

## 원시곡면 위의 유한요소망 자동생성 기법

이 재 영\*

### Techniques of Automatic Finite Element Mesh Generation on Surface Primitives

Jae Young Lee\*

#### ABSTRACT

Complex geometric shapes can be defined simply and efficiently by combining and operating various surface primitives. These primitives and their intersection curves are used in finite element mesh generation to form an easy and intuitive procedure for finite element modelling of curved surfaces. This paper proposes techniques of automatic mesh generation on surface primitives with arbitrarily shaped boundaries and control curves, which may be created by surface to surface intersection. A method of automatic mesh generation on plane, which was previously developed by the author, has been modified for application to the surface mesh generation. Owing to the mesh generation-wise differences between planes and surfaces, the surfaces should be transformed into conceptual plane so that the modified plane mesh generation method can be applied. Surface development, mapping and mesh reconstruction are the key techniques suggested in this paper. The selection of the technique to apply can be determined automatically on the basis of the developability, existence of singularity and other characteristics of the surfaces on which the mesh is to be generated. The suggested techniques were implemented into parts of mesh generation functions of the finite element software, MacTran. Their validity and practicality were manifested by the actual use of this software.

**Key words :** Automatic mesh generation, Finite element analysis, Finite element preprocessing, Surface mesh

#### 1. 서 론

유한요소해석을 위해서는 해석영역을 여러개의 요소로 분할하여 요소망을 생성하여야 한다. 일반적으로 유한요소망은 형상이 매우 복잡하며, 방대한 양의 데이터로 구성된다. 또한 요소망의 상태는 해석 결과의 정확도와 밀접한 관계가 있다. 그러므로 요소망의 생성은 유한요소해석 과정에서 매우 중요한 부분을 차지하고 있다.

요소망을 생성하는 방법은 여러가지가 개발되어 이용되고 있다<sup>[1]</sup>. 스위핑(sweeping), 엑스트루션(extrusion), 로프팅(lofting), 매핑(mapping) 등의 기법

은 초기부터 지금까지 여러 유한요소해석 전처리 소프트웨어에서 널리 이용되어 왔다<sup>[2,3]</sup>. 그러나 이들 방법으로 생성할 수 있는 요소망은 규칙적인 형상으로 제한된다. 불규칙하고 복잡한 영역을 모델링하기 위해서는 요소망 자동생성(automatic mesh generation) 방법이 필수적으로 요구된다. 요소망 자동생성을 위한 여러가지 알고리즘이 개발된 바 있다. 그중에서 대부분은 평면 영역에 국한된 기법<sup>[4,5,6,7,8]</sup>들이며, 곡면과 부피를 갖는 입체에 대한 요소망 생성 알고리즘은 불과 몇가지만이 제안된 바 있다<sup>[9,10,11]</sup>. 그러나 이 논문에서 제안하는 바와 같이 원시곡면 위에 요소망을 자동생성하는 기법은 아직까지 문헌으로 보고된 바 없다.

