韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 12. 제 35권, 제 2호, 197-202.

J. Kor. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Dec. 1996, Vol. 35, No. 2, 197-202.

자기 닮음과 프렉탈의 여러 가지 성질

조 성 훈 (한서대학교)

I. 서 론

역학계 (Dynamical Systems)가 함수의 반복되는 진행과 같은 움직임을 연구하는 분야라면, 프렉탈 (Fractal)은 고정된 이미지(images)를 기하학적으로 연구하는 분야라 할 수 있다. 이런 측면에서 역학계와 프렉탈이 연관이 없어 보이는 듯 하지만 최근에는 역학계에서의 혼돈부분(Chaotic region)이 바로 프렉탈 이라는 것이 명백히 밝혀지고 있다. 따라서, 혼돈적인 움직임을 좀 더 정확히 이해하기 위해 프렉탈의 기하학적 구조를 먼저 이해하는 것이 옳을 것이다.

프렉탈이라는 용어는 1970년대 중반 B. Mandelbrot 에 의하여 이름 붙여졌으나, 사실은 이탈리아의 Peano, 독일의 Cantor, Hausdorff 그리고 러시아의 Besicovitch 등에 의해 이미 수학적으로 오랜 연구 대상이었다. 해안선, 구름, 나뭇잎, 고사리 그리고 산맥 등은 직선(straight line)이나 매끄러운 곡선 (smooth curve) 등으로는 표현하거나 이해하기가 힘든 자연의 대상들이다. 이와 같은 수학의 또다른 연구 대상이 바로 프렉탈이다. 프렉탈이란 말은 어원에서 알 수 있듯이 대상 자체가 자기 닮음이고, 분수의 차원을 갖고 있는 것을 말한다.

본 논문에서는 기하학적으로 나타나는 자기 닮음(self-similarity) 도형과 새로운 개념의 차원(dimension) - 정수 차원이 아닌 분수 차원- 에 대하여 연구하고, 프렉탈 도형이 갖는 성질과 여러 가지 프렉탈 도형의 예를 통하여 그 도형의 넓이와 차원을 구하여 보고, 또한 정삼각형과 정사각형의 반복(iterations)에 의해서 나타나는 자기 닮음 도형에서 얻어진 나선(spiral)의 길이를 구하는 방법을 연구하였다.

1. 자기 닮음 도형

어떤 집합이 자기 닮음(self similarity)이라는 것은 그 집합 내부에 다시 원래의 집합이 포함되어 있을 때를 말한다. 본 장에서는 임의의 도형에 대하여 그 도형이 자기닮음 도형이라는 것의 의미와 그 구조를 자세히 살펴보고자 한다.

1.1 자기닮음 (self similarity)

실수 R에 대하여 R^n ($n=1,2$ 또는 3)의 부분집합을 S 라 하자. 이때 S의 두 원소 a, b 에 대하여 a, b 사이의 거리를 $d(a, b) = \|a-b\|$로 나타내기로 한다.

정의 1.1.1. 함수 $f: S \to S$ 와 모든 $x, y \in S$ 에 대하여,

$$\|f(x)-f(y)\| = r\|x-y|$$

를 만족하는 상수 $r(0<r<1)$이 존재할 때, $f: S \to S$ 를 S 의 닮음(similarity) 이라고 한다.

또한, 이때 r 을 f 의 닮음 상수(similar constant)라고 한다.

정의 1.1.2 S의 닮음 $f_i : S \to S$ ($i=1,2,3,\cdots,n$)에 대하여 임의의 $u, v \in i$ 에 대해 $f_u(s) \cap f_v(s) = \phi$ 이고, $f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S) \cup \cdots \cup f_n(S) = S$ 일때, S를 자기닮음 도형 (self-similarity set) 이

라 한다.

[예제 1] Cantor 집합, 씨에르핀스키 삼각형 (Sierpinski triangle), 씨에르핀스키 양탄자 (Sierpinski Carpet), 코흐 초눈송이 (Koch snowflake) 등은 자기닮음 도형이다.

