
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 33 卷 第 3 號 1996年 8月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 33, No. 3, August 1996

탄소성 변형구배텐서의 가산분해와 곱분해에 대한 새로운 역학적 이해

남용운*, 신종계**

A New Interpretation on the Additive and Multiplicative Decompositions of Elastic-Plastic Deformation Gradient Tensor

by

Y. Y. Nam* and J. G. Shin**

요 약

유한변형문제에서 변형구배텐서를 탄소성 성분으로 분해하기 위한 가산분해와 곱분해방법에 대해서 설명하고, 이 두 방법에서 파생되는 역학량들의 의미와 그 차이점을 보였다.

변형구배에 대한 기존의 곱분해와 가산분해로 얻어지는 변형속도구배는 가산적으로 표현되지 않으며, 소성변형속도구배는 탄성변형의 영향을 받고 있다. 본 연구에서는 공축소성 가정을 도입하고, 수정된 곱분해를 통하여 소성변형속도구배가 탄성변형에 영향을 받지 않는 가산적인 변형속도구배를 얻었다.

Abstract

An interpretation for the additive and multiplicative decomposition theory of the deformation gradient tensor in finite deformation problems is presented.

The conventional methods have not provided the additive deformation velocity gradient. Moreover the plastic deformation velocity gradients are not free from elastic deformations. In this paper, a modified multiplicative decomposition is introduced with the assumption of coaxial plastic deformation velocity gradient. This strategy well gives the additive deformation velocity gradient in which the plastic deformation velocity gradient is not affected by the elastic deformation.

접수일자 : 1995년 11월 29일, 재접수일자 : 1996년 7월 22일

* 정회원, 한국기계연구원 구조시스템연구부

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

1. 서론

변형도(strain)와 변형도율(rate of deformation gradient)텐서는 연속체거동을 해석하기 위한 중요한 역학량으로 변형구배(deformation gradient)텐서로부터 정의된다. 변형기하학(kinematics)에서는 변형을 전변형의 관점에서 다루고 있지만, 금속 재료와 같은 탄소성재료의 유한변형도(finite strain) 변형은 익히 잘 알려진 바와 같이 탄성변형과 소성변형이 동시에 존재한다. 탄성변형은 결정격자의 변형에 의해서 일어나며 회복이 가능하다. 소성변형은 전위이동에 의한 슬립, 쌍정(twinning), 결정입계의 슬립 등으로 발생하며 영구 변형으로 남는다. 열역학적으로는 소성변형은 에너지소산(energy dissipation)을 수반하는 비가역 변형이다.

이와같이 탄성변형과 소성변형은 미시적 발생기 구뿐만 아니라 거시적 현상도 서로 현저히 다르기 때문에 정식화 및 재료구성방정식에서 각기 분리 취급해야 한다. 그러나 전변형에서 탄성성분과 소성성분을 엄밀히 분해하여 나타내는 것은 쉽지 않다. 이론적으로 분해하는 탄성변형과 소성변형은 역학적 취급을 위하여 적절히 정의된 것이며 일어난 탄소성변형을 물리적으로 엄밀히 표현하는 것은 아니다.

미소변형도(small strain) 문제에서는 변형도를 다음과 같이 바로 가산분해하는 방법을 흔히 사용하고 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (1.1)$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ 와 $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 는 각각 탄성 및 소성변형도이다. 식(1.1)에서는 기준형상에 대한 고려가 명확하지 않은데, 이러한 것이 미소변형도의 경우에는 문제가 되지 않지만 유한변형도에서는 문제가 될 수 있다. 유한변형에서 변형구배를 분해하는 방법에는 가산분해(additive decomposition)[1][2]와 곱분해(multiplicative decomposition)[3]가 있다. 이 두 분해방법은 개념상 현저히 다른데 분해방법의 선택은 유한변형도 문제를 다룰 때 부딪히는 현실적인 문제이다.

한편 Nemat-Nasser와 E.H. Lee는 탄소성변형의 분해에 대해서 오랜 학술논쟁을 전개한 바 있다. 이들의 논쟁은 주로 각 각의 분해방법에서 정의되는 변형속도구배의 적절성에 관한 것이다. 특히 Lee[6]는 탄소성변형의 분해는 가산적으로 될 수 없다는 점을 지적하고 미소탄성변형을 가정하여 가산적인 변형속도구배를 얻었다. 본 논문의 목적은 가산분해와 곱분해를 이해를 돕기 위한 것으로, 기본적인 역학량인 변형구배부터 두 분해방법을 정의하고 변형도와 변형속도구배에 미치는 영향을 고찰한다. 또 미소탄성변형 대신에 공축소성변형속도 가정하에 변형구배를 강제회전, 탄성변형, 소성변형의 3곱으로 나타내는 곱분해를 사용하여 가산적인 소성속도구배를 보인다.

