韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 12. 제 35권, 제 2호, 117-123.

J. Kor. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Dec. 1996, Vol. 35, No. 2, 117-123.

확률밀도함수의 지도를 위한 고등학교 교과서내용의 재구성

김 용 환 (공주대학교)
김 승 동 (공주대학교)
오 후 진 (공주대학교)

I. 서론

현행 고등학교 수학과 교육과정에서 확률과 통계의 지도는 불확실한 사회 현상이나 대량의 정보처리를 요구하는 정보화 시대인 현 시점에서 실제로 여러 현상을 인식하고 추론하는 능력을 기르는데 중요한 한 부분을 담당하고 있다. 고등학교 제6차 교육과정에서도 전체적으로 수학적 사고력과 문제해결력의 신장에 역점을 두면서 수학의 실용성을 강조하고 있으며 이를 위한 학습의 효과를 극대화를 시키기 위해 그 교육방향을 정하고 있다. 한편으로 수학교육의 역사를 살펴볼 때 수학의 응용, 문제해결의 도입의 필요성은 오래전부터 인식되어 오고 있다. 특히 수학교육에서 수학의 유용성을 강조해야 하는 것은 물론이고 현대사회에서는 더많은 비판적 사고능력을 필요로 하기 때문에 학교수학은 보다 더 수학적 사고의 교육을 해야한다는 당위성이 대두되고 있으며 주미경(1991)은 문제해결력의 향상을 위해 수학적 모형(model)을 통한 교육을 강조하고 있다.

지금까지의 확률과 통계의 효과적인 교육을 위하여 연구된 선행 연구들을 살펴보면 다음과 같은 주제들로 구성되어 있음을 알 수 있다. 구광조(1986)는 확률계산과 기대값 등을 고등학교에서 가르칠 것을 제안하여 학습단계에 맞게 교육내용의 교육단계를 재구성할 것을 제안하고 있다. 송순희, 이영하와 김미옥(1989)은 초중고의 확률통계 단원에 대한 연계성을 분석하여 반복이 많음을 지적하고 있다. 허혜자(1990)는 각각 확률통계단원을 외국 교과서와의 비교를 통하여 교과서의 구성 체계를 수정할 필요성을 역설하고 교육내용의 과다를 지적 분석하고 있다. 한국교육개발원의 연구보고서(1992)는 일본과의 교육과정 비교를 통하여 교육내용의 수준을 보다 평이하게 구성할 것을 제안하고 있다. 특히 김승동과 박달원(1993)은 중학교 교육과정에서 교육내용의 축소를 요구하고 난이도 조정을 고려할 것을 제안하고 있다. 이들의 선행연구는 확률과 통계 영역의 교육에 대한 여러면에서 발전적인 제안을 거시적인 관점에서 하고 있음을 알 수 있다. 이경화(1994)는 확률의 개념지도에 있어서 확률의 정의에 관한 난해성을 고려한 효과적인 확률교육의 방안을 논의하고 있다. 김원경과 강행고(1995)는 중학교 확률통계단원의 내용오류를 지적하고 개정방향에 근거한 계통성과 연계성을 고려한 교육과정의 개정을 요구 제안하고 있다. 김연식과 박교식(1994)는 우리나라 학교수학 용어의 재검토를 통해 보다 합당한 학교수학 용어의 개발의 한 예를 제시하고 있다. 특히 Watts(1991)과 김용환과 이석훈(1995)은 학생들과 일반인들이 확률통계에 대한 인식이 매우 난해하고 어려운 학문이라고 생각하는 경향이 강함을 지적하고 그 이유를 분석하고 그의 해결방안의 하나를 제안하고 있는 데 이는 첫째 통계개념을 보다 명확하고 이해하기 쉽도록하는 통계 용어의 개발을 촉구하고 있으며 둘째는 연역적 사고의 수학적 사고 형태와 귀납적인 통계적 사고 형태의 구분을 명확히 하여 이에 대한 적절한 예제의 사용을 권장하고 있다.