원시곡면은 CAD, 그래픽 소프트웨어, 유한요소해

\*정회원, 전북대학교 농공학과

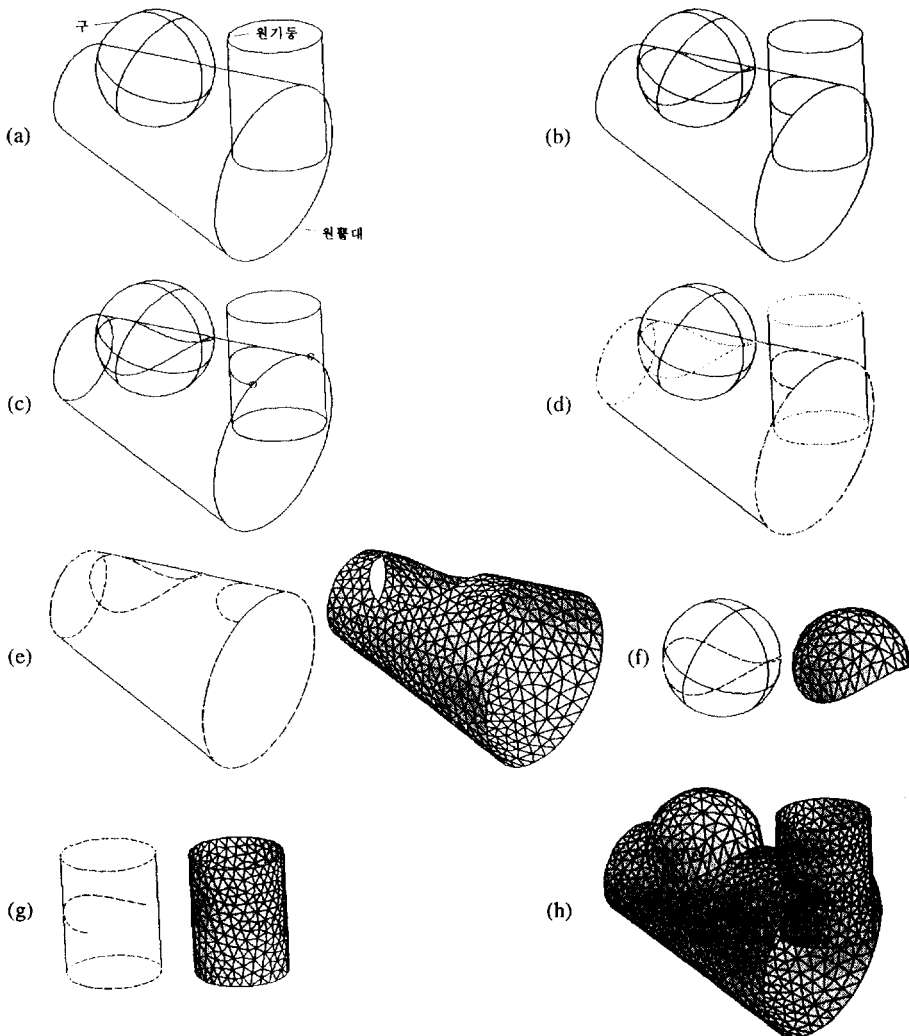
석 소프트웨어 등에서 간편하게 생성하여, 효율적으로 다룰 수 있을 뿐만 아니라 데이터의 양이 작다는 장점을 지니고 있다. 또한 이들을 교차시키고, 조합함으로써 무궁무진한 형태의 모델을 만들 수 있다. 그러므로 원시곡면을 정의하고, 그 위에 요소망을 자동생성시키는 것은 매우 직관적이며 간편하고 효과적인 유한요소의 모델링 방법이다.

이 연구에서 제안하는 방법은 기존의 소프트웨어에서 다루는 거의 모든 형태의 원시곡면에 적용할 수 있는 보편성을 지니고 있으며, 곡면들의 교차와

조합의 복잡성에 제한을 받지 않는다. 그러므로 이 방법은 유한요소해석을 위한 곡면 모델을 손쉽게 생성할 수 있는 도구로 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 이 방법은 저자가 개발한 유한요소해석 소프트웨어 MacTran<sup>12)</sup>에 적용되었으며, 또한 이 소프트웨어를 이용하여 그 실용성과 타당성을 검증하였다.

## 2. 원시곡면과 요소망 생성

이 논문에서 원시곡면이란 기둥면, 구면, 원환면,



**Fig. 1.** An example of mesh generation on surface primitives bounded by their intersection and bounding curves. (a) Creation of primitive surfaces (b) Curves constructed by intersection of surface primitives. (c) Points constructed by intersection of curves. (d) Segmentation of control curves. (e)(f)(g) Mesh generation on surface primitives bounded by control curves. (h) Completed meshes.

Bezier곡면, Spline곡면 등과 같이 길이, 반경, 중심좌표, 또는 조절점 좌표 등 몇개의 속성에 의해서 기하학적 형상이 정확하게 정의되는 곡면을 의미한다. 이들 원시곡면은 매우 간단한 데이터 구조를 가지며, 캐드나 그래픽 소프트웨어에서 쉽게 생성하고, 효율적으로 기억할 수 있다. 또한 여러개의 원시곡면을 조합하여 복잡한 형상을 쉽게 모델링할 수 있는 유연성을 지니고 있다. 유한요소해석을 위한 요소망의 생성도 이러한 원시곡면을 이용함으로써 효과적으로 달성할 수 있다. 원시곡면을 이용하여 생성된 유한요소망의 모든 절점의 좌표는 곡면 위에 있어야 하며, 또한 다음과 같은 몇가지 요건이 충족 되도록 제약되어야 한다.

1) 곡면 사이의 교차선과 곡면의 경계선 위에 일부

요소의 모서리가 정확하게 겹쳐야 한다.

2) 교차선 양쪽에서 마주보는 요소들이 공유하는 모서리의 절점 좌표가 정확하게 일치하여야 한다.

3) 요소가 소정의 밀도를 가지면서 점진적으로 변하도록 분포하여야 한다.