2. 변형기하학(kinematics)

2.1 운동(motions)

연속체역학에서 운동은 기준형상(reference configuration) 또는 물체(body)의 일대일 공간사상으로 다음과 같이 나타낸다. 본 논문에서 볼드체로 쓰인 영문 소문자는 벡터, 대문자는 텐서량을 의미한다.

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

여기서 \mathbf{x} 는 $t=0$ 에서의 기준형상으로 (2.1)식은 Lagrangian 표기법으로 운동을 나타낸 것이다.

2.2 변형구배텐서(deformation gradient tensor)

변형구배는 현재 형상의 기준형상에 대한 편미분으로 정의한다. 물체 운동시 변형과 변형구배를 Fig. 2.1과 같이 도시한다.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2)$$

변형구배텐서는 (2.1)식에 의하여 다음과 같이 역이 존재한다.

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \quad (2.3)$$

기준형상의 미소 벡터 dx 와 현재형상의 미소 벡터 dy 의 관계는 변형구배로써 다음과 같이 주어진다.

$$dy = Fdx \quad (2.4)$$

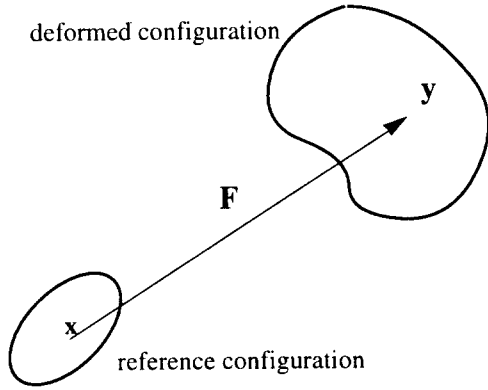


Fig. 2.1 Deformation of a body

2.3 변형구배의 극분해(polar decomposition)

변형구배텐서는 positive definite인 대칭텐서와 직교텐서로 유일하게 분해된다.

$$F = RU = VR \quad (2.5)$$

V 여기서 R 은 직교텐서로 회전을 나타내고, U 와 V 는 대칭텐서로 신장(stretch)을 나타내는데 각각 우신장(right stretch)텐서, 좌신장(left stretch)텐서라고 부른다.

2.4 변위(displacement)

변위는 질점위치의 변화량으로 다음과 같이 정의한다.

$$u = y - x \quad (2.6)$$

탄소성변형에 있어서 변위는 회복이 되는 탄성 변위와 비가역적인 소성변위로 구성되어 있다. 따라서 이를 분해하면

$$u = u_e + u_p \quad (2.7)$$

2.5 변형도(strain) 텐서

Lagrange 표기형 변형도인 Green-Lagrange 변형도텐서 E^L 과 Eulerian 표기형 변형도인 Almansi 변형도텐서 E^E 는 각각 다음과 같이 정의한다.

$$E^L = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(U^2 - I) \quad (2.8)$$

$$E^E = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) = \frac{1}{2}(I - V^{-2}) \quad (2.9)$$

2.6 변형속도구배(deformation velocity gradient) 텐서

변형속도구배텐서는 Eulerian 표기법에 의하여 다음과 같이 정의한다.

$$L = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.10)$$

여기서 v 는 속도($\frac{\partial y}{\partial t}$)를 나타낸다. 변형구배 및 극분해로써 변형속도구배를 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y} = \dot{F} F^{-1} \\ &= (\dot{R}U + R\dot{U})U^{-1}R^T \\ &= \dot{R}R^T + R\dot{U}U^{-1}R^T \end{aligned} \quad (2.11)$$

변형속도구배를 대칭(symmetric)텐서와 반대칭(skew-symmetric)텐서로 분해하면

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(L + L^T) \\ &= R \frac{1}{2}(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(L - L^T) \\ &= \dot{R}R^T + R \frac{1}{2}(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

로 되고, D 를 신장률(stretch rate) 텐서 또는 변형도율(rate of deformation gradient)텐서(이하 변

형도율이라 칭함), \mathbf{W} 를 spin텐서라 한다. Spin텐서 \mathbf{W} 는 회전을 나타내는데 (2.13)식에서 보듯이 피 순수한 회전 \mathbf{R} 만으로 표기되지 않는다.

