

학습자의 수학적 개발

구세프 V. A. (모스크바 국립 사범대 교수)
한 인 기 (모스크바 국립 사범대 박사과정)

I. 수학교육의 목표

이 문제에 대해 오래 전부터 많은 수학자, 교육학자들이 관심을 기울여 왔고, 본 고에서는 이러한 연구들을 분석하고, 수학 학습 과정에서 '학습자 인성의 완전한 형성'이라는 개념에 근거해, 수학교육 목표를 세 가지 틀로 분류하였다. 물론, 여기에 제시되는 수학교육의 목표들은 광범위하고, 포괄적이기 때문에 교육의 형태나 학습자의 특성에 따라 그 목표들을 세분화시키고, 강조 점들을 달리해야 할 것이다.

수학교육 목표의 첫 번째 틀은 학습자 개개인의 인성 개발에 있어서 근간이 되는 수학적 지식, 능력 그리고 기능의 기초를 모든 학습자들이 획득해야 한다는 요구와 관련된다. 이 틀은 교육과정과 이에 상응하는 교수 과정을 통제하는 교육 매체의 체계로서 정의된다. 개혁전의 러시아에서는 학교들이 동일한 하나의 교육과정, 교과서에 의해 운영되었고, 그 교육목표의 수준도 지나치게 높게 설정되었다. 그러나, 현재, 러시아에서는 "다양한 유형의 학교", "유연성 있는 교육 계획", "다양한 형태의 개별 교수" 등으로 인하여, 이 첫 번째 틀의 구조와 내용에 본질적인 변화가 이루어지고 있다. 즉, 모든 학생들에게 요구되는 수학적 지식과 기능을 밝혀내고, 이를 기초로 다양한 유형의 학습자나 교육의 형태에 상응하는 교육 목표를 설정하고, 이에 따라 다양한 유형의 교과서들을 만들어 가고 있다.

수학교육 목적의 두 번째 틀은 학습자의 인성에서 중핵적이고, 근간을 이루는 특성의 형성

에 관련된다. 이러한 인성 요소들의 형성 과정에는 그 자체의 위계성이 있다. 예를 들면, "지적인 측면"과 "도덕적인 측면"의 형성에 있어서, 수학교육의 영향을 비교할 수 없다.

I. 지적 양육의 측면을 구성하는 인성 특성들

1. 연역적 사고(학습자의 논리적인 개발)

1.1. 추상화하는 재능 : 일반화하기; 특수화하기; 개념을 정의하기; 판단하기; 제시된 문제의 풀이 방법을 찾기

1.2. 주어진 전제로부터 논리적인 결론을 유도해 내는 능력(결론을 내리는 능력)

1.3. 대상을 분석하는 능력, 본질적이지 않은 부분들을 제거하고, 어떤 대상의 본질을 추출해 내는 능력, 어떤 대상으로부터 개별적인 사례들을 추출해 내는 능력

1.4. 문제의 기본적인 설정으로부터 도식으로 전이해 가는 능력(도식화하기)

2. 사고의 훈련과 비판적 태도

2.1. 생각을 언어적으로 표현할 때 정확성, 합축성, 명확성

2.2. 자신의 주의, 관심에 대한 자의적인 통제, 집중을 하는 능력

2.3. 관찰력

II. 인성의 창의적 특성을 구성하는 요인들

1. 인성의 창의적 능력

1.1. 스스로 지식을 획득하는 능력

1.2. 새로운 질문을 제시하는 능력

2. 결론을 사용하는 능력

2.1. 결론을 비교하는 능력, 얻어진 결론을 일

반화하는 능력, 결과에 대한 조건의 영향을 평가하는 능력

III. 세계관의 형성과 관련된 인성의 특성들

1. 세계의 규칙성과 인식의 원리에 대한 이해

1.1. 실제 세계에 대한 다양한 인식 방법의 통달, 주변 세계 현상들의 인식 가능성에 대한 이해

1.2. 과학과 그것의 개념들은 실제와 긴밀하게 연결되어 있고, 과학은 실제 생활의 중요한 문제를 해결하는 일반적인 가능성과 방법들을 만들어 낸다는 것에 대한 표상의 형성

1.3. 현대 기계 문명의 구성 원리와 이용에 대한 이해

1.4. - 과학적인, 그리고 기계·기술적인 개념과 아이디어의 지각

2. 자연과 사회의 개발 과정에 대한 과학적인 견해의 획득과 관련한 학습자들의 확고한 관심

3. 개념적인 사고

4. 자신의 견해와 신념을 형성하는 능력

5. 지식의 발생, 발달의 역사에 관한 명확한 표상의 획득

IV. 도덕적인 양육과 관련된 인성의 특성들

1. 인성의 도덕적인 특성의 형성

1.1. 목적 지향성,

1.2. 책임성,

1.3. 설정된 목적의 도달에 있어서 인내심,

1.4. 솔선수범.