4) 생성되는 모든 요소의 형상비가 양호해야 한다.

위와 같은 조건을 충족시키는 유한요소망을 생성하기 위해서는 단순한 그래픽 모델링보다 훨씬 더 까다로운 연산이 필요하다. Fig. 1은 원시곡면을 이용하여 요소망을 생성하는 과정을 예시한 것이다. 원시곡면을 만든 다음에 곡면과 곡면 사이의 교차선을 구하고, 또한 교차선과 교차선, 또는 곡면의 경계선과 교차선 사이의 교차점을 구하여 교차선이나 경계선의 불필요한 부분을 제거한다. 각각의 곡

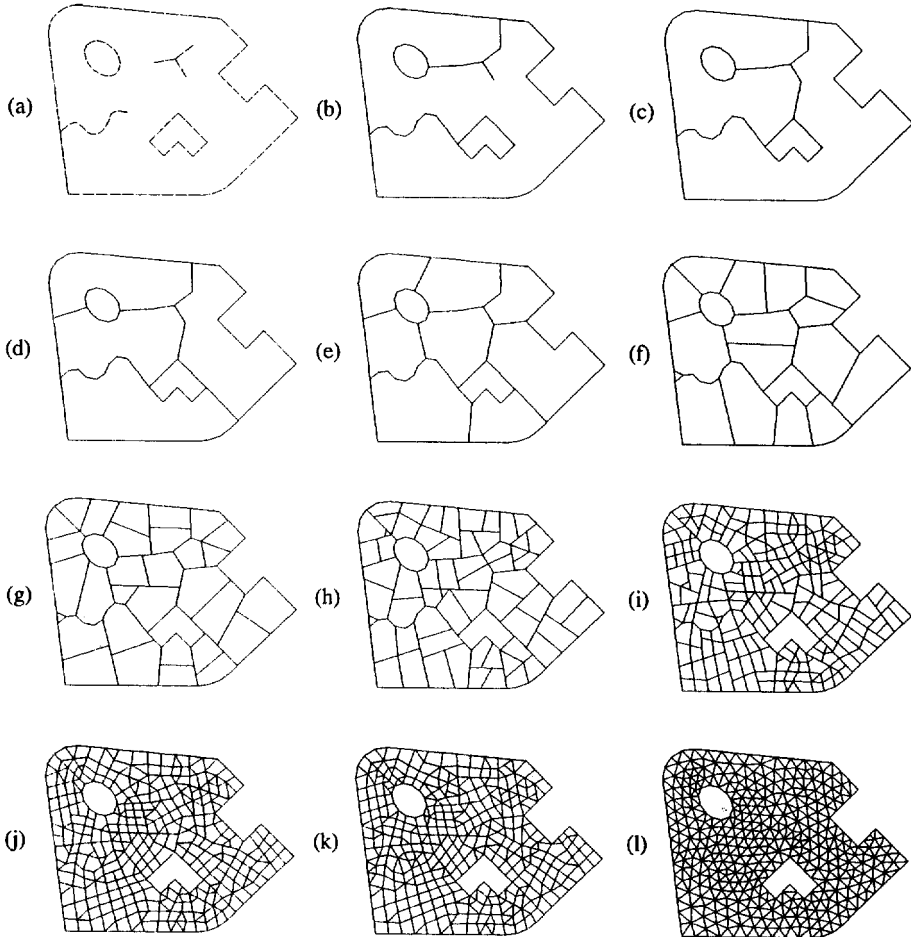


Fig. 2. Step-by-step procedure of the mesh generation on a planar domain.

(a) Bounding curves and control curves defined over the domain. (b) Construction of super loops. (c) — (k) Recursive subdivision of the domain. (i) Completely generated mesh.

면에 대하여 교차선과 경계선을 조절곡선으로 하여 요소망을 생성하면, Fig. 1(h)와 같은 형상의 유한요소 모델이 완성된다.

### 3. 요소망 자동 생성의 기본 알고리즘

이 논문에서 제안하는 곡면 위의 요소망을 자동 생성하는 알고리즘은 평면 위에 요소망을 생성하는 알고리즘을 곡면에 맞도록 변형한 것이다. 이 평면 위의 요소망 생성 방법은 저자가 이전 연구<sup>12, 13, 14</sup>에서 개발한 바 있다. 여기서는 이에 관해서 구체적인 설명을 생략하고, 그 원리만을 개략적으로 기술하고, 이 방법을 어떻게 응용하여 곡면 요소망을 생성하는지에 대해서 논하고자 한다.

