이와 1-방정식에 사용되는 혼합길이의 분포를 함께 도시한 것이다. Nezu and Rodi(1986)의 개수로에서 수리실험결과에 비하여 k-ε 모형의 결과는 최대값을 갖는 위치가 보다 水面에 근접해 있고 수면부근에서 급격히 변하는 모습을 보이며, 수정된 k-l 모형은 분포형태는 비슷하나 전반적으로 작은 값을 보였다. Fig. 3은 연직 와점성계수의 분포로 2-방정식 모형들과 1-방정식 모형들은 하층으로 치우쳐 최대값을 보여 실험치와 일치하는 양호한 계산 결과를 보이고 있다. 그러나 0-방정식 모형인 Jin and Kranenburg(1993)를 사용한 결과는 분포형태와 크기에서 실험치와 많은 차이를 보였으며, Sheng et al. (1989)을 사용한 계산결과는 流速剪斷(= $\partial u / \partial z$)에 비례한다는 Prandtl의 혼합거리 모형으로 전단이 0이 되는 곳에서는 擴散係數가 0이 됨으로 인하여 수심에 따라 안정적으로 변화하지 않고 불안정한 변화를 보이고 있으며 전반적인 그 크기도 실험치보다 크게 나타났으나, 분포 형태는 바닥부근에 치우쳐 최대치가 나타나 실험치와 일치하는 모습을 보였다. Sheng et al. (1989)과 정 등(1994)의 적용시 모형내 상수는 유속의 計算値가 實驗値와 일치하도록 조정하여 얻은 결과이다. 정 등(1994)

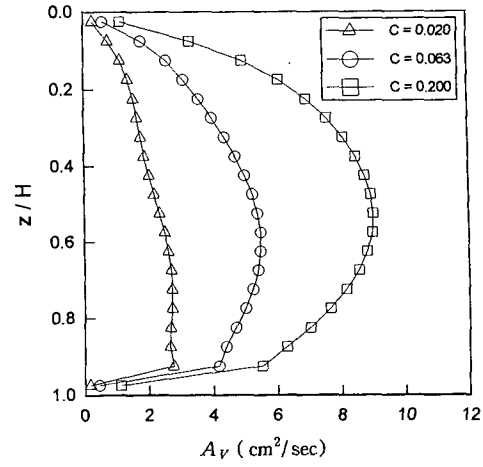


Fig. 4. Effect of bottom roughness coefficient on vertical eddy viscosity.

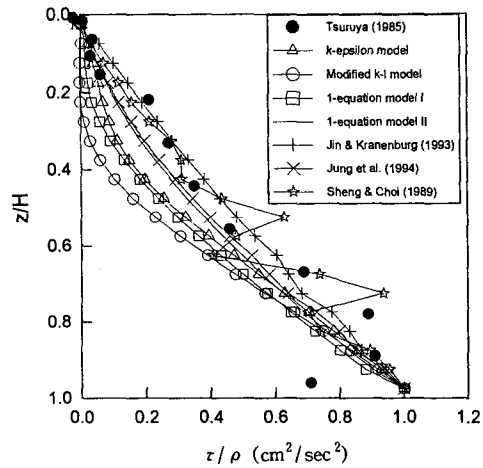


Fig. 5. Profiles of shear stress.

은 風性流 計算時 水面을 境界層으로 하여 사용했던 식을 바닥을 경계층으로 가정하여 사용한 결과이다. Fig. 4는 유속과 수심 즉 Reynolds 수를 일정하게 유지하고 바닥 마찰계수의 변화에 따른 와점성계수의 분포 변화를 k-ε 모형을 사용하여 민감도 분석한 결과로 바닥마찰이 증가함에 따라 분포가 中層에서 최대값을 보이는 Nezu and Rodi(1986), Jin and Kranenburg (1993)와 일치하는 분포를 보인다. 전단응력 τ를 물의 밀도로 나눈 값인 運動學的 剪斷應力(= $A_v \partial u / \partial z$)의 분포(Fig. 5)는 실험치에 의하면, 수면부근에서 완만하게 증가하다가 바닥으로 갈수록 증가율이 커지는 모습을 보이고 있다. 계산된 전단응력의 분포가 표층