V. 심미적 양육과 관련된 인성의 특성들

1. 아름다운 것을 느낄 수 있는 감각의 배양

2. 공간적인 형태의 감각, 상상의 개발

VI. 근로의 교육과 관련된 인성 특성들

1. 근면성의 배양

1.1. - 근로 학습 습관의 습득,

1.2. - 체계적인 근로에 익숙,

1.3. - 정돈되게 작업하는 것에 익숙.

2. 집단 근로의 중요성 이해 및 동료의 근로에 대한 존중.

수학교육에만 관련된 특수한 요소들을 포함하고 있는 수학교육 목표의 세 번째 틀에 대한 기술로 넘어가자. 즉, 다른 학과의 학습에서는 설정될 수 없는 그러한 목표들.

1. 학습자들에게 구두와 지필의 수학적 언어, 특히 사고 표현에 있어서 순서성, 정확성, 명료성, 간단성, 논거의 제시 등과 같은 특성들을 가르치기.

2. 컴퓨터 공학의 요소들을 포함하여, 수학적 도구나 기구들을 사용하는 능력과 기능 형성.

3. 실제 현상과 과정들에 대한 수학적 모형을 구성할 수 있는 능력, 수학의 응용을 고찰하면서 수학적 실험을 수행하는 능력.

4. 공간적 표상을 형성하기.

5. 수학적 직관을 개발하기.

II. 수학적 재능

오래 전에 러시아에는 그루메츠키 교수에 의해 “학생들의 수학적 재능의 심리학(1968)”이 출판되었으나, 그 이후에 실제로 이러한 연구들은 수행되지 않았고, 단지 지금에 와서 이러한 문제들에 대해 교육학자들이 연구를 수행하고 있다. 지금까지 제시된 것을 살펴보면, 만약 심리학의 영역에서 재능 이론에 대해 풍부하게 연구되었다고 한다면, 구체적인 영역들, 특히 수학 교육에 관련해서는 이 분야는 매우 빈약하게 연구되어 있다. 개개의 교육학자들, 수학자들은 이러한 문제들에 대해 자신의 생각을 가지고 있지만, 이러한 생각들은 매우 주관적이

고, 과학적인 근거를 가지지 않으며, 유감스럽게도 매우 제한적이다.

수학적 재능과 관련해, 흥미 있는 규칙성이 있다. 전통적으로(적어도, 러시아에서는) 수학적 재능을 구성하는 변수들은 수학교육의 목표와 많은 부분에서 겹쳐진다. 이러한 겹침의 본질은 첫째, 수학교육의 목표가 지나치게 높게 설정되었고, 둘째 재능과 그것의 개발 수준에 대한 실제적인 이해의 결핍이다. 학습자의 수학적 재능의 변수들에 대한 분류들을 제시할 것이다. 물론, 이러한 변수들의 추출은 이미 많은 수학자, 교육학자들에 의해 이루어졌고, 본고에서는 이를 종합적으로 정리한 것이다. 덧붙여, 이 분류의 특징은 모든 학생들의 인성의 완전한 형성을 지향한다는 것이다. 이것들을 도식의 형태로 제시하면, 제I틀, 제II틀과 같다.

도식에서 제시된 틀들의 내용을 살펴보자.

제 I 틀 : 학습자의 일반적인 재능의 개발에 영향을 미치는 수학적 재능의 변수들

1. 천부적인 특성을 가지는 사고 활동과 인성의 특성들을 나타내는 변수들

1.1. - 개인의 특성들 : 의지가 강한 적극성과 일을 잘 처리하는 것; 끈기성과 설정된 목적의 성취; 관찰력; 기억력; 자신의 주의, 관심에 대한 임의적인 통제; 내향성; 지식욕.