본 연구는 문제해결력의 신장과 효율적인 수업설계의 관점에서 현재 수학교육의 발전방향과 흐름속에 우리는 확률과 통계의 지도에 대하여 어떻게 가르칠 것인가에 초점을 맞추고 전체적인 수업설계를 탐구하였다. 이러한 과정에 현재 고등학교 일선에서 사용하고 있는 12종의 교육부 검인정 수학교과서(수학 1)(1995)를 분석한 결과 확률밀도함수의 교과서 전개내용과 접근방법이 학생들에게 확률밀도함수의 개념형성에 어려움을 줄 수 있는 문제점을 발견하였다. 우리는 이러한 확률밀도함수 지도에 대한 교과서 내용의 전개와 접근방법을 모형적 인식의 관점에서 이를 개선하고자 한다. 연구방법으로는 기존의 고등학교 수학교과서의 확률밀도함수 지도에 대한 단원의 내용을 살펴보고, 통합적 수업설계를 바탕으로 히스토그램을 근사시킨 점근적 분포를 생각하여 하나의 모형으로서의 확률밀도함수를 접근하고 수학적 모형의 관점에서 지도해야 하는 필요성과 모형적 인식을 바탕으로한 개선된 교과서내용의 구성을 통한 수업설계의 대안을 제안하여 확률과 통계교육의 효율적인 지도의 향상에 도움이 되고자 한다.

연구의 내용으로 2절에서는 수업설계 이론의 간략한 검토와 12종의 현행 고등학교 수학1 교과서의 분석을 하고 3절에서는 확률밀도함수의 지도에 대한 구체적인 접근방법으로 교과서내용의 대안을 제시함으로써 고등학생들이 보다 쉽게 확률밀도함수의 개념을 이해하도록 한다. 4절에서는 논의를 정리하고 결론을 맺는다.

Ⅱ. 수업설계이론과 현행교과서 분석

학교수업에서 일반적으로 제일 먼저 고려하는 것이 교육과정인데 교육과정에서 주목하게 되는 문제는 무엇을 가르칠것인가와 어떻게 가르칠 것인가에 관한 내용들이 주를 이루게 된다. 전자는 교육의 내용이 무엇이냐라는 질문이고, 후자는 교육을 행하는 교육방법과 관련된 질문이다. 이들의 논의에는 현대에 이르러 학습심리학적 원리에 따른 교육방법에 관심이 증대되면서 수업설계분야에 높은 관심이 모아 지게 되었다. 그래서 수업설계란 기본적으로 수업의 효율성과 효과성을 높이기 위해 학습과제의 특성과 학습자의 특성을 고려한 최적의 수업방법을 처방하고자 하는 노력이다.

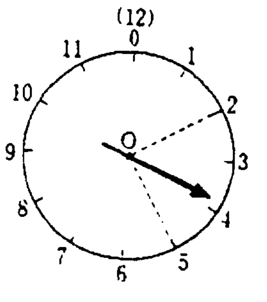
수업설계의 일반 변인들을 검토해 보면 수업분석, 수업전략, 평가, 수정의 4가지 요소를 포함하고 있음을 알 수 있는데, 한승록(1996)은 수업내용을 어떻게 조직할 것인가는 해당 수업내용의 특성에 따라 각기 다르게 조직되어야 한다는 점에서 교육의 내용과 수업전달전략의 방법이 서로 분리될 수 없으며 이들의 계열화는 곧 교육내용과 방법에 관련된 개념이라고 하였다. 이러한 수업설계의 대표적으로 널리 사용되고 있는 모형은 Gagne(1985)의 위계적 계열화 모형이다. 이것은 단순기능에서 복합기능으로, 부분에서 전체기능으로 배열하는 계열화 방식이다. 이 모형에 반하여 Reigeluth(1992)가 제안한 통합적 계열화 방식이 있다. 이는 학습과제 속의 구성 요소들이 전체 학습과제와 분절된 지식이나 기술로서가 아니라 전체적인 상황과 밀접한 관련하에서 학습자에게 제시된다. 또한 Merrill(1990)등은 현대사회는 정보화 사회, 기술사회로서 분절된 지식의 기억이나 단순한 활용이 아니라 필요한 정보는 조직하고 통합할 수 있는 복합적인 능력이 필요하므로 학습과제의 통합적 제시를 권장하고 있다. 이들을 종합해 볼 때 새로운 수업설계의 패러다임은 수업의 역할이 지식의 전달자에서 학습의 촉진자로, 분석적 수업설계에서 통합적 수업설계로의 전환이 이루어져야 함을 시사하고 있다고 보여진다.