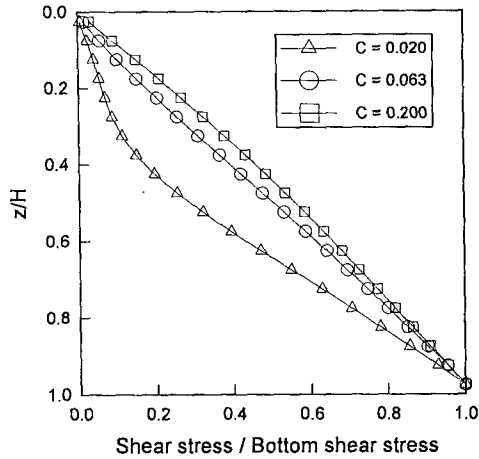


Fig. 6. Effect of bottom roughness coefficient on shear stress profile.

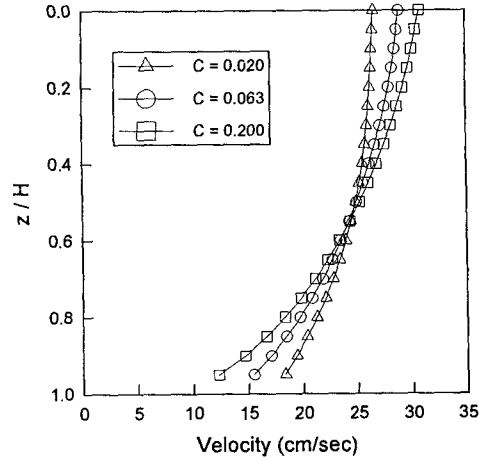


Fig. 8. Effect of bottom roughness coefficient on velocity profile.

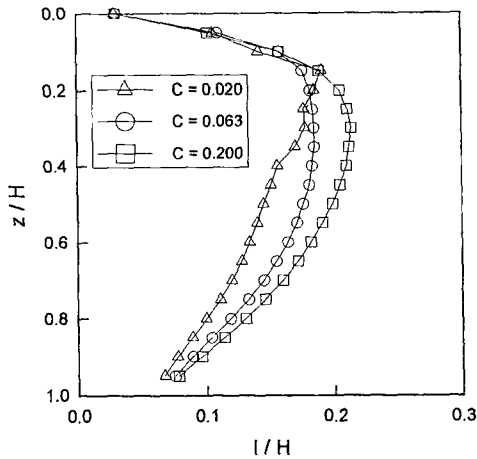


Fig. 7. Effect of bottom roughness coefficient on mixing length profile.

부근에서 완만한 증가를 보이는 계산결과를 보인 모형들은 와점성계수의 분포(Fig. 3)가 실험치와 대체로 일치하는 결과를 보이고 있으며, 실험치와 많은 차이를 보이는 Jin and Kranenburg(1993)와 Sheng *et al.* (1989)을 사용하여 계산된 전단응력의 분포는 수면에서 바닥까지 거의 선형으로 증가하는 모습을 보여 표층에서 증가율이 실험치에 비하여 크게 나타났다. Fig. 6은 바닥 마찰계수 변화에 따른 剪斷應力 分布의 변화로 바닥마찰이 증가함에 따라 전단응력이 수심증가에 따라 선형적으로 증가하는 분포를 보였다. 따라서, 와점성계수의 분포로 포물형을 가정하는 0-방정식 모형은 큰 바닥조도로 인하여 연직혼합이 활발한

경우에 적합한 방법으로 사료된다. Fig. 7은 바닥마찰에 따른 혼합길이의 변화를 민감도 분석한 결과로 바닥 마찰응력의 변화에 따라 혼합길이의 변화가 거의 없이 일정한 모습을 보이고 있다. 바닥 마찰계수의 증가에 따른 流速分布의 변화(Fig. 8)는 바닥마찰이 증가함에 따라 表層 流速은 증가하고 바닥 유속은 감소하여 수심에 따른 유속차가 심해지는 결과를 보이고 있다.