3. 곱분해 (Multiplicative decomposition)

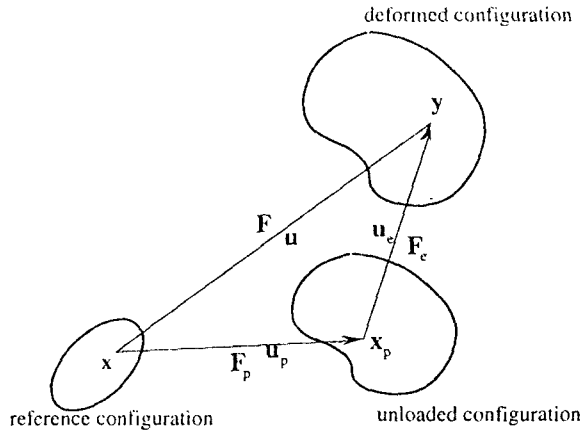


Fig. 3.1 Configurations for the multiplicative decomposition

Fig. 3.1과 같이 전변형 \mathbf{y} 가 발생하였고 제하상태를 고려하면 제하중에는 탄성변형을 하며 영구 소성변형이 남게 된다. 이것을 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}_p = \chi_p(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \chi(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

Lee[6]는 무응력상태를 (3.1)식이 나타내는 형상으로 도입하여 탄성변형을 나타내기 위한 기준형상의 하나로 사용하였다. 이러한 기준형상은 일견 타당해 보이지만 만약 큰 역응력이 존재하여 제하중에 소성변형이 일어나면 무응력상태 \mathbf{x}_p 는 제하 이전의 탄성변형을 나타내는 기준형상으로 사용될 수 없다. 따라서 개념적으로 기준형상 \mathbf{x}_p 로서 무응력상태가 아닌 실제로 일어난 소성 변형상태를 사용해야한다.

(2.6),(2.7)에서 정의되는 탄소성변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{y} - \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p = \mathbf{x}_p - \mathbf{x} \quad (3.3)$$

탄성변형구배와 소성변형구배는 (2.2)식의 정의에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{F}_p = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_e = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_p} \quad (3.4)$$

Lee[3]는 연쇄규칙에 의하여 변형구배텐서를 곱분해로 표시하였다.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_p} \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (3.5)$$

이를 이용하여 여기서 (2.8)식의 정의에 따른 변형도를 구하면

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}_p^T (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{I}) \mathbf{F}_p + \mathbf{F}^T \mathbf{E}_e - \mathbf{I}] \\ &= \mathbf{F}_p^T \mathbf{E}_e^L \mathbf{F}_p + \mathbf{E}_p^L = \bar{\mathbf{E}}_e^L + \mathbf{E}_p^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

이 된다. 여기서 \mathbf{E}_p^L 는 초기형상 \mathbf{x} 에서 측정된 소성변형도이다. (3.6)식은 (3.5)식을 (2.8)식에 대입하면 단순히 얻어지지만 그 의미에 대해서는 아직 깊이 고찰된 바 없다. 이를 설명하기 위해서 최종변형상태와 소성이 일어났을 때의 탄성변형에 대해서 살펴보아야 한다. 먼저 탄성변형에 대해서 관찰하면, 탄성변형의 본질은 결정재료의 결정격자의 변형(격자 원자 사이의 거리 변화)이다. 탄성구배 \mathbf{F}_e 는 격자의 변형을 나타내는 연산자라 볼 수 있다. 사실 탄성변형도 \mathbf{E}_e^L 은 기준형상 이라기 보다는 기준격자로부터의 격자변형을 나타내는 척도이다. 이에 반해 소성변형은 전위이동에 의해 발생하는데, 전위의 이동거리는 격자길이와 관계 있는 Burger 벡터와 비례한다. 탄성변형

\mathbf{F}_e 가 작용하면 격자길이가 변하여 소성변형의 크기가 달라진다. 이러한 소성변형의 변화는 탄성적이지만 이 변화량은 소성변형량에 비례한다. 최종형상 \mathbf{y} 에서 나타나는 변형도는 정성적으로 기준형상 \mathbf{x} 의 격자에서 얻어진 소성변형도, 격자의 탄성변형에 의한 소성변형도의 변화량 및 격자

의 변형에 의한 변형도의 합으로 나타난다. (3.6) 식의 끝항에서 소성구배텐서가 탄성변형도에 전 후송되어 있는 것은 격자의 탄성변형에 의한 소성 변형의 탄성적 변화의 효과를 나타낸다.