#### 3.1 평면 위의 요소망 자동 생성 알고리즘

이 연구에서 응용한 평면 요소망 생성 방법에 의하면 Fig. 2에 예시된 바와 같이 복잡한 형상의 평면 영역에 요소망을 한번에 자동으로 생성할 수 있다. 이 방법에 의한 요소망 생성과정은 다음과 같이 몇 단계로 구성된다.

- 1) 외곽경계선, 내부의 구멍, 크랙 등을 따라서 배치된 절점들을 연결하여 링크(link)를 만든다.
- 2) 링크들을 하나로 연결하는 슈퍼 루프(super loop)를 형성한다. 이때 슈퍼루프는 연속적인 하나의 경계선을 이루어 영역 전체를 둘러싼다.
- 3) 슈퍼 루프 상의 두 절점을 연결하는 최적의 분할선을 찾는다.
- 4) 최적의 분할선에 의해서 영역을 두개의 소영역으로 분할한다. 이때 각각의 소영역을 둘러싸는 루프가 형성된다.
- 5) 새로 형성된 루프를 슈퍼루프로 하여 3), 4)의 과정을 반복한다.
- 6) 위의 3), 4), 5)의 과정을 되풀이하면 점점 작은 소영역이 형성되며, 슈퍼루프상의 절점 수가 일정한 기준보다 작아지면 요소를 생성한다.
- 7) 모든 소영역이 요소로 분할된 다음에는 부적합 형상의 요소를 추출하여 재형성하고, 평탄화(smoothing)를 통해서 요소의 형상을 최적화한다.

이 방법은 기존의 루핑법(looping method)<sup>15</sup>과 유사한 점이 있으나, 슈퍼루프의 형성과정과 최적 분할선의 결정방법이 기존의 방법보다 간편하고 효율적이며, 또한 이 논문에서 제안하는 바와 같이 곡면 요소망 생성에 쉽게 응용할 수 있다는 장점을 지니고 있다.

### 3.2 평면의 알고리즘을 응용한 곡면 위의 요소망 생성

앞에서 기술한 바와 같이 평면 위의 요소망 자동 생성 알고리즘을 응용하여 곡면 위에 요소망을 생성한다. 곡면과 평면은 서로 다른 기하학적 특성을 지니고 있기 때문에 요소망 생성을 위한 실제의 계산 과정에서는 달리 처리해야 할 문제들이 여러가지가 있다. 평면 위에 요소망을 생성하는 알고리즘을 곡면에 적용하려면 요소망 생성 과정의 모든 연산이 평면으로 전개된 공간상에서 이루어져야 한다. 그러나 곡면의 종류에 따라서는 평면으로의 전개가 불가능하며, 또한 평면과 유일하게 매핑할 수 없는 경우도 있다. 그러므로 모든 곡면에 보편성있게 적용할 수 있는 알고리즘을 세우는 것은 불가능하거나 또는 매우 어렵다. 따라서, 곡면의 평면 전개 가능성, 평면과의 매핑 특성, 곡면 상의 조절선 등에 따라서 곡면의 전개, 평면과의 매핑, 국부적인 요소망 재구성 등, 몇가지 처리 과정을 통해서 평면화된 공간 상에서 계산을 진행한다. 이를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 전개가능한 곡면: 평면으로 전개하여 요소망을 생성한 후에 곡면으로 복귀한다.
- 2) 특이점이 없는 폐곡면: 매개변수 공간 상에서 평면으로 전개한 다음에 요소망을 생성하고, 원래의 곡면으로 환원한다.
- 3) 특이점이 있는 폐곡면-요소망 생성 영역이 국부적인 경우: 투사에 의해 평면과 매핑하여 요소망을 생성한 뒤에 원래의 좌표계로 환원한다.
- 4) 특이점이 있는 폐곡면-요소 생성 영역이 지배적이고 조절선 배치가 국부적인 경우: 전체 영역을 몇개로 나누어 요소망을 생성한 후에 조절선 부근의 요소망을 제거하고, 조절선에 맞추어 재생성한다.
- 5) 특이점이 있는 폐곡면-요소 생성 영역이 지배적이고 조절선 배치가 널리 퍼져있는 경우: 영역을 두개 이상으로 분리하고, 각각의 분리된 영역을 평면과 매핑하여 요소망을 생성한 뒤에 원래의 좌표계로 환원한다.
- 6) 매개변수 곡면: 매개변수 공간상에서 실제 좌표 계상의 거리 보정을 적용하여 요소망을 생성한 다음에 직각좌표계로 환원한다.