4.2 潮 流

길이 20 m의 한쪽이 막힌 幅 0.15 m, 平均水深 0.173 m인 水路로 週期 87.9 sec인 潮汐波 전파시 발생하는 潮流를 數値實驗하고 水理實驗結果(Celik and Rodi, 1985)와 比較분석하였다. 분석은 수로입구로부터 7.5 m 떨어진 지점에서 수행하였다. 계산시 조석과의 振幅은 수리실험결과와 일치하도록 수로입구로부터 7.5 m 떨어진 지점의 水面傾斜 變化의 진폭이 0.863×10^{-3} 가 되도록 결정하여 사용하였다. 계산시 水平格子는 길이방향으로 0.5 m간격으로 40개, 水深方向으로 20개의 격자를 구성하였으며, 計算時間間隔은 0.7325 sec를 사용하였다. 바닥 마찰계수는 $C = 0.19$ 를 사용하였으며, 안정적인 계산결과를 얻기 위하여 水平渦粘性係數로 $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 를 부여하였다.

豫備計算 2주기후 2주기간의 매시간 층별 유속을 최소화승법(Dronker, 1964)을 사용하여 調和分析하여 얻은 潮流 振幅의 水深分布圖과 Celik and Rodi (1985)의 실험치(그림 9와 10에서 Exp.)를 비교하면

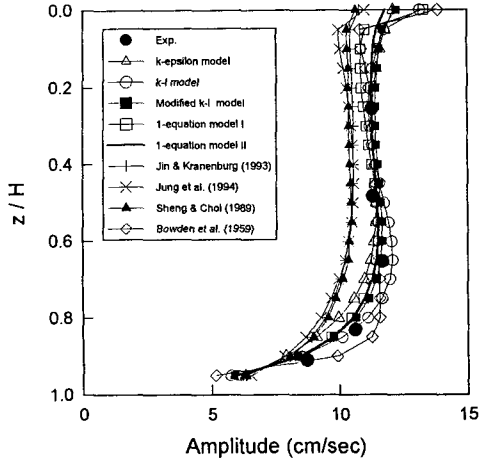


Fig. 9. Comparison of amplitude of tidal flow.

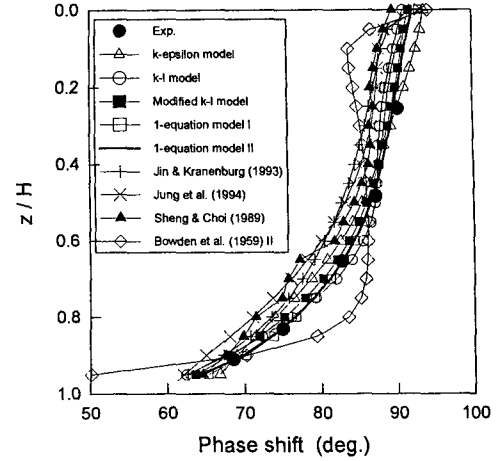


Fig. 10. Comparison of phase of tidal flow.

(Fig. 9), 난류 수송방정식을 해석하는 1-방정식과 2-방정식 모형들은 대체로 실험치와 일치하는 결과를 보이고 있다. 그러나, Blumberg and Mellor(1987)가 사용한 $k-l$ 모형은 다른 1-과 2-방정식 모형의 계산결과에 비하여 自由水面 效果를 제대로 고려하지 못함으로 인하여 수면부근에서 관측치와 차이를 나타내었으며, 자유수면효과를 보다 정확히 고려하기 위하여 Blumberg et al. (1993)이 수정한 수정된 $k-l$ 모형은 이러한 문제점을 해결할 수 있는 것으로 나타나 개수로 정상류와 마찬가지로 조류계산시도 자유수면 효과를 고려한 모형이 우수한 계산결과를 보였다. 1-방정식 모형의 경우는 혼합길이로 Nezu and Rodi(1986)가 제안한 함수형태를 사용한 결과(Fig. 9의 1-equation model II)가 실험치와 가장 잘 일치하는 양호한 결과를 보이고 있으나, 중간수심에서 최대인 포물형 분포를 사용한 모형(1-equation model I)은 대체로 잘 일치하나 수면부근에서 實驗値와 약간의 차이를 보였다. 이는 혼합길이의 정확한 정의가 1-방정식을 사용하는 데 있어서 매우 중요함을 의미한다. 개수로 정상류 계산시 비교적 정확한 유속분포를 계산하였던 3개의 0-방정식 모형의 결과는 실험치에 비하여 작은 크기의 조류 진폭을 계산하였으며, 조류계산에 널리 사용되는 Bowden et al. (1959)을 사용한 계산결과는 수면부근과 바닥부근에서 약간의 차를 제외하고는 전반적인 진폭의 크기가 실험치와 일치하는 양호한 결과를 보였다.