또한 1980년대 이후 학교수학은 급변하는 사회의 발전에 대응하기위해 수학적 지식, 개념, 사고방식 등을 응용하는 능력을 배양해야 한다는 사실을 강조해왔다. 이러한 시점에서 수학적 모형의 지도는 그 중요성이 부각되고 있는 문

제해결능력의 신장을 위한 한 유형으로 분류될 수 있다. 주미경(1991)에 의하면 현재 학교수학에 수학적 모형을 도입하는 것은 세계적인 추세이고 이러한 필요성에 대하여 교과과정과 교재를 재구성하려는 실천적인 연구가 한창 이루어지고 있음을 피력하고 있다. 이와같이 수업설계의 관점의 변화와 학교수학에 수학적 모형의 도입에 맞추어서 우리는 확률밀도함수의 지도에 관한 수업을 주목하게 되었다. 이러한 방향에 맞추어 우선 현행교과서의 확률과 통계 단원에서 확률밀도함수의 정의를 도입하고 접근하는 과정에 대한 교과내용에 관하여 논의하고자 한다. 12종의 교육부 검인정 교과서(1995)는 대동소이하게 그 교과서의 전개방법과 내용이 유사하다. 이 교과서들 중에서 한 예를 발췌하면, 김명렬, 김창동과 박수화(1995)가 지은 교과서 내용(p. 261-263)의 축약은 다음과 같다.

1. 연속확률변수

[물음] 아래 <그림 1>과 같이 숫자판에 점 O를 중심으로 자유로이 회전할 수 있는 바늘이 있다. 이 바늘을 세게 돌린후 저절로 정지할 때, 바늘 끝이 가리키는 눈금을 X라 하자. 이 때 $2 \le X \le 5$일 확률을 구하여라.



<그림 1>

지금까지 배운 확률변수가 취하는 값은 $x_1, x_2, \ldots x_n$과 같이 하나 하나 떨어진 값이었다. 그러나 위의 물음에서 변수 X는 0부터 12까지의 모든 실수값을 취하는 확률변수이다.

이와 같이, 확률변수 X가 어떤 구간의 모든 실수값을 연속적으로 취할 때, X를 연속확률변수라고 한다.

........................(중간 내용 생략)................ .

일반적으로, 확률변수 X가 어떤 구간 [a, b]의 모든값을 취하고 이 구간에서 정의된 연속함수 f(x)에 대하여

1) $f(x) \ge 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = 1$

3) $p(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx$

이 성립할 때, 함수 f(x)를 확률밀도함수라고 한다. 이 때 연속확률변수 X는 확률밀도함수가 f(x)인 확률분포를 따른다고 한다.

위의 교과서 내용을 바탕으로 연속확률밀도함수의 도입 및 접근 방법을 요약해 본다면 연속확률변수의 설명을 하고 적분을 이용한 확률계산을 예를 든 다음 일반적인 확률밀도함수의 정의를 내리는 위와 같은 내용으로 교과서를 전개하고 있다. 이러한 현재 사용되고 있는 수학교과서들의 확률밀도함수의 정의에 대한 접근의 방법과 순서는 고등학생들이 확률밀도함수의 의미를 쉽게 이해하기에는 부적절하다고 생각이 든다. 그 이유를 다음 제3절에서 논의하고 그 대안을 제안한다.

Ⅲ. 확률밀도함수의 교과서 내용의 재구성

확률변수는 실험결과를 수리적 함수에 대응시켜 통계분석을 가능하게하는 도구이다. 여기에는 이산확률변수와 연속확률변수의 두가지 형태의 서로 다른 확률변수가 있으며 이들 확률변수에 대하여 각각의 확률밀도함수가 대응된다. 이때 연속형확률밀도함수는 모집단의 분포에 대한 이론적인 모형으로 사용된다. 여기서

엄밀히 말하면 연속형확률밀도함수와 이산현확률밀도함수는 구별이 된다. 즉 연속형확률밀도함수는 구체적인 자료를 바탕으로 히스토그램을 기준하여 얻게된 경험적인 사실로부터 이를 근사시켜 이론적인 모형을 도입하는 것이고, 이산형 확률분포는 확률실험조건에 따른 확률적 논리로부터 직접 수식으로 유도되는 것이다.