1.2. 사고활동의 특성들 : 추상적으로 사고하는 능력; 간결한 표현력; 생각을 언어로 표현할 때에 정확성, 함축성, 명확성; 판단력; 분석하는 능력

2. 학습자의 모든 학습 활동의 효율성을 향상시키는데 영향을 끼치는 수학적 재능의 변수들

2.1. 학습 활동의 기본적인 방법의 획득 : 정돈하여 공부하는 습관; 도식화하는 능력; 스스로 지식을 획득하는 능력; 결론을 유도해 내는 능력

2.2. 탐구적인, 그리고 창의적인 학습활동의 방법 획득 : 순차적으로 문제를 고찰하고, 그 사고를 논리적으로 정확히 분해하는 기교; 새로

운 문제를 설정하는 능력; 결론을 비교하는 능력

제 II 틀 : 완전한 수학적 활동을 보장하는 수학적 재능의 변수들

1. 학습자의 수학적 활동을 나타내는 변수들

1.1. 수학적 활동의 도입-방향 설정의 단계 : 구체적인 상황에서 문제의 수학적 형성으로, 문제의 본질이 표현된 도식으로 이동해 가는 능력; 주어진 기하학적 대상의 요소를 분석하는 능력; 결론을 사용하는 능력; 주어진 전제에서 논리적인 결론을 유도해 내는 능력.

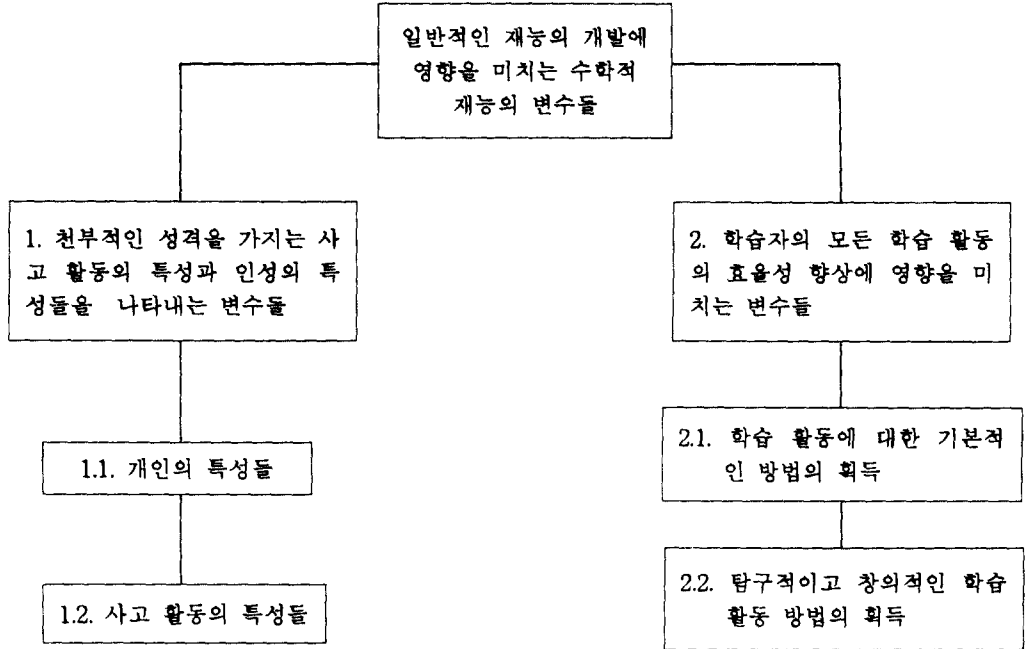
1.2. 지적인 활동의 단계 : 구체적인 자료에 제시된 범칙성의 관찰과 일반화; 수학적 구조의 분석; 수적으로, 공간적으로 주어진 것들을 비교하고 분류하는 능력; 수들이나 기하학적 도형의 다양한 요소들 사이의 관계성을 찾아내어, 그것을 나타내는 능력; 충분히 개발된 수학적 언어의 획득

1.3. 실제적인 활동의 단계 : 일반적인 원리의 활용과 추상적인 양들의 이용; 수학적인 도식과 관계의 조작; 수학적 귀납의 원리를 정확히 이해하고 사용하는 능력; 공간적인 도형을 생생하게 표상 하는 능력