2 프랙탈 차원

2-1 축척 인자(scaling factor)

정의 2.1.1. 임의의 자기 닮음 도형에 대하여, 최초 도형의 한 변의 길이를 L 이라 하고, L 에 대응되는 두 번째 도형의 길이를 l 이라할 때, 처음 도형에 대한 두번째 도형의 축척 인자 (scaling factor)는 다음과 같다.

$$P=\frac{l}{L}.$$

[예제 2] 코흐 곡선 (Koch curve)

코흐 곡선을 길이 1인 직선에 대하여 생각해 보기로 하자. 먼저 길이를 똑같이 3등분하여 코흐 곡선의 첫 번째 모양을 만들면 그 각각의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이 되므로 이 때의 축척인자는 $\frac{1}{3}$ 이다

2-2. 프렉탈 차원(Fractal Dimension)

정의 2.2.1. 집합 X이 차원이 "음이 아닌 실수"일 때, 이 차원을 프렉탈 차원 (fractal dimension) 이라 한다.

길이 (length)가 L인 직선은 자기닮은 도형이고, 이때, 길이가 l 인 두 번째 직선에 대하여 직선의 축척 인자 P는 $P^1\cdot L=l$ 인 관계가 있다. 넓이가 A인 평면상의 자기닮음 도형에 대하여 두 번째 도형의 넓이가 a라면 이때 평면의 도형에 대한 넓이의 축척 인자 P는 $P^2A=a$ 이고, 마찬가지로 부피가 V인 자기닮음인 입방체에 대하여 두 번째 도형의 부피가 v 라면 부피에 대한 축척 인자 P 는 $P^3V=v$ 이다. 즉, 축척 인자 P의 지수가 그 도형의 차원을 나타낸다. 그러나 자기닮음을 하고 있는 여러 특수한 도형들의 차원은 정수도 아니고, 일정하지도 않다. 따라서 우리는 일반적으로 다음과 같은 성질이 성립함을 알 수 있다.

성질 2.2.2. 차원이 d인 자기닮음 도형의 측도(measure)에 대하여 최초의 도형이 측도 M을 갖고, 두 번째 도형이 측도 m을 가지면, 축척 인자 P는 다음을 만족한다.

$$P^d\cdot M=m$$

[예제 3] Cantor집합에서의 축척 인자는 $\frac{1}{3}$ 이다. 한편,

$M=1,\ m=\frac{1}{2}$ 이므로,

$$d=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{3}}=0.6309.$$

즉 Cantor집합은 0.6309 차원이다.

[예제 4] 최초의 직선 (initial line)을 $p:q:p$ $(2p+q=1)$ 의 비율로 나누어 보자. $p=0.4$인 경우라면 이 때의 코흐 곡선과 코흐 초눈송이의 형태는 그림과 같고, 그 차원은 $d=\frac{\log\ 0.25}{\log\ 0.4}=1.51$이다.

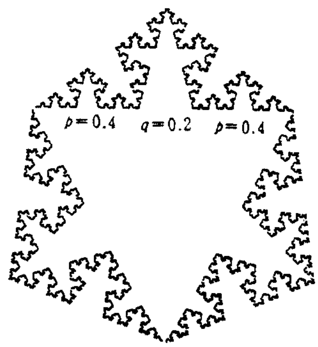


그림 2.3.1

3. 프렉탈 도형

본 장에서는 프렉탈 도형의 정의와 그 의미를 살펴보고 여러 가지 프렉탈 도형의 예를 찾아 볼 것이다. 특히 각 변의 나누어진 비율에 따라 나타나는 여러 형태의 코흐 초눈송이에 대하여 그 넓이를 구할 것이고, 또한 정다각형으로 만들 수 있는 자기닮음 도형에 대하여 그 도형 속에 들어 있는 나선(spiral)의 길이를 구하겠다.

3-1 프렉탈

프렉탈 이란 말은 어원적으로 보면 한 부분이 전체의 모습을 대표하는 형태라는 뜻을 가지고 있다. 이러한 프레탈은 자연 현상 어느 곳에서나 쉽게 발견 할 수 있다. 예를 들어 산맥, 구름, 나무, 눈(snow), 신경 조직 등등으로 작은 한 부분이 전체를 나타낸다고 할 수 있고 또한 태아가 인간의 모습을 닮고 있다는 점에서 프렉탈은 생명의 기원과 그 역사를 같이 한다고 볼 수 있다. 또한, 이 프렉탈은 미술과 컴퓨터에 이르기까지 여러 곳에서 찾아볼 수 있다.