여기서 주목해야할 사항은 확률적 논리로부터 유도되는 이산형 확률분포와는 달리 연속형 확률밀도함수는 단순히 확률적 논리로부터 유도할 수가 없는 것이다. 연속형확률밀도함수는 과학적 사고를 하는 형식과 같이 어떤 현상에 대한 사전 경험적 지식과 구체적인 사례인 자료를 토대로 보다 적합한 이론적인 모형을 세워 이것을 확률밀도함수로 선택하는 것이다. 이 때의 확률밀도함수의 모형으로는 정규분포, 지수분포등 여러 가지 모형을 생각할 수가 있다. 또한 부연하여 설명을 한다면 확률변수 X는 한 개체의 값으로 생각하기 보다는 관심의 대상이 되는 다양성을 지닌 집단적 의미로 생각하여 모집단을 가정하고, 확률밀도함수를 모집단의 분포에 대한 확률적 모형으로 간주하는 것이다. 우리는 구체적인 현실의 경험을 바탕으로 관념적인 이론적 모형을 세우고 난 후에는 비로서 이 모형을 통하여 여러 가지 모집단의 특성을 수학을 이용하여 계산을 할 수가 있다.

2절에서 살펴보았듯이 현재 사용되고 있는 12종의 검인정 고등학교 교과서는 확률밀도함수의 정의를 도입하고 접근하는 방법에 있어서 그 가르치는 내용과 방법이 방법론상 비약을 하여 연역적인 수학적 방법으로 도입하고 있음을 알수 있다. 이것은 수학 그 자체가 대부분 연역적 사고를 바탕으로 전개되는 사실에서 연유되며 확률측도론에 나오는 수학이론에 근거하여 고등학교 수학교과서를 구성해왔기 때문이라고 생각이 된다. 이것은 일반적으로 고등학생이 이해하기가 쉽지 않다고 생각이 든다. 연속형 확률밀도함수의 단원은 수학적 모형을 이용한 학교수학의 귀중한 단원임을 알 수 있고, 또한 통합적 수업설계의 입장에서 보더라도 연속형 확률변수의 확률밀도함수의 지도는 전체적인 통계의 모형교육을 통하여 교육해야 보다 평이하게 연속확률밀도함수의 개념형성을 할 수 있을 것으로 판단된다. 그러므로 이는 통계적 사고의 바탕인 귀납적인 사고의 훈련과 현실에 대한 모형적 인식의 방법론을 통하여 확률밀도함수가 교육되고 교과서가 구성되어야한다고 생각한다. 다시 강조한다면 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 내용 전개와 그 도입은 히스토그램의 접근적 사실로부터 선택되는 것임을 알리고 연속형 확률밀도함수는 하나의 모형임을 교육해야 한다. 그 대안으로 연속확률밀도함수의 수학교과서의 내용을 재구성하여 다음과 같이 제시하고자 한다.

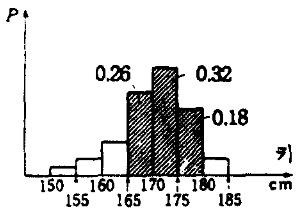
사람의 키는 연속확률변수이다. 실제로 키를 측정할 경우 소수 첫 자리까지 보통 측정을 하고 172.3 cm 등으로 표시한다. 만약 어느 고등학교의 50명의 학생들의 키가 다음의 도수분포표와같이 얻어졌다고 하자.

<표. 1> 키의 도수분포표

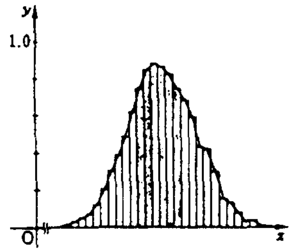
계 급(cm)	도수	상대도수
150이상-155미만	2	0.04
155 -160	3	0.06
160 -165	5	0.10
165 -170	13	0.26
170 -175	16	0.32
175 -180	9	0.18
180 -185	2	0.04
계	50	1.0

<표 1>의 자료를 바탕으로 확률분포의 그림을 히스토그램 으로 나타내면 <그림 2>처럼 그려진다. 이 때, 자료의 크기가 상당히 크다고 할 경우에 키의 측정단위를 짧게하여 계급의 폭을 충분히 작게 나누면 히스토그램의 형태는

<그림 3>처럼 그려진다.