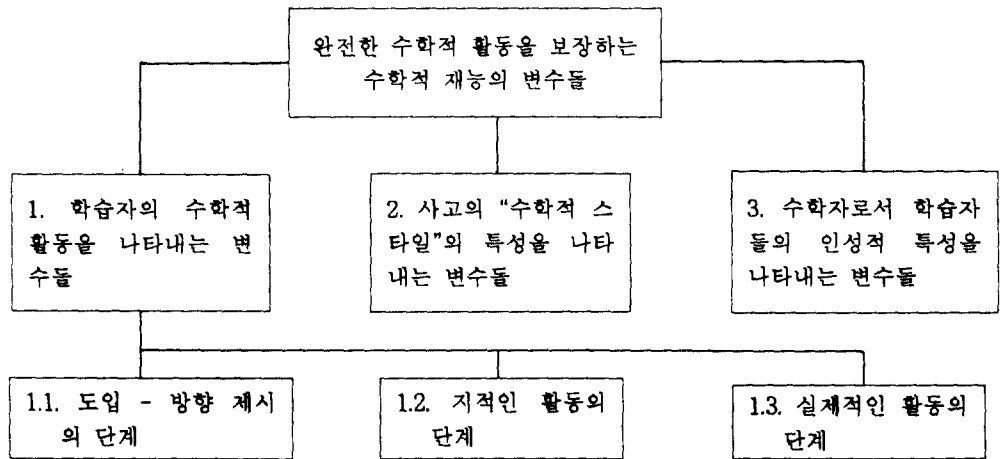
2. 사고의 수학적 스타일을 나타내는 변수들 : 사고 과정의 유연성; 수학적 고찰을 할 때, 사고 과정의 가역성; 고찰의 단계를 명확하게 분해하는 것; 사고와 그 기술의 간결성과 엄밀성; 풀이에 있어서 명료성, 평이성, 경제성, 그리고 합리성의 지향.

3. 천부적으로, 혹은 과정에서 수학적인 활동을 통달한 수학자로서의 학습자 인성 특성을 나타내는 변수들 : 모든 실제 현상에서 논리적이고 수학적인 의미를 찾으려는 경향성; 논리적인 토론, 논증의 습관; 학습 내용의 빠른 습득; 기하학적인 상상 혹은 기하학적인 직관; 수학 문제를 풀 때에 충분한 인내의 소유; 수학적 기억력.

제 I 플



제 II 플



III. 수학적 사고

일반적인 사고의 문제, 사고 방법의 문제, 사고의 개발에 관한 문제들은 충분히 어렵고, 아직 충분히 연구되지 않았지만, 몇몇 심리학자들(예를 들면, 러시아의 투빈슈타인, 비고츠키, 레온뜨예프 등등)의 거대한 연구 성과들도 있었고, 이러한 연구들은 우리에게 큰 영향을 미쳐왔다. 사고와 관련된 몇 가지 견해를 규정해보자 : ① 사고 과정 - 이것은 분석, 그리고 분석에 의해 얻어진 것의 종합이다. ② 사고에서 최초의 메커니즘은 종합을 통한 분석이다. ③ 모든 다른 사고 방법들은 분석과 종합의 산물들이다. 분석은 ① 어떤 대상(현상, 과정)이나 대상의 성질들을 부분으로 혹은 요소들로 분해하는 사고 과정, ② 어떤 대상에 대하여 그 대상의 학습 요소들을 뽑아내는 것, ③ 어떤 대상에 대하여 그 대상의 성질들, 여러 측면들, 그들 사이의 관계 등을 뽑아내는 것이다. 모든 것들이 분석의 대상이 될 수 있으며, 심지어는 임의의 심리학적 행위, 감각, 지각, 표상, 사고의 방법들, 임의의 학술적인 이론들도 분석의 대상이 될 수 있다.

중중 분석은 다단계의 과정으로 이해되기도 한다. 즉, 첫 번째 분석에서 얻어진 결과는 다시 더 심오한 분석의 대상이 되어지고, 이러한 이동(어떤 수준의 분석이 다른 더 깊은 수준의 분석으로)은 인식의 단계에서 발생하는 새로운 문제의 성격이나 요구들에 의해 정의된다.

종합은 분석에 의해 분리된 부분들을 새로운 어떤 思考體로 결합하는 과정으로, ① 분석되어진 것들의 단순화, ② 그 속에서 사고체를 구성하는 중요한 관계들을 찾아내는 것, ③ 인식에서 새로운 결과를 얻는 것 등과 관련되어 진다.

분석된 결과에 대한 종합적인 사고 활동은 새로운 진리를 발견하는 강력한 도구가 되며, 학문의 발전에 있어서 방향성을 제시해 주는, 새로운 시대를 위한 그러한 사상 등의 형성에 있어서 중요한 역할을 한다. 그리고, 종합은 분

석의 대상을 재생산하며, 이때 이 종합은 우리가 분석을 할 때까지 가지고 있었던 지식들을 정교화, 심화시키고, 더 풍부하게 해 준다. 이와 같이 종합은 분석의 역 과정이라고 할 수 있으며, 실제적인 혹은 인지적인 활동 속에서 분석과 종합의 사고 과정은 독립적으로 존재하는 고립적인 사고 과정이 아니라 서로 결합하여 연속적으로 이루어지며, 모든 사고의 기초가 된다.

