韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 12. 제 35권, 제 2호, 113-116.

J. Kor. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Dec. 1996, Vol. 35, No. 2, 113-116.

특수다면체의 대각선 개수를 구하는 공식

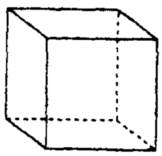
김 성 빈 (중국 연변대)

우리들은 일상생활 가운데서 여러 종류의 입체를 접하게 된다. 이런 입체들 중에 몇 개의 다각형으로 둘러싸인 입체를 다면체라고 한다. 다면체는 크게 두 개 종류로 분류하는데 한 가지는 볼록다면체이고 다른 한 가지는 오목다면체이다.

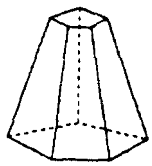
다면체의 임의의 한 면을 연장하였을 때 만일 이 다면체의 다른 면들이 모두 연장한 평면의 같은 쪽에 놓이면 이와 같은 다면체를 볼록다면체라 한다.

우리들이 일상생활에서 흔히 보는 다면체들로는 "각기둥", "각뿔", "각뿔대"와 "정다면체" 등이다. 아래의 "각기둥", "각뿔", "각뿔대"와 "정다면체"의 대각선 개수를 구하는 공식을 유도하자.

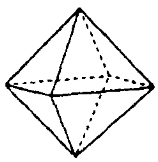
대각선 개수를 구하는 공식을 유도하기 위해 먼저 다면체의 대각선의 정의를 명확히 해야한다. 동일한 평면내에 있지 않은 두 개 정점을 맺은 선분을 다면체의 대각선이라 한다.



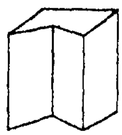
<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>



<그림 4>

<그림 1>, <그림 2>, <그림 3>은 볼록다면체이고, <그림 4>는 오목다면체이다.

다면체의 대각선 정의에 의하면 각뿔의 대각선은 있을 수 없다.

아래에 먼저 각기둥과 각뿔대의 대각선을 구하는 공식을 유도하자.

1. n 각기둥과 n 각뿔대의 대각선 개수 공식: $n(n-3)$

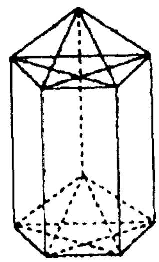
증명: 먼저 대각선면에 대해 이야기하려 한다. 동일한 옆면내에 있지 않는 임의의 두 모서리를 지나는 평면으로 각기둥을 절단하였을 때 단면을 각기둥의 "대각선면"이라 한다.

<그림 5>의 각기둥에는 5개의 대각선 면이 있다.

각기둥, 각뿔대의 대각선면의 개수는 밑면 다각형의 대각선의 개수와 같다.

밑면다각형의 대각선 개수는

$$ {}_nC_2 - n = \frac{n(n-3)}{2} $$



<그림 5>

각기둥과 각뿔대의 대각선면은 모두 4변형이다. 그러므로 각각의 대각선면상에는 두 개의 대각선이 있다. n 각기둥과 n 각뿔대의 대각선 개수는 대각선면 개수의 2배와 같다.

$\therefore\ n(n-3)$ (증명 끝)

아래에 정다면체의 대각선 개수의 공식을 유도하기 위해 먼저 Euler 공식을 연구하여 보자.

다면체의 면의 개수를 F, 꼭지점의 개수를 E, 모서리의 개수를 K라고 표시하면

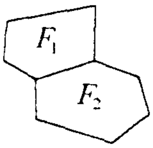
$F+E=K+2$

면수+꼭지점수=모서리수+2

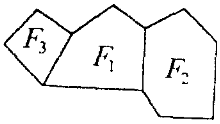
이것을 Euler 공식이라 한다.

증명: 다면체의 면을 $F_1, F_2, F_3, \cdots$라 하고, 이면들을 하나씩 순차로 취해 다면체를 형성시킨다고 생각할 때, 최초의 면 F_1인 때에는 모서리의 수와 꼭지점의 수는 같다.

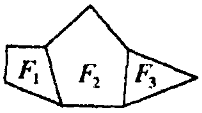
즉 $K=E$



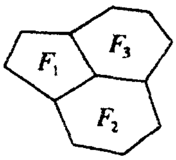
<그림 6>



<그림 7>



<그림 8>



<그림 9>

다음 두 번째 면 F_2를 F_1에 <그림 6>과 같이 붙였을 때 이 두면의 꼭지점과 모서리의 수들은 아래와 같이 된다. 두 면 F_1와 F_2는 두 개의 꼭지점을 공유하나 모서리는 단하나만 공유하게 된다. 그러므로 F_2를 더 붙였기에 모서리가 증가하는 수는 꼭지점이 증가하는 수보다 하나 더 증가하게 된다.

$\therefore\ K=E+1$

다음 계속하여 이 두면에 셋째면 F_3을 붙이면 <그림 7>과 같이 F_1의 한쪽이나 혹은 <그림 8>과 같이 F_2의 한쪽에 붙일 수 있다. 혹은 <그림 9>와 같이 F_1, F_2에 동시에 붙일 수 있다. 이런 경우에도 모서리가 증가하는 수는 꼭지점이 증가하는 수보다 하나 더 많다.