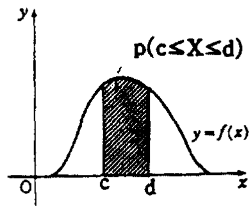


<그림 2>



<그림 3>

여기서 측정단위를 매우 세분하여 히스토그램을 그리면 유연한 곡선이 <그림 4>처럼 점근적인 곡선의 형태가 될 것이다.



<그림 4>

이 유연한 곡선을 이상화(idealization)시킨 것이 이론적인 모형으로서의 확률밀도함수인 것이다.

또한 일반적으로 연속확률변수 X의 확률분포를 고려하는 경우, $c \leq X \leq d$가 되는 확률은 곡선의 빗금친 부분의 면적으로 표시가 된다. 이 때 X의 확률분포곡선의 방정식 $f(x)$를 확률밀도함수라 하고, 이것은 다음

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = 1$

3) $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$

의 성질을 갖는다.

위와같이 자료의 관찰을 통하여 확률밀도함수의 의미를 히스토그램과 결부지어 점근적 히스토그램을 이상화한 것임을 알고 이 확률밀도함수가 위의 조건 3가지를 만족한다는 사실을 가르친다면, 이러한 접근방법은 고등학생들이 보다 쉽게 확률밀도함수와 그의 성질을 이해할 수 있다고 생각한다. 여기서 참고로 일본의 고등학교 확률통계의 교과서인 何森仁(1993), 小松勇作(1993)와 伊關兼四郎(1993)의 3종의 교과서 내용을 분석해 보면 우리가 연속확률밀도함수의 지도에 대한 접근방법의 대안으로 앞에서 제시한 것과 유사한 방법으로 히스토그램의 점근적인 의미로서 확률밀도함수를 지도하는 접근방법을 사용하고 있다.

Ⅳ. 결 론

현대사회는 정보화 사회, 기술사회로서 분절된 지식의 기억이나 단순한 활용이 아니라 필요한 정보는 조직하고 통합할 수 있는 복합적인 능력이 필요하므로 학습과제의 통합적 제시를 권장하고 있다. 이들을 종합해 볼 때 새로운 수업설계의 패러다임은 수업의 역할이 지식의 전달자에서 학습의 촉진자로, 분석적 수업설계에서 통합적 수업설계로의 전환이 이루어져야 함을 시사하고 있다고 보여진다. 또한 인간은 불확실한 현상에 대해서도 오랜기간 관찰을 통하여 일련의 법칙을 발견하고 불확실한 현상에 구조와 모형을 부여하는 지적활동을 계속해 왔고 이는 본질적으로 과학을 탐구하는 인간의 실험정신이이요 학교수학에서 수학적 모형교육의 필요성이 항상 내재하고 있음을 말해주고 있다.

고등학교 수학교육의 확률과 통계의 단원을 효율적으로 지도하는 방법에 있어 불확실한 모집단을 추측하고자 확률표집을 통한 현실적인 자료를 바탕으로 추론적인 교육을 위한 연속형 확률변수의 확률밀도함수는 히스토그램으로부터 점근적으로 이상화 시켜서 얻어지는 이론적인 모형임을 깨닫게 하고 귀납적인 사고의 훈련과 현실에 대한 모형적 인식의 방법론을 통하여 어떤 불확실한 사실을 인식할수 있음을 가르쳐야한다. 보통 어렵게 생각하는 확률과 통계단원을 학생이 보다 쉽게 이해하도록 하기위해서는 우리가 제안하는 접근방법으로 교과서의 단원 내용이 구성되어야한다고 생각한다. 즉 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 내용전개의 접근과 도입은 히스토그램의 점근적 사실로부터 확률밀도함수가 얻어지고 우리가 사용하는 확률밀도함수는 하나의 모형임을 교육해야한다고 생각한다. 이와같은 수학적 모형을 통한 통합적 수업접근방법은 보다 효율적인 수학적 사고 능력을 기르게 될 뿐만 아니라 통계가 정말 실생활과 관련이 있는 것으로 생각할 수 있게 되는 것이다. 차후의 연구 과제로는 확률과 통계단원에서 수학적 모형을 통한 교육뿐만 아니라 실험을 통한 수업에 관한 연구가 있어야 할 것이다.