곡면과 조절선이 주어지면 어떤 과정을 거쳐서 요소망을 생성해야 할지가 위의 기준에 따라서 자동으로 결정된다.

### 4. 곡면의 전개에 의한 요소망 자동 생성

곡면 위에 요소망을 생성하는 가장 직관적인 방법은 곡면을 평면으로 전개하여, 평면의 알고리즘을 적용한 다음에 원래의 곡면으로 복귀시키는 방법이다. 여기서 곡면의 전개는 수학적 전개 가능의 여부에 따라서 각기 다른 의미를 가지며, 또한 다른 처리 과정을 필요로 한다.

#### 4.1 전개 가능한 곡면의 전개

전개 가능한 곡면은 일단 평면으로 전개되면 평면의 요소망 생성 알고리즘을 그대로 적용할 수 있다. 2차곡면으로서 전개 가능한 곡면은 기둥면, 원뿔대면, 원뿔면 등이다. 2차곡면을 전개하기 위해서는 먼저 곡면의 한 부분을 절단하여 절개하여야 한다. 경우에 따라서는 곡면의 어느 부위를 어떻게 절개할 것인지가 매우 어려운 문제이다. 전개 가능한 곡면을 평면으로 전개하여 요소망을 생성하는 과정을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 절단선을 설정하여 곡면의 한 부분을 절개한다. 절단선은 요소 생성 영역의 경계선이 된다.
- (2) 곡면을 평면으로 전개한다. 즉 곡면 위에 있는 경계곡선의 절점 좌표를 평면좌표로 전환한다.
- (3) 평면의 자동 요소 생성 알고리즘을 적용하여 펼쳐진 평면 위에 요소를 발생시킨다.
- (4) 요소 발생 과정에서 생성된 절점의 좌표를 원래의 좌표계로 환원하여 곡면 위에 위치하도록 한다.
- (5) 절점의 좌표를 이동시켜서 요소의 형상을 평탄화한다. 이때 절단선 양쪽에 있는 요소 및 절점의 좌표가 서로 연계되도록 하여, 절단선이 부자연스럽게 남지 않도록 한다.

기둥면, 원뿔면, 원뿔대면 등, 2차곡면의 매개변수 방정식에서  $u$ 는 둘레 방향,  $v$ 는 길이 방향으로 정규화된 매개변수이다. 계산을 편리하게 하기 위하여 절단선의 위치를  $u=0$ , 또는  $u=1$ 로 정한다. 따라서 곡면을 전개하면, Fig. 4에서 보는 바와 같이 요소 발생 영역의 경계선이 형성된다. Fig. 3에 표시된 바와 같이 기저원의 중심을 원점으로 하고, 중심축을  $z'$ 축으로 하는  $(x',y',z')$  좌표계에 대하여

$$\begin{aligned} x' &= \left\{ r_1(1-v) + r_2v \right\} \sin\theta \\ y' &= \left\{ r_1(1-v) + r_2v \right\} \cos\theta \\ z' &= hv \end{aligned} \tag{1}$$

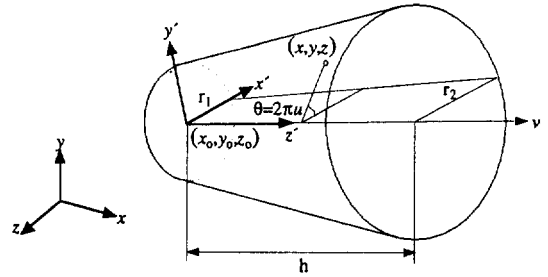


Fig. 3. Base parameters of cylinder, cone and truncated cone, and their reference coordinate systems.

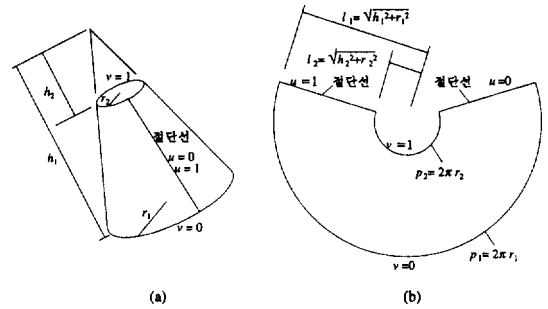


Fig. 4. Development of surface Primitives. (a) Actual shape of the surface. (b) Developed surface.