상기의 고찰에서 다음 사실을 예측할 수 있다. 재료의 인장시험에서 실험자료를 Lagrange 변형도를 사용하여 정리하면 소성이 발생할 때 재료의 겉보기 탄성계수가 변한다.(Fig.3.2 참조). 즉 재하를 하면 응력-변형도 곡선은 B-D를 따라 하강하여 기준형상 x_p 의 변형도인 D 점에 도달할 것이다. 왜냐하면 x_p 가 무응력상태이기 때문이다 (과도한 역응력이 없을 때). 그리고 Cauchy 응력은 격자의 변형에 비례하므로 비례상수 C(탄성계수)를 도입하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma = C \cdot E_c^L \quad (3.7)$$

Fig.3.2에서 C-E 가 E_c^L 를 나타낸다. 다시 (3.6)식에서

$$E_p^L = E^L - F_p^T E_c^L F_p \quad (3.8)$$

이므로 $F_p^T E_c^L F_p$ 는 그림에서 D-E가 되어야 한다. 따라서 겉보기 탄성계수 C' 는 다음과 같다.

$$C' = \frac{\sigma}{F_p^T E_c^L F_p} \quad (3.9)$$

단축하중에서 겉보기 탄성계수와 재료의 탄성계수비는

$$\frac{C'}{C} = \frac{E_c^L}{F_p^T E_c^L F_p} = \frac{1}{F_p^T F_p} \quad (3.10)$$

으로 나타나고, 단축인장일 경우 $F_p \geq 1$ 이므로 겉보기 탄성계수는 소성이 진행함에 따라 작아지는 값을 갖게 되고, 이는 마치 재료에 손상이 일어난 것 처럼 보이기 때문에 주의할 필요가 있다.

끝으로 (3.6)식에서 정의되는 $(E^L - E^p)$ 가 응력을 산정할 수 있는 탄성변형을 의미하지 않기 때문에 실제 계산에서는 별로 효용성이 없고, 탄성소성문제는 증분형으로 다루어지므로 다음에서 설명하는 변형속도가 실제계산에서는 중요하다.

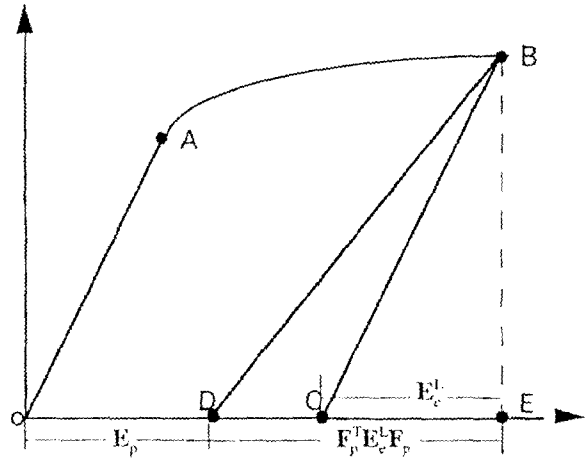


Fig. 3.2 Stress-strain curve in tension

변형속도구배를 곱분해에 의하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= \dot{F}F^{-1} = (\dot{F}_e F_p + F_e \dot{F}_p) F_p^{-1} F_e^{-1} \\ &= \dot{F}_e F_e^{-1} + F_e \dot{F}_p F_p^{-1} F_e^{-1} \\ &= L_e + F_e L_p F_e^{-1} = L_e + \bar{L}_p \quad (3.11) \end{aligned}$$

변형속도구배는 변형도와는 달리 소성변형속도구배에 탄성구배텐서가 전후송되어 있다. 즉, 탄성 변형이 소성변형속도구배에 영향을 주고 있다. 따라서 Lee[6]는 변형속도구배를 가산의 형태로 나타낼 수 없다고 했다. 또한 Nemat-Nasser는 곱분해에서 정의되는 소성속도구배 L_p 가 적절한 것이 아니라고 했지만 이러한 정의는 물리적인 관점에서 Lee[6]의 지적대로 타당한 것으로 판단된다. Lee[6]는 (3.11)식에서 미소탄성변형을 가정하여 $L_p \approx \bar{L}_p$ 로써 가산적인 변형속도구배를 얻었다. 그러나 강체회전이 클 경우는 강체회전성분이 탄성구배에 포함되어 미소탄성변형을 할지라도 탄성변형구배는 작은 값이 되지 않는다.