最高潮位가 나타나는 시간과 最强流가 나타나는 시간과의 位相差에 대한 분포(Fig. 10)를 보면, 진폭 계산 결과에서 실험치와 일치하였던 난류 수송방정식을 해

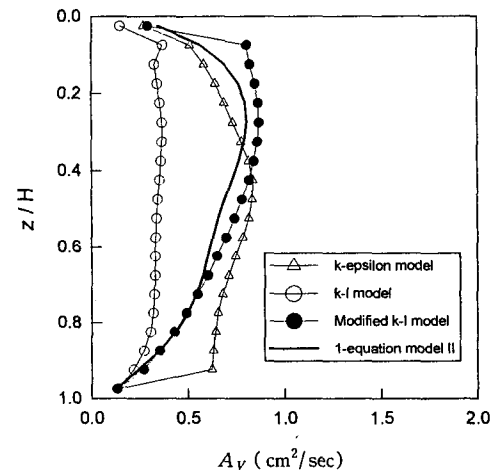


Fig. 11. Profiles of time-averaged vertical eddy viscosity.

석하는 1-방정식과 2-방정식 모형은 실험치와 일치하는 양호한 계산결과를 보이고 있으며, 특히 1-equation model II에 의한 계산결과는 실험치와 거의 일치하는 양호한 계산결과를 보이고 있다. 이 외에 振幅에서는 약간의 차이를 보였던 $k-l$ 모형과 1-equation model I도 위상에서는 전반적으로 실험치와 일치하는 양호한 계산결과를 보이고 있다. 그러나, 0-방정식 모형들은 계산결과와 많은 차이를 보이고 있다. 특히, 조류의 진폭에서는 대체로 실험치와 일치하는 결과를 보였던 Bowden et al.(1959)을 사용한 계산결과도 저층에서는 실험치에 비하여 크게 표층에서는 작게 위상차를 계산하였으며, 기타 정상류 계산시 사용했던 3개의 0-방정식 모형들은 실험치에 비하여 위상차를 작게 계산하였

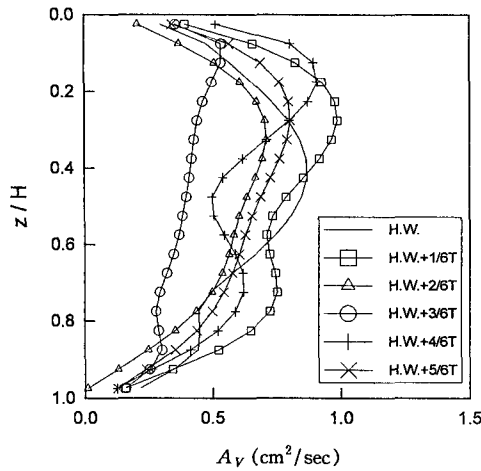


Fig. 12. Profiles of vertical eddy viscosity over a tidal cycle.

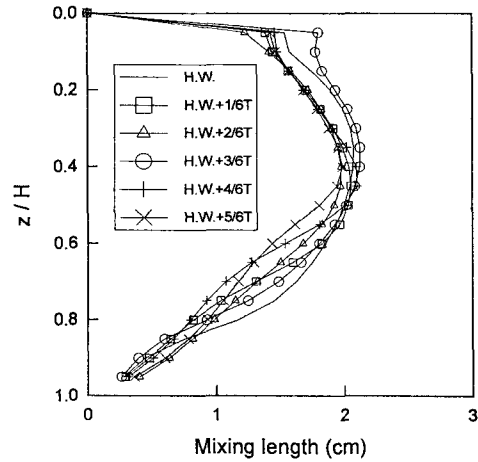


Fig. 13. Profiles of mixing length over a tidal cycle.