앞의 1장, 2장에서 살펴본 바와 같이 어떤 도형은 자기 닮음이면서 또한 그 차원이 정수가 아닌 것이 있다. 이러한 도형을 프렉탈 도형이라 한다.

프렉탈의 정의는 여러 가지로 할 수 있으나, 본 논문에서는 다음과 같이 정의하도록 하겠다.

정의 3.1.1. 프렉탈 (Fractal) 도형 이란 자기 닮음이면서 분수차원(Fraction Dimension)을 갖는 R^n 의 부분집합이다.

[예제 5] Cantor 집합, Sierpinski 삼각형, Koch 곡선 등은 모두 자기 닮음이고 분수 차원을 갖고 있으므로 프렉탈 도형이라 할 수 있다.

3-2. 여러 가지 코흐 초눈송이의 넓이

한 변의 길이가 L 인 정삼각형으로부터 만들어진 코흐 초눈송이의 넓이는 다음과 같다.

성질 3.2.2. 길이 L이 $p : q : p$ $(2p+q=1)$ 의 비율로 나누어 졌을 때, 코흐 초눈송이 K 의 넓이는

$$K = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} + \frac{3L^2\sqrt{1-2q}}{4(2-q)}$$

이다.

(증명) 최초의 정삼각형의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}L^2}{4}$ 임은 분명하다. 따라서 각 변에 대하여 나타나 있는 부분의 넓이를 x 라하면,

$K = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} + 3x$ 이다. 이제 직선 L 에 대하여 처음 작업에 의해 나타난 삼각형의 넓이를 T 라 하면,

$$T = qL \times \frac{1}{2} \times \sqrt{(pL)^2 - (\frac{qL}{2})^2}$$
$$= \frac{qL \times \sqrt{4(pL)^2 - (qL)^2}}{4}$$

이 때, $p = \frac{1-q}{2}$ 이므로,

$$T = \frac{qL \times \sqrt{4(\frac{1-q}{2})^2 L^2 - q^2L^2}}{4}$$
$$= \frac{qL \times \sqrt{L^2 - 2qL^2 + q^2L^2 - q^2L^2}}{4}$$
$$= \frac{qL^2\sqrt{1-2q}}{4}$$

한편, x 에 대하여 작은 삼각형의 넓이를 y 라 하면 $x = T + 4y$ 이다. 이 때 나타나는 넓이에 대한 축척 인자는 $y = p^2x$ 이므로, $x = T + 4y = T + 4p^2x$. 이다.

$$x = \frac{T}{1-4p^2} = \frac{T}{(1+2p)(1-2p)}$$
$$= \frac{T}{q(2-q)} = \frac{qL^2\sqrt{1-2q}}{4q(2-q)}$$

따라서, $K = \dfrac{\sqrt{3}L^2}{4} + \dfrac{3L^2(\sqrt{1-2q})}{4(2-q)}$ 이다.

[예제 6] 한 변의 길이를 1 이라 하고, $p=q=\dfrac{1}{3}$ 라 할 때 나타나는 코흐 초눈송이의 넓이는 $\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$ 이다.

[예제 7] 한 변의 길이를 1 이라 하고, $p=0.4$일 때 $q=0.2$이므로 이때 나타나는 코흐 초눈송이의 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}$ 이다.

3-3. 나선의 길이

한 변의 길이가 1인 정삼각형 T^0에 대하여 각 변의 중점을 연결하여 T^0에 내접하는 새로운 정삼각형 T^1을 만들고, 다시 T^1의 각 변의 중점을 연결하여 T^1에 내접하는 정삼각형 T^2를 만든다. 이와 같은 작업을 되풀이하여 계속해서 내접하는 정삼각형 $T^3, T^4, \cdots$를 만들어 나갈 때, 이 도형을 T 라 하면 T 는 프렉탈 도형이라는 것은 쉽게 알 수 있다.

이 도형 T 의 내부에서 그림3.3.2 와 같이 하나의 나선(spiral)을 찾아볼 수 있다. 이런 종류의 나선은 위의 정 삼각형 뿐 아니라, 정 4각형, 정 5각형 등 정 n각형에서도 찾을 수 있다.

본 절에서는 이와 같은 나선의 길이를 자기 닮음을 이용하여 구하여 보고자 한다.