로 표현된다. 여기서  $h$ 는 길이이고, 원둘레 방향의 중심각은  $\theta=2\pi u$ 이며,  $r_1$ 과  $r_2$ 는 양쪽 끝에서 만들어지는 원의 반경이며, 기둥면의 경우에는  $r_1=r_2$ 이고, 원뿔면의 경우에는  $r_1=0$ , 또는  $r_2=0$ 이며, 원뿔대면의 경우에는  $r_1 \neq r_2$ 이다. 한편 평면으로 전개한 좌표  $(x_p, y_p)$ 는 다음의 식(2)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R &= l_1(1-v) + l_2v \\ \alpha &= 2\pi u \frac{r_1}{l_1} \\ x_p &= R \sin \alpha \\ y_p &= R \cos \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

위의 식은 가장 일반적인 원뿔대면에 대한 것이며, 원뿔면에 대해서는  $l_1=0$ , 또는  $l_2=0$ 을 적용하면 된다. 한편 기둥면의 경우에는 간단하게

$$\begin{aligned} x_p &= 2\pi u r \\ y_p &= v l \end{aligned} \tag{3}$$

으로 계산된다. 여기서  $r$ 과  $l$ 은 각각 기둥면의 반경과 길이이다. 기둥면을 전개하면 직사각형의 평면이 만들어지며, 원뿔대면은 부채꼴 모양의 평면으로 펼쳐진다. 계산의 효율성을 높이기 위해서는 뒷 식

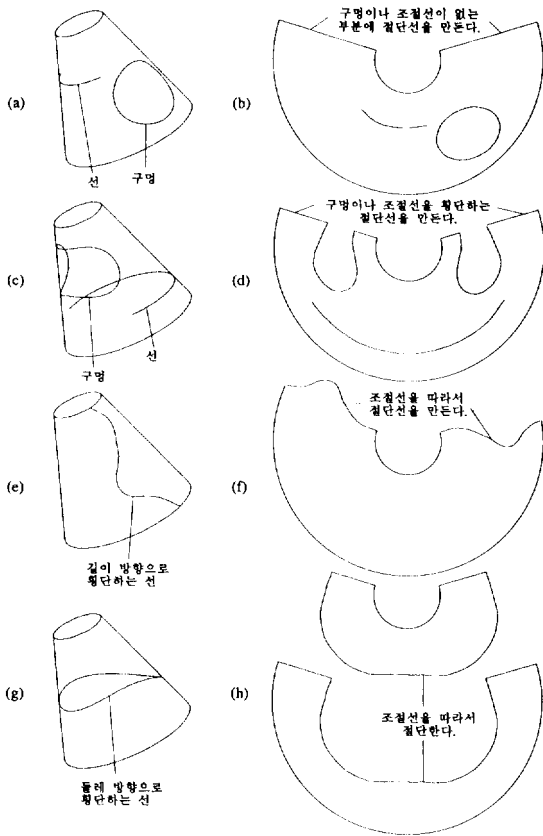


Fig. 5. Creation of a curve dividing the surface for development.

- (a) (b) A case in which the dividing curve can be made without crossing cavities or control curves.
- (c) (d) A case in which the dividing curve crosses cavities or control curves.
- (e) (f) A case in which the dividing curve is made along a control curve in axial direction.
- (g) (h) A case in which the dividing curve is made along a control curve in radial direction.

들에 포함된  $l_1, l_2$  등의 값을 초기에 계산하여 곡면의 데이터 구조 속에 기억시켰다가 반복적으로 사용하는 것이 바람직하다.

곡면을 평면으로 전개하는데 있어서 가장 어려운 문제는 절단선의 위치를 정하는 것이다. 곡면 위에서 절단선에 인접한 두점이 전개된 평면 위에서는 양쪽 끝으로 떨어지게 되게, 그 결과 요소망 생성이 부적합하게 이루어질 수도 있다. 곡면의 절단과 평면 전개를 간단하게 하려면 Fig. 5(b)에 보인 바와 같이 절단선은 직선으로 하되, 가끔적 구멍이나 선을 통과하지 않도록 정하는 것이 바람직하다. 이를 위

해서 경계곡선들의 매개변수 값을 검사하여 둘레 방향으로 절단선을 통과시킬 수 있는 최적의 위치를 찾는다. 그러나 이와 같이 절단선을 정하는 것이 불가능하거나 매우 어려울 경우가 있다. 이때에는 Fig. 5(d)에 보인 바와 같이, 구멍이나 선을 지나서 절단선을 정하고, 이들 구멍과 선을 따라서 요소발생 영역의 경계선을 수정한다. 만일 Fig. 5(c)와 같이 곡면의 길이 전체에 걸쳐서 곡선이 존재할 경우에는 이 곡선을 절단선으로 정하는 것이 편리하다. 또한 Fig. 5(g)와 같이 곡면의 둘레 방향으로 고리가 형성되어 있는 경우에는 이 고리를 따라서 곡면을 분리시키고, 앞에서 기술한 바와 같이 절단선을 정한다.