다. Fig. 11은 조류의 진폭과 위상에 대하여 비교적 관측치와 일치하는 결과를 보인 모형들에 대해 1조석주기간의 연직 와점성계수의 분포를 평균하여 도시한 것으로 진폭과 위상에서 실험치와 잘 일치하는 양호한 계산결과를 보인 1-equation model II와 수정된 $k-l$ 모형은 상층에서 와점성계수의 최대치가 나타나는 계산결과를 보이고 있다. 상기 2개의 모형보다는 못하지만 비교적 실험치와 일치하는 계산결과를 보였던 $k-\epsilon$ 모형은 中層에서 最大值가 나타나고 下層에서 鉛直擴散이 과다하게 계산되어 위상이 실험치에 비하여 수면부근에서는 약간 크고 中下層에서는 실험치보다 약간 작게 나타나는 모습을 보였다. 定常流時와 마찬가지로 Blumberg and Mellor(1987)가 사용한 $k-l$ 모형은 亂流輸送을 계산하는 다른 모형들에 비하여 전반적으로 연직확산을 작게 계산하였다. 비교에 사용된 연직 와점성계수의 분포형을 정의하는 0-방정식 모형들은 중층 또는 바닥부근에서 최대치를 갖는 형태의 와점성계수 산정식을 가정한 것으로 실험치와 일치하는 결과를 보인 모형들이 중상층에서 연직 와점성계수의 최대치를 갖는 것과 상이한 결과를 보이고 있다. Sheng *et al.* (1989)의 모형은 정상류 계산시 지적했던 유속전단이 0이되면 난류확산이 0이됨으로 인하여 위상 계산결과가 수심에 따라 불규칙하게 변화하는 모습을 보였다. Sheng *et al.*(1989)은 모형내 상수를 흐름특성에 따라 조절할 것을 권유하고 있으나, 본 연구에서는 모형의 普遍性 즉 다양한 흐름에의 適用性을 살펴보기 위하여 모형내 상수를 조정하지 않고 정상류 계산시 사용했던 값들을 그대로 사용하였다. 실험치와 일치하는 결과를

보인 1-equation model II의 계산결과중 연직 와점성계수 분포의 1주기동안 1/6주기 간격의 시간변화는 Fig. 12와 같으며, 수정된 $k-l$ 모형에 의해 계산된 혼합길이 분포의 시간에 따른 변화는 Fig. 13과 같다. Fig. 12와 13에서 H.W.는 고조시를 +1/6T는 고조후에 주기 T의 1/6이 지난 시각을 의미한다. 鉛直 渦粘性係數의 분포는 潮時에 따라 값과 분포형태가 변화하는 모습을 보였다. 고조와 저조후에 흐름이 전류한 직후에 해당하는 시각(H.W. + 1/6T와 H.W. + 4/6T)에서는 상층과 하층에 각각 하나씩의 최대치를 보였으며, 그 외의 시각에서는 수면에 치우쳐 최대값이 존재하였다. 따라서, 0-방정식 모형들은 연직 와점성계수의 분포형태를 시간에 관계없이 고정하여 계산함에 따라 난류의 연직분포가 Fig. 12에서와 같이 시간에 따라 변화하는 현상을 제대로 고려하지 못하여 조류의 진폭과 위상을 정확히 계산하지 못 하였으며, 난류의 수송현상을 고려한 1-과 2-방정식 모형들은 조시에 따라 연직 와점성계수의 분포형태가 변화하는 현상을 제대로 재현함에 따라 실제 현상과 부합하는 조류의 진폭과 위상을 계산하였다. 또한, 혼합길이의 분포는 비정상류에서도 정상류와 마찬가지로 수면과 바닥경계가 강하게 난류규모를 구속함으로써 분포형태가 조시에 따라 거의 변화하지 않는 것으로 나타나 혼합길이를 정의하는 1-방정식 모형은 2-방정식 모형과 더불어 시간에 따라 변화하는 亂流의 鉛直 混合特性을 제대로 반영할 수 있는 것으로 나타났다.