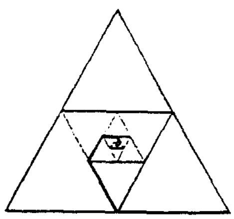

T^0

그림 3.3.1

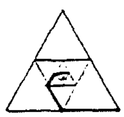

T^1

그림 3.3.2

그림 3.3.1 에서와 같이 나타난 나선의 길이를 S라 하자. 또 T에서 최초의 삼각형 T^0을 제거하고 T^1 에서 부터 나타난 나선의 길이를 S^* 라 하자. 이때, 각 변에 대한 축척 인자 P 는 $\dfrac{1}{2}$ 이므로, $S^* = \dfrac{1}{2}S$ .... (1)

또, T 가 자기 닮음 도형이므로

$$S = S^* + \frac{1}{2} \quad \text{.............................} \ (2)$$

(1), (2) 에서 $S = \dfrac{1}{2}S + \dfrac{1}{2}$ 이고, 따라서 $S = 1$ 이다.

위의 정삼각형에 대한 자기 닮음 도형 T 에 대하여 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

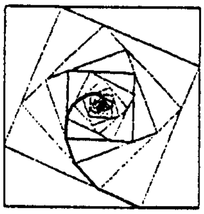
성질 3.3.1. 한 변의 길이가 L 인 정삼각형에서 각 변의 중점을 연결하여 만든 도형 T 에서의 나선의 길이 S는 L과 같다.

즉, $S = L$.

(증명) 자기 닮음 도형 T 의 축척 인자는 $\dfrac{1}{2}$ 이므로, 최초의 삼각형을 제외했을 때의 나선의 길이 S^* 는 $S^* = \dfrac{1}{2}S$ 이다. 이 때 $S = \dfrac{1}{2}S + \dfrac{1}{2}L$ 이고, 따라서 $S = L$ 이다.

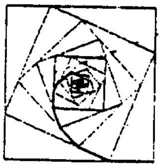
한 변의 길이가 1인 정사각형 H^0에 대하여 각 변을 $a : b$ $(a+b=1)$ 의 비율로 나눈 점을 연결하여 H^0에 내접하는 새로운 정사각형 H^1을 만들고, 다시 H^1의 각 변을 $a : b$ 의 비율로 나눈 점을 연결하여 H^1에 내접하는 정사각형 H^2 를 만든다. 이와 같은 작업을 되풀이하여 계속해서 내접하는 정사각형 H^3, $H^4 \cdots$를 만들어 나갈 때, 이 도형을 H라 하면 H 역시 프렉탈 도형이라는 것을 알 수 있

다(그림 3.3.3). 이 도형 H 의 내부에서 그림 3.3.4 와 같이 하나의 나선(Spiral)을 찾아볼 수 있다.



H^0

그림 3.3.3



H^1

그림 3.3.4

그림 3.3.3 에서와 같이 나타난 나선의 길이를 S라 하자. 또 H에서 최초의 사각형 H^0을 제거하고 H^1 에서 부터 나타난 나선의 길이를 S^* 라 하자. 이때, H^1 의 한 변의 길이와 H^0 의 한 쪽에 있는 직각 삼각형의 빗변의 길이가 대응하므로, 각 변에 대한 축척 인자 P 는 $\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 따라서,

$$S^* = \sqrt{a^2+b^2}\,S \qquad \text{.................................. (1)}$$

또, H가 자기 닮음 도형이므로

$$S = S^* + a = \sqrt{a^2+b^2}\,S + a \qquad \text{............ (2)}$$

따라서

$$S = \frac{a}{1-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a(1+\sqrt{a^2+b^2})}{1-a^2-b^2} \text{ 이다.}$$

이 때, $1-a^2-b^2=2ab$ 이고 $a=1-b$ 이므로,

$$S = \frac{a(1+\sqrt{a^2+b^2})}{2ab} = \frac{1+\sqrt{2b^2-2b+1}}{2b}$$

이다.