본 논문에서는 미소탄성변형 가정 대신에 공축 소성변형속도를 가정하고(공축 소성변형속도의 가정은 소성스핀이 없다는 것을 말한다[7]) 변형구배 텐서를 다음과 같이 곱분해한다(Fig.3.3 참조).

$$F = R [\hat{F}_e \hat{F}_p]_s \quad (3.12)$$

여기서 R 은 (2.5)식에서 정의된 것과 같고, 첨

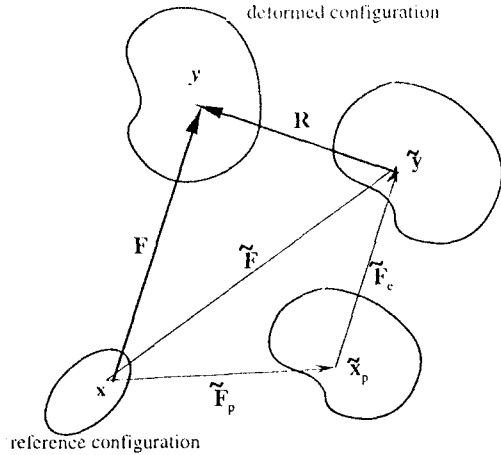


Fig.3.3 Modified multiplicative decomposition

자 s 는 대칭임을 나타낸다. (3.12)식에서 대칭부분에서 일반적으로 탄성변형구배와 소성변형구배 각 각은 대칭이 아니다. 다시 탄성변형구배를 대칭이라고 하고 소성변형에 어떤 강제회전을 부과하여 소성변형구배가 비대칭이되어도 일반성을 잃지 않는다. 여기서 탄성변형은 신장소성변형과 어떤 강제회전한 기준체에 대해서 대칭적으로 일어난 결정격자변형만을 의미한다. 우리의 관심의 대상은 재료의 변형이므로 (3.12)식에서 계산되는 다음의 변형구배를 사용한다.

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} = \mathbf{R} [\tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p]_s \quad (3.13)$$

이러한 곱분해에서 문제가 되는 것은 극분해가 계산적인 측면에서 효율적이지 못하다는 점이다. 2차원문제에서는 극분해가 간단하게 될 수 있지만 [8] 3차원일 경우는 고유치해석을 수반하는 약간 복잡한 계산의 필요하다. 그러나 Hughes와 Winget[8]는 \mathbf{R} 을 직접 적분하는 효과적인 방법을 제시하였다.

(3.13)식을 사용하여 변형속도구배를 표시하면

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{L}}_e + \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{F}}_e^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_e^{-1} + \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p \tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_e^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

으로 표시되어 (3.11)식과 동일한 형태로 나타나지만 그 의미하는 바는 다르다. 앞서 공축소성을 가정하였으므로 소성스핀이 없고 따라서 소성속도

구배는 대칭이고 또 탄성변형과 같은 특성축을 갖는다. 따라서 소성속도구배에 전송되어 있는 탄성변형구배와 후송되어 있는 탄성변형구배의 역은 서로 상쇠되어 (3.14)식은 다음과 같이 가산분해된다.

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}_e + \tilde{\mathbf{L}}_p \quad (3.15)$$

여기서 좀더 설명을 보충하면, 변형속도구배는 Eulerian 텐서로 현재의 형상을 기준으로 하여 정의된 것임을 상기하면, $\tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{L}}_p \tilde{\mathbf{F}}_e^{-1}$ 는 형상

$\tilde{\mathbf{y}}$ 에 대해서 평가된 것이고 $\tilde{\mathbf{L}}_p$ 는 $\tilde{\mathbf{x}}_p$ 에 대해서 구해진 것이다. 소성변형이 전위의 이동에 의한 것이라고 하면, 앞에서 설명했던 바와 같이 탄성변형은 격자길이에 관련이 있는 Burger 벡터의 크기를 변화 시키고, 이는 소성변형구배의 시간에 대한 미분값을 변화시키는데, 그 변화율은 기준형상 $\tilde{\mathbf{x}}_p$ 에서 최종형상 $\tilde{\mathbf{y}}$ 로의 변화율과 같다(다같이 $\tilde{\mathbf{F}}_e$ 임). 따라서 소성속도구배는 기준형상 $\tilde{\mathbf{x}}_p$ 에서나 $\tilde{\mathbf{y}}$ 에서나 같다.

변형도율은 다음과 같이 가산분해로 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{L}}_e + \tilde{\mathbf{L}}_e^T) + \tilde{\mathbf{L}}_p \\ &= \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p \end{aligned} \quad (3.16)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{L}}_p = \tilde{\mathbf{D}}^p$ 이다.

4. 가산분해

Nemat-Nasser[1]와 Zhong-Heng[2]은 변형구배 텐서를 다음과 같이 가산분해하였다.