뿐만 아니라, 수학 분야에서 분석과 종합은 과학적인 인식의 방법으로써 매우 중요한 역할을 하며, 수학 교수법 분야에서도 분석과 종합은 사고 전개와 과정에서 상반되는 사고 과정을 일컫는다 : 분석 - 구해야 하는 것, 증명해야 하는 것으로부터 주어진 것으로, 혹은 이미 확인된 것으로의 사고 활동, 종합 - 주어진 것들을 결합하여 결론을 유도하는 사고 활동. 물론, 이 두 가지 사고 활동 각각만으로 학습자들이 수학 학습에서 발생되는 모든 상황에서의 사고를 설명할 수는 없다. 즉, 이 두 가지 사고 유형이 결합된, 즉 분석을 통한 종합, 종합을 통한 분석 등등의 사고 활동을 생각할 수 있다. 이러한 사고 활동에 대해서는 다음 기회에 상세히 언급할 것이다.

학습자의 이러한 분석, 종합의 사고 활동을 개발시키는 것은 수학교육에서 매우 중요하다. 그러나, 대부분의 교과서나 학습용 참고서들을 보면, 종합적인 사고들이 강조되는 문제들이 대부분이고, 실제로 창의적인 수학 활동과 좀더 밀접히 관련된 분석적인 사고는 빈약하다. "삼각형의 각의 합"에 대한 종합적 사고 활동, 분석적 사고 활동과 관련된 문제들을 생각해 보면 다음과 같다.

종합적 사고 활동

1. 삼각형에서 다음과 같이 두 각이 주어졌을 때, 미지의 각을 구하여라.

① $50^\circ, 30^\circ$ ② $40^\circ, 75^\circ$ ③ $65^\circ, 80^\circ$

2. 삼각형 ABC에서 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 :$

3 : 4일 때, 모든 각들을 구하여라.

3. 밑변이 AC인 이등변 삼각형 ABC에 각의 이등분선 AD를 그었다. 만약 $\angle C = 50^\circ$ 일 때, 각 ADC의 크기를 구하여라.

4. 정삼각형 ABC에 중선 AD를 그었다. 삼각형 ABD의 각들을 구하여라.

분석적 사고 활동

1. 삼각형의 각들 중에서 한 각이 직각일 때, 다른 각이 둔각이 될 수 있는가?

2. 삼각형에서 임의의 두 각의 합이 90° 보다 클 때, 이 삼각형은 어떠한 형태인가? 임의의 두 각의 합이 120° 보다 작은 삼각형은 존재하는가? 삼각형의 임의의 각이 나머지 두 각의 합보다 작을 때, 이 삼각형은 어떠한 형태인가?

3. 이등변 삼각형의 밑변에 인접한 각이 다음과 같을 수 있는가? ① 직각 ② 둔각 ③ 예각

4. 이등변 삼각형에서 밑변과 이에 인접한 각들의 이등분선은 어떠한 삼각형을 형성하는가?

IV. 결론

러시아는 수학이나 수학교육과 관련해 깊은 역사를 가지고 있고, 지금도 그에 대한 연구들

이 활발하게 진행되고 있다. 지금까지 러시아에서의 수학교육에 대한 연구들을 토대로, 그리고 필자들의 연구 결과들을 중심으로 수학교육의 목적, 수학적 재능, 수학적 사고 등에 대해서 소개하였다. 물론, 이 짧은 글을 통해서 그 경험들을 모두 소개하는 것은 거의 불가능하리라 생각된다. 그러나, 이미 한국 내에서도 러시아의 수학교육에 대한 연구물들과 성과들이 제시되고 있고, 또한 이 글을 출발점으로 하여 러시아의 수학교육에 대한 러시아에서의 연구물들을 계속 발표할 예정으로 있다.

참 고 문 헌

- 구세프 V. A. (1994). 어떻게 학생들이 수학을 사랑하도록 도울 것인가? 모스크바: 아반가르드.
- 끄루메츠키 V. A. (1968). 학생들의 수학적 재능의 심리학. 모스크바: 교육부.
- 레온드예프 A. N. (1983). 엄선된 심리학 연구 결과들. 모스크바: 교육부.
- 루빈슈타인 C. L. (1958). 사고와 그것의 탐구 방법에 대하여. 모스크바: 소연방아카데미 출판사.
- 비고츠키 L. S. (1956). 엄선된 심리학 연구들. 모스크바: 소연방아카데미 출판사.