전개된 평면위에서 요소의 발생과 평탄화가 완료되면, 생성된 절점의 좌표를 원래의 실제 좌표계로 환원하여 곡면의 형상을 복구하여야 한다. 이는 절점 좌표의 매개변수 값을 계산하여 평면으로 전개하는 과정의 역순으로 진행한다.

#### 4.2 폐곡면의 매개변수 전개

구면이나 원환면과 같은 폐곡면은 직각좌표계 상의 평면으로 전개할 수 없다. 그러나 원환면과 같이 특이점을 갖지 않는 곡면은 매개변수 공간상에서 평면으로 전개할 수 있다. 폐곡면의 전개과정은 앞에서 기술한 전개가능한 곡면의 전개과정과 동일하다. 다만 전개된 평면의 좌표는 매개변수로 표시된다. 원환면의 방정식은 원환면의 중심을 원점으로 하고, 회전축을 z축으로 하는  $(x', y', z)$  좌표계에 대하여

$$\begin{aligned} x' &= (r_1 + r_2 \cos \theta_r) \cos \theta_a \\ y' &= (r_1 + r_2 \cos \theta_r) \sin \theta_a \\ z' &= r_2 \sin \theta_r \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 여기서  $r_1$ 과  $r_2$ 는 각각 원환면의 큰원과 작은 원의 반경이며

$$\begin{aligned} \theta_a &= 2\pi u \\ \theta_r &= 2\pi v \end{aligned} \tag{5}$$

이다.

이 경우에도 가장 어려운 문제는 절단선의 위치를 정하는 것이다. 원환면과 같이 양쪽으로 닫힌 폐곡면은 u와 v방향으로 각각 절단선을 정하여야 한다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 원환면은 두 단계에 걸쳐서 전개된다. 즉 일직선의 기둥면과 같이 전개하고, 이 기둥면을 다시 평면으로 전개한다. 곡면의 전개 순서에 따라서 v방향으로 절개하는 절단선을 먼저

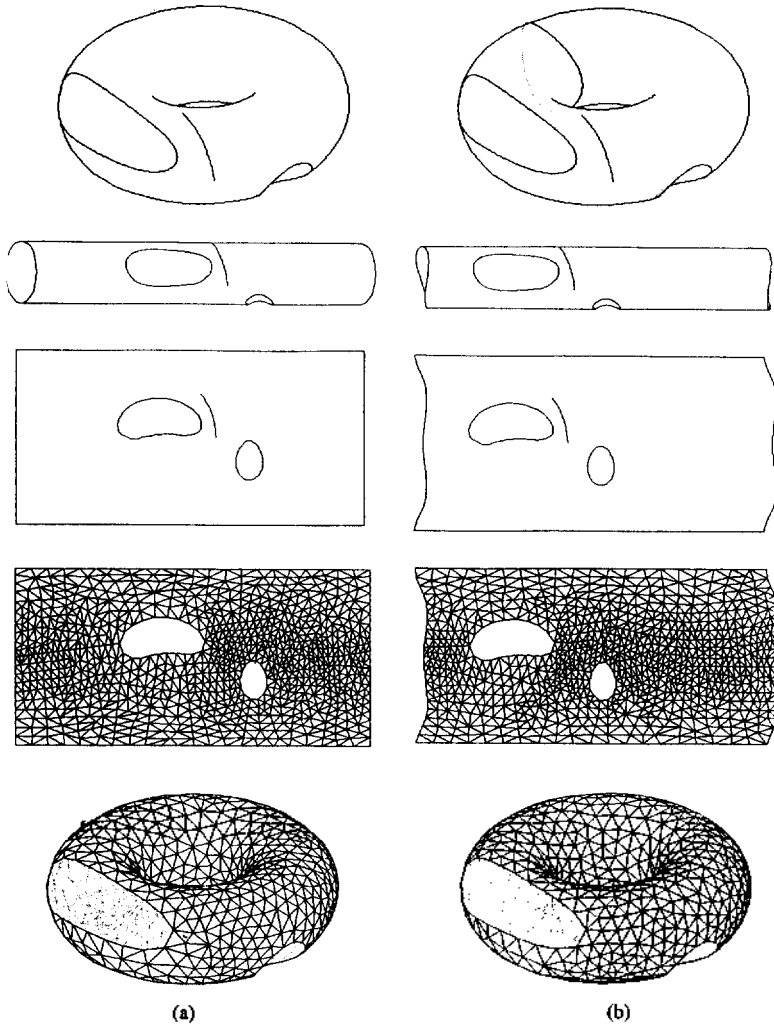


Fig. 6. Procedure of generating a mesh on a torus.