위의 정사각형에 대한 자기 닮음 도형 H 에 대하여 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

정리 3.3.2. 한 변의 길이가 L 인 정사각형에서 각 변을 $a : b$ $(a+b=1)$ 의 비율로 나눈 점을 연결하여 만든 도형 H 에서의 나선의 길이 S는 다음과 같다.

$$S = \frac{L(1+\sqrt{2b^2-2b+1})}{2b}$$

위의 정리 3.3.2 는 그 역도 성립함을 알 수 있다. 즉, 정사각형의 한 변의 길이와 나선의 길이를 알 면, 한 변의 나누어진 비율 a, b을 알 수 있다.

따름 정리 3.3.3. 정사각형의 한 변의 길이를 L, 나선의 길이를 S라 하자.

이 때, 정사각형의 한 변이 $a : b$ $(a+b=1)$ 의 비율로 나누어졌다고 하면

(1) $\quad a=\dfrac{2S(S-L)}{2S^2-L^2}$

(2) $\quad b=\dfrac{L(2S-L)}{2S^2-L^2}$.

(증명) 주어진 정사각형의 한 변의 길이를 L이라 하자.

먼저 $\quad S = \sqrt{a^2+b^2}\,S + aL \quad$ 이므로,

$(S-aL)^2=(a^2+b^2)S^2$ 이다.

이 때, $2aS^2-aL^2 = 2S^2-2LS$ 이므로

$a(2S^2-L^2) = 2(S^2-LS)$ 이다.

따라서, $a=\dfrac{2S(S-L)}{2S^2-L^2}$.

또한 $\quad 2bS=L(1+\sqrt{2b^2-2b+1}) \quad$ 이므로,

$2bS-L=L\sqrt{2b^2-2b+1}$ 이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $2bS^2-bL^2=2LS-L^2$ 이고,

따라서, $b=\dfrac{L(2S-L)}{2S^2-L^2}$.

정사각형에서 얻어진 나선의 길이에 대하여 다음 정리가 성립한다.

따름 정리 3.3.4. 정사각형에서 각 변의 중점을 연결하여 얻어진 나선의 길이는 한 쪽에 있는 직각 삼각형의 둘레의 길이와 같다.

[예제 8] 한 변의 길이가 1이고, $a=\frac{4}{7}$, $b=\frac{3}{7}$일 때 나선의 길이는 2 이다.

[예 제 9] 한 변의 길이가 2이고, 나선의 길이가 3일 때, $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{4}{7}$ 이다.

정리 3.3.5 한 변의 길이가 L 인 정 n각형에서 각 변을 $a : b$ $(a+b=1)$ 의 비율로 나눈 점을 연결하여 만든 도형 W 에서의 나선의 길이 S는 다음과 같다.

$$S = \frac{bL}{1-\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{n-2}{n}\pi}}.$$

(증명) 최초의 정 n 각형의 한 변의 길이를 L이라하고, 처음으로 내접하는 정 n 각형의 한 변의 길이를 l이라하자. 정 n 각형의 한 각이 $\frac{n-2}{n}\pi$ 이므로, Cosine 제 2법칙에 의해 $l=L\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{n-2}{n}\pi}$ 이다. 따라서, 축척 인자 P는

$$P=\frac{l}{L}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{n-2}{n}\pi}.$$

또한, 주어진 정 n 각형의 나선의 길이를 S라 하고 처음으로 내접하는 정 n 각형의 나선의 길이를 S^*라 하자 그러면, $S^*=P\cdot S$

$S=S^*+bL$ 이므로

$$S=\frac{bL}{1-P}=\frac{bL}{1-\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{n-2}{n}\pi}}$$

[예제 10] 한 변의 길이가 1 인 정 6각형에서 각 변을 1:2 의 비율로 나눈 점을 연결하여 만든 도형 W 에서의 나선의 길이 S는 $3+\sqrt{7}$ 이다.

참 고 문 헌

J. T. Sandefur (1996). "Using self-similarity to find length, area, and dimension". Math. Magazine. 107~120.

김영익 (1993). "혼돈과 후렉탈". 경문사.

R. L. Devaney (1992). A first course in chaotic dynamical systems. Addison - Wesley Pub. com, Inc.

R. L. Devaney (1900). "Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics". Addison-Wesley. Menio Park.

Denny Gulick (1992). "Encounter with chaos". McGraw-Hill. Inc, New York.

R. L. Devaney and L. Keen (1989). "Chaos and Fractals: The mathematics behind the computer graphics". Amer. Math. Soc, Providence,