이상과 같은 潮流에 대한 난류모형의 비교실험 결과를 종합해보면, 난류의 수송방정식을 해석하는 모형은

난류의 수송방정식을 해석하지 않는 0-방정식 모형에 비하여 난류의 시간에 따른 변화를 보다 정확히 고려함에 따라 潮流解析時 보다 우수한 결과 특히 위상에서 우수한 결과를 보였다.

5. 結 論

沿岸 海水流動의 계산에 널리 활용되고 있는 渦粘性係數의 개념을 도입한 亂流模型들을 開水路 定常流와 潮流計算에 적용하여 수리실험자료와 비교분석한 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 비교된 9개의 모형은 開水路 定常流의 流速分布를 비교적 정확히 계산하였다.

(2) 鉛直 渦粘性係數의 水深分布는 모형에 따라 다른 결과를 보였다. Jin and Kranenburg(1993)는 실험치에 비하여 크게 와점성계수를 계산하였으며, Prandtl의 혼합거리 이론에 기초한 Sheng et al. (1989)의 방법은 전단이 0이 되는 곳에서 연직확산을 0으로 산정하는 특성으로 인하여 수심에 따라 와점성계수가 불규칙하게 변화하였다. 나머지 비교에 사용된 7개의 모형은 대체로 실험치와 일치하는 결과를 보였다.

(3) 剪斷應力 分布의 경우도 7개의 모형은 수면부근에서 천천히 증가하다가 바닥으로 갈수록 점점 증가율이 커지는 모습을 보였으나, 와점성계수의 분포에서 실험치와 차이를 보인 2개의 0-방정식 모형은 모든 수심에서 선형적으로 증가하는 모습을 보였다.

(4) 바닥 마찰계수의 변화에 따른 敏感度 分析結果에 의하면, 마찰계수가 증가함에 따라 전단응력의 분포는 선형으로, 와점성계수는 중간수심에서 최대값을 갖는 포물형 분포를 보였으며, 혼합길이의 분포는 거의 변화하지 않았다.

(5) 조류에 대하여는 亂流의 輸送方程式을 해석하는 모형은 난류의 수송방정식을 해석하지 않는 0-방정식 모형에 비하여 난류의 시간에 따른 변화를 보다 정확히 고려함에 따라 우수한 결과를 보였다. 그러나, 혼합길이를 정의하는 1-방정식 모형은 양호한 결과를 얻기 위해서는 혼합길이에 대한 정확한 정의가 필요함을 알 수 있었다. 조시에 따라 와점성계수의 분포형태는 크게 변화하였으며, 혼합거리의 거의 변화하지 않고 일정하였다.

현재의 研究結果는 실험실에서 얻은 수리실험자료와 비교연구를 수행한 결과로 실험실에 비하여 규모가

큰 沿岸海域에서의 모형의 反應特性은 다른 문제일 수 있다. 따라서, 實際 沿岸海域의 亂流變化에 대한 精密 調査와 이를 토대로한 모형의 比較評價 作業이 필요하다고 하겠다.

謝 辭

이 논문은 1995년도 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었으며, 연구비 지원에 대하여 감사드립니다.