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}_e + \mathbf{F}_p - \mathbf{I} \quad (4.1)$$

여기서 $\bar{\mathbf{F}}_e$ 는 가산분해에서 다음과 같이 정의되는 탄성변형구배 텐서로 (2.2)식과는 의미하는 바가 약간 다르다.

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \frac{\partial \mathbf{x}_e}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.2)$$

\mathbf{x}_e 는 Fig. 4.1에서 도해한 바와 같이 수직적 취급이 용이하도록 도입된 가상적인 변형형상인데,

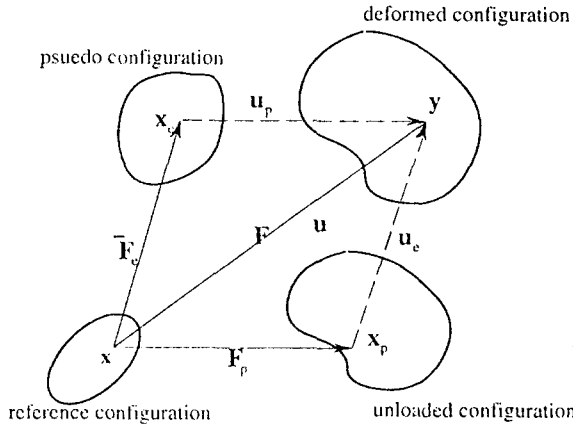


Fig. 4.1 Configurations for the additive decomposition

물리적으로는 결코 도달할 수 없는 형상이다.

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}_p) \quad (4.3)$$

\mathbf{F}_p 는 하중을 제거했을 때 영구변형으로 남은 형상 \mathbf{x}_p 에 대한 소성변형구배텐서이다.

$$\mathbf{F}_p = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.4)$$

Nemat-Nasser와 Zhong-Heng은 (4.1)식으로 주어지는 동일한 가산분해를 하였지만 개념상으로는 차이가 있다. Nemat-Nasser는 변형률이 가산분해형태로 나타나게할 필요에서 역으로 (4.1)식을 도출하였고, Zhong-Heng은 변위의 가산분해로부터 (4.3)식을 먼저 도출하여 동일한 결과를 얻었다. 이 때 탄성과 소성변위는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{y} - \mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p = \mathbf{y} - \mathbf{x}_p \quad (4.5)$$

변형구배의 가산분해로부터 변형도를 표시기 위하여 (4.1)식을 (2.8)식에 대입하면 변형도는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^L &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}_e^T \bar{\mathbf{F}}_e - \mathbf{I}) + \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I}) \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}}_e^T \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^T \bar{\mathbf{F}}_e) - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T + \mathbf{F}) \\ &= \bar{\mathbf{E}}_e^L + \mathbf{E}_p^L - f(\bar{\mathbf{F}}_e, \mathbf{F}_p) \end{aligned} \quad (4.6)$$

여기서 $\bar{\mathbf{E}}_e^L$ 와 \mathbf{E}_p^L 은 기준형상 \mathbf{x} 에 대한 탄성변형도와 소성변형도를 의미한다. $\bar{\mathbf{E}}_e^L$ 는 곱분해에서와 달리 격자의 변형에 의한 탄성을 엄밀히 나타내는 양이 아니다. 따라서 보통의 실험에서 얻어지는 탄성계수와 함께 사용할 수 없다. (4.6)식에서 변형구배의 가산분해로부터는 변형도가 가산분해 되지 않음을 알 수 있다. 이것은 (2.8), (2.9)식과 같이 변형도의 정의가 선형이 아니기 때문이다. 마찬가지로 변형속도구배를 전개하면 다음식이 도출된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}_e \mathbf{F}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}^{-1} \\ &= \bar{\mathbf{L}}_e + \bar{\mathbf{L}}_p \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\bar{\mathbf{L}}_e$ 와 $\bar{\mathbf{L}}_p$ 는 현재형상 \mathbf{y} 에 대한 탄성 및 소성변형속도구배를 의미하는데 (2.10)식의 정의와는 약간 차이가 있다. Nemat-Nasser는 곱분해에 의한 변형속도구배의 표현에서 소성변형속도구배가 탄성변형의 영향을 받는다고 했지만, 이러한 결점을 피하기 위하여 고안된 변형구배의 가산분해에 바로 이 결점이 내재되어 있다. (4.7)식에서 각항에 전변형구배가 개입되어 있기 때문에 탄성과 소성변형이 서로에게 영향을 미친다고 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{L}}_e + \bar{\mathbf{L}}_e^T) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{L}}_p + \bar{\mathbf{L}}_p^T) \\ &= \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p \end{aligned} \quad (4.8)$$

5. 가산분해와 곱분해의 비교

앞에서 설명한 가산분해와 곱분해를 정리하면 Table 5.1과 같다.