참 고 문 헌

강행고, 강문봉, 강옥기, 구광조, 신성균, 황혜정 (1994). 중학교 수학과 교육과정해설. 교육부.

교육부 (1995). 고등학교 제 6차 수학과교육과정의 해설.

구광조 (1986). 중학교수학교육과정, 교과서 및 교사용 지도서의 분석과 개선방안, 수학과 교육과정의 문제점과 그 개선방향에 대한 세미나. 한국교육개발원.

김명렬, 김창동, 박수화 (1995). 고등학교 수학1 교과서, (주)중앙교육진흥연구소.

김승동, 박달원 (1993). 제6차 교육과정에 관한 고찰. 공주대학 논문집.

김연식, 박교식 (1994). 우리나라의 학교 수학 용어의 재 검토. 대한수학교육학회 제4권 제2호.

김연식, 김흥기 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 동아출판사.

김원경, 강행고 (1995). 중학교 확률 통계단원의 내용오류 및 개정방향에 근거한 교육과정의 개정 내용, 수학교육 제34권 제2호, 한국수학교육학회 시리즈 A.

김용환, 이석훈 (1995). 통계교육의 발전을 위한 제안. 충남과학연구지 제22권 제2호.

박세희, 정광식, 강병개 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 동아서적(주).

박한식, 구광조, 정지호, 이동수, 이강섭, 황선욱 (1995). 고등학교 수학1 교과서, (주)지학사.

송순희, 이영하, 김미옥 (1989). 초중고 수학교과서의 확률통계영역의 연계성에 관한 분석(제 1보). 수학교육.제28권 1호. 13-28.

송혜향, 김동재 (1996). 통계학. 청문각.

우정호 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 지학사.

윤옥경, 윤재한, 허원, 손문구, 송병회 (1995). 고등학교 수학1 교과서, (주)중앙교육진흥연구소.

이경화 (1994). 확률교육의 효과와 효과적인 확률교육. 대한수학교육학회 논문집 제4권 제2호.

이병권, 박성규 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 성안당.

이홍천, 강옥기, 박재석 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 동아출판사.

이현구, 지동표, 김우철, 고성은, 박병욱, 장훈, 최용준 (1995). 고등학교 수학1 교과서, (주)천재교육.

정봉화, 이우영, 신항균 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 형설출판사.

조승제 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 재능교육.

조태근, 채윤기, 손규현, 김철언, 임성모, 정상

권, 이재학 (1995). 고등학교 수학1 교과서, 금성교과서(주).

주미경 (1991). 모델링 지도에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 제1권 제 1호.

한국교육개발원 (1992). 제6차 교육과정 각론 개정 연구. 한국교육개발원 연구보고서.

한승록 (1996). CBI에서 학습내용의 계열화 방식이 학습과제 유형 및 학습자의 개념수준에 따라 학업성취에 미치는 효과. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

허혜자 (1990). 중고등학교 확률교과과정에 대한 비교 분석. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Gagne, R.M. (1985). The conditions of learning and theory of instruction(4th ed.), NY: Holt, Rinehart & Winston.

Merrill, M. D., Li, Z., and Jones, M. K. (1990). ID2 and Constructivist Theory. *Educational Technology,* 30(12), 52-55.

Reigeluth, C. M. (1992). Elaborating the elaboration theory. ETR & D, 40(3), 80-86.

Watts, D. G. (1991). Why is introductory statistics difficult to learn? and what can we do to make it easier ?, *The American Statistician*, November. Vol. 45., No. 4.

何森仁 (1993). 高校 確率統計, 三省堂.

小松勇作 (1993). 確率統計, 旺文社.

伊關兼四郎 (1993). 高等學校 確率統計, 數研出版株式會社.