參考文獻

- 이종찬, 정경태, 1996. 점모형을 이용한 조류와 취송류의 비선형 상호작용, 한국해양 해양공학회지, **8**(1), pp. 28-36.
- 이종찬, 최병호, 1995. 등밀도 흐름에서의 난류모형 비교, 한국해양학회지, **30**(1), pp. 13-26.
- 정태성, 1996. 마산 진해만 조류에 관한 3차원 수치모형, 대한토목학회논문집, **16**(II-1), pp. 63-72.
- 정태성, 이길성, 1994. 연직변환좌표에서 3차원 유동 수치모형, 대한토목학회논문집, **14**(5), pp. 1145-1158.
- 정태성, 이길성, 오병철, 1994. 풍성류 계산을 위한 연직 와점성계수 산정방법의 비교평가, 한국해양 해양공학 회지, **6**(3), pp. 205-215.
- Alfrink, B.J. and van Rijn, L.C., 1983. Two-equation turbulence model for flow in trenches, *J. of Hyd. Eng., ASCE*, **109**(3), pp. 941-958.
- ASCE Task Committee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, 1988. Turbulence modeling of surface water flow and transport: Part I-IV, *J. of Hyd. Eng., ASCE*, **114**(9), pp. 970-1073.
- Blumberg, A.F., Galperin, B. and O'Connor, D.J., 1992. Modeling vertical structure of open-channel flows, *J. of Hyd. Eng., ASCE*, **118**(8), pp. 1119-1134.
- Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1987. A description of three-dimensional coastal ocean circulation model, *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*, edited by N.S. Heaps, AGU, pp. 1-16.
- Bowden, K.F., Fairbairn, L.A. and Hughes, P., 1959. The distribution of shearing stresses in a tidal current, *Geophys. J. R. Astro. Soc.*, **2**, pp. 288-305.
- Celik, I. and Rodi, W., 1985. Calculation of wave-induced turbulent flows in estuaries, *Ocean Engineering*, **12**(6),

- pp. 531-542.
- Davies, A.M., 1991. On using turbulence energy models to develop spectral viscosity models, *Continental Shelf Research*, **11**(11), pp. 1313-1353.
- Davies, A.M., 1993. A bottom boundary layer-resolving three-dimensional tidal model: a sensitivity study of eddy viscosity formulation, *J. of Phys. Oceano.*, **23**, pp. 1437-1453.
- Dronker, J.J., 1964. *Tidal computations in rivers and coastal waters*. North-Holland Publishing Company.
- Jin, X. and Kranenburg, C., 1993. Quasi-3d numerical modeling of shallow-water circulation, *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, **119**(4), pp. 458-472.
- Johns, B., 1978. The modeling of tidal flow in a channel using a turbulence energy closure scheme, *J. of Phys. Oceano.*, **8**, pp. 1042-1049.
- Koutitas, C., 1987. Three-dimensional models of coastal circulation, *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*, AGU, pp. 107-123.
- Liu, S-K. and Leendertse, J.J., 1979. A three-dimensional model for estuaries and coastal seas: IV, Bristol Bay simulation, *R-2405-NOAA*, Rand Corp., Santa Monica.
- Mellor, G.L. and Yamada, J., 1982. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. of Geophys. and Space Phys.*, **20**(4), pp. 851-875.
- Moffeld, H.O. and Lavelle, J.W., 1984. Setting the length scale in a second-order closure model of the unstratified bottom boundary layer, *J. of Phys. Oceano.*, **14**, pp. 833-839.
- Nezu, I. and Rodi, W., 1986. Open-channel flow measurements with a laser doppler anemometer, *J. of Hyd. Eng.*, **112**(5), pp. 335-355.
- Oey, L-Y., Mellor, G.L. and Hires, R.I., 1985. A three-dimensional simulation of the Hudson-Raritan Estuary. Part I: Description of the model and model simulations, *J. of Phys. Oceano.*, **15**, pp. 1676-1692.
- Raithby, G.D., Elliot, R.V. and Hutchinson, B.R., 1987. Prediction of three-dimensional thermal discharge flows, *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, **114**(7), pp. 720-737.
- Rodi, W., 1984. *Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art review*. Institut fur Hydromechanik, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Federal Republic of Germany.
- Sheng, Y.P., Choi, J.K. and Kuo, A.Y., 1989. Three-dimensional numerical modeling of tidal circulation and salinity transport in James River Estuary, *Estuarine and Coastal Modeling*, edited by M.L. Spaulding, pp. 209-218.
- Smith, T.J. and Takhar, H.S., 1981. A mathematical model for partially mixed estuaries using the turbulence energy equation, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, **13**, pp. 27-45.
- Tee, K.T., 1979. The structure of three-dimensional tide-generating currents, Part I: Oscillating currents, *J. of Phys. Oceano.*, **9**, pp. 930-944.
- Tee, K.T., 1987. Simple models to simulate three-dimensional tidal and residual currents, *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*, AGU, pp. 125-147.