Lee의 곱분해와 Nemat-Nasser의 가산분해에서 소성변형구배 \mathbf{F}_p 는 두 방법에서 의미하는 바가 같고, 탄성변형구배는 같지 않다. 곱분해의 탄성변형구배는 (2.2)식의 정의에 따른 것이지만 가산분해에서 탄성변형구배는 초기형상을 기준으로 했기 때문에 (2.2)식의 정의와는 좀 다르게 정의된 것이다. Table 5.1에서 본 연구에서의 변형도는 (2.8)

Table 5.1 Comparison between additive and multiplicative decomposition

kinematics 양	곱분해 (Present)	곱분해	가산분해
변형구배	$\mathbf{R}[\hat{\mathbf{F}}_e \hat{\mathbf{F}}_p]_s$	$\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$	$\bar{\mathbf{F}}_e + \mathbf{F}_p - \mathbf{I}$
탄성변위	$\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_p$	$\mathbf{y} - \mathbf{x}_p$	$\mathbf{y} - \mathbf{x}_p$
소성변위	$\tilde{\mathbf{x}}_p - \mathbf{x}$	$\mathbf{x}_p - \mathbf{x}$	$\mathbf{y} - \mathbf{x}_e$
변형도	$\hat{\mathbf{E}}_e^L + \hat{\mathbf{E}}_p^L$	$\bar{\mathbf{E}}_e^L + \mathbf{E}_p^L$	$\bar{\bar{\mathbf{E}}}_e^L + \bar{\mathbf{E}}_p^L - f(\bar{\mathbf{F}}_e, \mathbf{F}_p)$
변형속도구배	$\tilde{\mathbf{L}}_e + \tilde{\mathbf{L}}_p$	$\mathbf{L}_e + \bar{\mathbf{L}}_p$	$\bar{\bar{\mathbf{L}}}_e + \bar{\mathbf{L}}_p$
변형도율	$\tilde{\mathbf{D}}_e + \tilde{\mathbf{D}}_p$	$\mathbf{D}^e + \bar{\mathbf{D}}^p$	$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_e + \bar{\mathbf{D}}^p$

식과 (3.13)식에서 구해진 것이다.

변형속도구배에 있어서 곱분해나 가산분해 양자가 엄밀한 의미에서 가산적인 변형속도구배를 주지 못한다. 그러나 공축소성일 경우 곱분해로 가산적인 변형속도구배를 얻을 수 있다. 곱분해에 의하여 표시되는 탄성변형이 우리가 보통의 탄성 문제에서 취급하는 탄성변형과 동일하다. 만약 통상 사용하는 재료의 탄성계수를 사용하면 탄성에너지 양을 서로 다르게 평가하는 데 곱분해가 더 정확한 표현이다. 왜냐하면 가산분에서 정의되는 탄성변형은 4장에서 설명한 바와 같이 재료격자변형을 엄밀히 나타내지 않기 때문이다. 변형속도구배텐서의 경우는 두방법에서 정의한 탄성 및 소성변형속도구배들이 모두 다르다. 이들을 비교하기 위하여 3,4장에서 정의된 소성속도구배를 예로서 재정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{L}_p = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{x}_p} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F}_e \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{x}_p} \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} \quad (5.2)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_p}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_p} \quad (5.3)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}}_p = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{x}_p} \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} \quad (5.4)$$

위의 식들에서 Lee의 곱분해와 Nemat-Nasser의 가산분해에서 얻어진 소성속도구배는 소성속도구배가 탄성변형의 영향을 받고 있음을 명백히 알 수 있다. 반면에 본 연구에서 제시한 곱분해에

의한 소성속도구배는 (5.3)식에서 보다시피 탄성변형의 영향을 받지 않는다.

Lee와 Nemat-Nasser의 소성속도구배인 (5.2)식과 (5.4)에서 개념적으로 보다 큰 문제는 이들 표현이 의미하는 바에 충실한 소성변형 구성방정식을 만들기가 매우 어렵다. 따라서 각 방법사이의 차이점을 실제수치계산을 통하여 직접 비교하는 것은 현재상태로는 어렵다. 그러나 위의 식에서 나타난 바와 같이 정성적으로 탄성변형만큼 차이가 남을 유추할 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 탄소성 유한변형문제를 다룰 때 변형역학량(kinematics quantities)을 선정하기 위한 변형구배텐서의 곱분해와 가산분해에 대하여 고찰하고, 두 방법에서 파생되는 역학량들의 의미와 그 차이점을 설명하였다.