$K=E+2$

같은 방법으로

F_4 면을 붙이면 $K=E+3$

F_5 면을 붙이면 $K=E+4$

…………

$F_{(F-1)}$ 면을 붙이면 $K=E+F-2$

최후에 한 면을 더 붙이면 모서리 수나 꼭지점의 수에는 변화가 없다.

그러므로 $K=E+F-2$

2. 정다면체의 대각선 개수의 공식

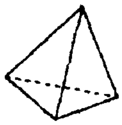
$${}_{\frac{m\cdot n-2m+4}{2}}C_2 - \frac{mn-(n-2)}{2}$$

단, m: 정다면체의 면의 개수.

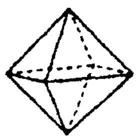
n: 정다면체를 구성하는 각 면의 정다각형의 변의 개수.

먼저 정다면체의 개념을 정확히 알아야 한다. 만일 다면체의 각 면이 합동되는 정다각형이고 또 다면각이 모두 합동인 다면체를 정다면체라 한다. 정다면체에서 모서리, 면각, 이면각들이 모두 같다.

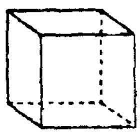
정다면체는 다섯가지 종류뿐이다. 즉 정4면체, 정6면체(입방체), 정6면체, 정12면체, 정20면체 뿐이다.



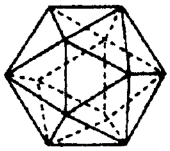
정4면체

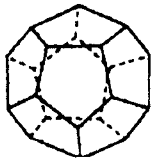


정8면체



정6면체


정20면체


정12면체

증명: 다면체의 Euler 공식: $F+E=K+2$
면의 수+꼭지점의 수=모서리의 수+2

정다면체에서 모서리의 개수 K 를 면의 개수 $F(m)$와 정다면체의 한 면인 정다각형의 변의 수 n로 표시하면

모서리의 수 $(K)=\dfrac{mn}{2}$ (1)

(1)식을 Euler 공식에 대입하여 꼭지점의 수 E 를 구하자. $F+E=K+2$

$$m+E=\frac{mn}{2}+2$$

$$\therefore\ E=\frac{mn-2m+4}{2} \qquad (2)$$

한 정다각형의 대각선 개수는

$$_{n}C_{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

m개 정다각형의 대각선 총수는

$$\frac{mn(n-3)}{2}$$

정다면체에서 E개 꼭지점의 매 두 개를 연결한 선분의 총수는

$$_{E}C_{2}=\ _{\frac{m\cdot n-2m+4}{2}}C_{2} \qquad (3)$$

(3)식에서 모서리의 총수와 m개 면상의 대각선 총수를 빼면 정다면체의 대각선 총수를 얻는다.

모서리의 총수 $K=\dfrac{mn}{2}$

m개 면상의 대각선 총수 $=\dfrac{mn(n-3)}{2}$

따라서 정다면체의 대각선 총수는

$$_{\frac{m\cdot n-2m+4}{2}}C_{2}-\left[\frac{mn}{2}+\frac{mn(n-3)}{2}\right]$$
$$=\ _{\frac{mn-2m+4}{2}}C_{2}-\frac{mn(n-2)}{2}.$$

(증명 끝)

예1) 정6면체의 대각선 총수?
풀이: $m=6,\ n=4$

$$\frac{mn-2m+4}{2}=\frac{24-12+4}{2}=$$

$$\frac{m\cdot n(n-2)}{2}=\frac{24\times 2}{2}=24$$

$$\therefore\ _{8}C_{2}-24=\frac{8!}{2!6!}-24=4$$

정6면체의 대각선 총수는 4이다.

예2) 정8면체의 대각선 총수?
풀이: $m=8\ \ n=3$

정점의 수 $E=\dfrac{mn-2m+4}{2}=6$

$$\frac{mn(n-2)}{2}=12$$

$$\therefore\ _{6}C_{2}-12=3$$

정8면체의 대각선 총수는 3이다.

예3) 정12면체의 대각선 총수?
풀이: $m=12,\ n=5$

정점의 수 $E=\dfrac{mn-2m+4}{2}=20$

$$\frac{mn(n-2)}{2}=\frac{60(3)}{2}=90$$

$$\therefore\ _{20}C_{2}-90=\frac{20!}{2!18!}-90=100$$

정12면체의 대각선 총수는 100이다.

예4) 정20면체의 대각선의 총수?
풀이: $m=20,\ n=3$

정점의 수 $E=\dfrac{mn-2m+4}{2}=12$

$$\frac{m \cdot n(n-2)}{2} = \frac{60 \cdot 1}{2} = 30$$

$$\therefore \ {}_{12}C_2 - 30 = \frac{12!}{2!10!} - 30 = 36$$

정20면체의 대각선 총수는 36이다.

정다면체의 대각선 개수를 구하는 공식은 아래와 같은 장점이 있다. 즉 주어진 조건이 m과 n이다. m은 정다면체의 면의 수, 면의 수는 곧 정다면체의 구체 명칭이다. n은 정다면체의 매 한 정다각형의 변의 수이다. 정4면체, 정8면체, 정20면체의 각 면은 정3각형이고 정12면체의 매 한 면은 정5각형이다. 정6면체의 매 한 면은 정4각형이다. 주어진 간단한 조건 m과 n로서 복잡한 정12면체와 정20면체의 대각선을 구할 수 있다.

참고 문헌

中川 去 (1937). "高等立體幾何學通論". 東京 共立社.