변형구배의 곱분해에 의한 변형도의 가산형태가 주는 의미를 밝히고 이로부터 단축인장실험시 Lagrange 변형도로써 자료를 정리하면 겉보기 탄성계수가 소성변형의 진행에 따라 작아질 수 있음을 예측하였다. 이러한 현상은 재료의 변형열화 즉, 손상으로 나타나는 겉보기 탄성계수의 변화와는 구별되어야 한다.

변형구배에 대한 Lee의 곱분해와 Nemat-Nasser의 가산분해로 얻어지는 변형속도구배는 가산적으로 표현되지 않고 탄성변형의 영향을 받고 있다. 본 연구에서는 공축소성 가정을

도입하고, 수정된 곱분해를 통하여 소성변형속도가 탄성변형에 영향을 받지 않는 가산적인 변형속도구배를 얻었다.

Lee와 Nemat-Nasser의 소성속도구배에 대한 소성변형 구성방정식을 만들기가 매우 어렵다. 따라서 각 방법사이의 차이점을 실제수치계산을 통하여 직접 비교하기는 현재상태로는 어렵지만, (5.2), (5.4)식에서 나타난 바와 같이 정성적으로 탄성변형만큼 차이가 남을 유추할 수 있다.

한편 실제 수치계산에서 updated Lagrange 방법을 사용할 때 증분량이 충분히 작으면 어느분해 방법이나 계산정도상의 차이를 보이지 않을 수 있다. 소성속도구배를 예로들면,

$$\mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} \approx \mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{L}_p$$

($\mathbf{F}_e^{-1} \approx 1.0$, for small increment) (5.4)

그러나 최근 고체문제에 updated Lagrange 방법을 적용하는 것이 부적합함을 Heiduschice[10]가 지적하였다.

참 고 문 헌

- [1] Nemat-Nasser, S., "Decomposition of Strain Measures and Their Rates in Finite Deformation Elastoplasticity," Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp155-166, 1979
- [2] Zhong-Heng, G., "A Note on the Decomposition of Elastoplastic Finite Deformations," Int. J. Solids Structures, Vol. 17, pp925-927, 1981
- [3] Lee, E.H., "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains," J. Appl. Mech., Trans. of the ASME, pp1-6, 1969
- [4] Lee, E.H., "Some Comments on Elastic- Plastic Analysis," Int. J. Solids Structures, Vol. 17, pp859- 872, 1981
- [5] Nemat-Nasser, S., "On Finite Deformation Elasto-Plasticity," Int. J. Solids Structures, Vol. 18, pp857- 872, 1982
- [6] Lee, E.H. and McMeeking, R.M., "Concerning Elastic and Plastic Components of Deformation," Int. J. Solids Structures, Vol. 16, pp715-721, 1980
- [7] 소성스핀에 대한 구성방정식이 일단의 연구자들에 의하여 제시되고 있으나 아직 그 발생기구나 지배인자들이 명확히 파악되어 있지 않다. 현재 제시되어 있는 모델들은 공축소성변형을 사용하고 있다. 그러나 최근의 연구[11]에 의하면 소성스핀은 좌응력이 없는 한 비공축소성변형과 동시에 발생한다. 소성변형이 슬립에 의한 것이라면 비공축소성의 한 결과는 소성스핀으로 나타난다. 따라서 비공축소성이론을 채용하지 않는 한 소성속도구배의 비대칭성을 다루는 것은 무리다.
- [8] Hoger, A. and Carlson, D.E., "Determination of the Stretch and Rotation in Polar Decomposition of the Deformation Gradient," Quart. Appl. Math., Vol.42, pp113-117, 1984
- [9] Hughes, T.J.R. and Winget, J., "Finite Rotation Effects in Numerical Iteration of Rate Constitutive Equations Arising in Large-Deformation Analysis," Int. J. Num. Methods Engng., Vol.15, pp1862 -1867, 1980
- [10] Heiduschice, K., "Computational Aspects of the Logarithmic Strain Sapce Description," Int. J. Solids Structure, Vol.33, No.5, pp747-760, 1996
- [11] Nam, Y.Y., Kim, S.S., and Lee, S.G., "The investigation of plastic spin behavior of body centered polycrystal with simplyfied accommodation model", 한국해양공학회지(출판 예정)