- (a) A case in which the surface is developed along an artificially assumed dividing curve.
- (b) A case in which the surface is developed along a control curve.

설정된 다음에  $u$ 방향의 절단선을 설정한다. 이 때 절단선은 앞에 기술한 기둥면과 동일한 원리와 방법에 따라서 결정된다.

곡면의  $u$  또는  $v$  방향으로 한바퀴 돌아가는 고리가 형성되어 있는 경우에는 이 고리가 곡면을 전개하는 절단선으로 이용된다. 특히 이러한 고리가 하나일 경우에는 Fig. 6에 예시한 바와 같이 이 고리에 의해서 절단선이 만들어지고, 매개변수 평면을 펼쳤을 때, 이 절단선은 양쪽 끝 경계선을 형성하게 된다.  $u$  방향의 고리가 존재할 경우에는 먼저 기둥면으로 전개한 다음에 평면으로 펼치는 단계에서 이 고리를 절단선으로 이용한다.

폐곡면을 평면으로 전개하여 요소를 생성할 경우에 별도의 처리를 필요로 하는 것은 절단선 부근에서의 평탄화(smoothing)이다. 절단선은 인위적으로 만든 경계선이지만 평면으로 전개한 상태에서 요소망을 발생시키면, 이 경계선에 의해서 제약을 받게 되며, 절단선의 자취가 부자연스럽게 남는다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 평탄화 과정에서는 평탄화 계산 부위가 항상  $u=0.5$ 에 가깝게 되도록 일시적인 좌표변환을 하고, 계산이 끝난 다음에 원래의 좌표로 환원하는 방법을 사용한다. 즉 특정한 절점, 또는 요소를 중심으로 평탄화를 진행하려면, 먼저 계산에 포함되는 모든 절점의 매개변수를  $\Delta u$  만큼 이동하여

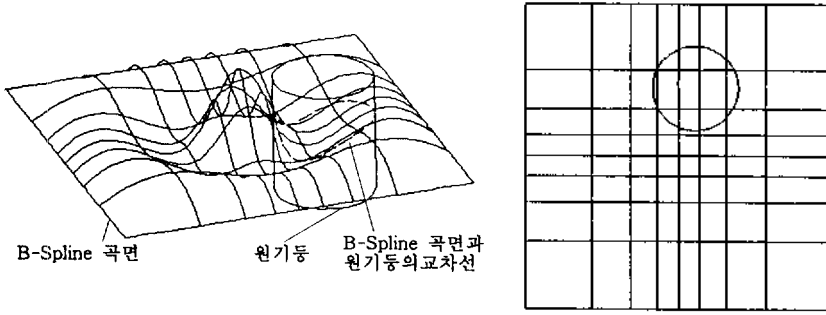


Fig. 7. B-spline surface on which an automatic mesh generation is to be imposed.

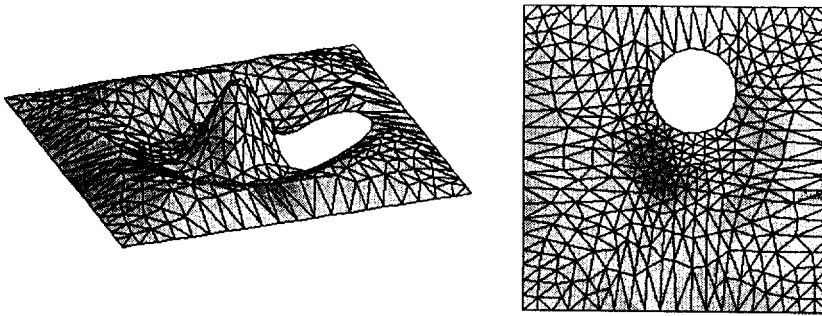


Fig. 8. A mesh generated by operations on the parametric space.

$$u' = u + \Delta u \tag{6}$$

로 만든 다음에  $u'$ 에 해당되는 평면 전개 좌표에 의해서 평탄화 계산을 하고, 다시 원래의 좌표로 환원한다. 여기서  $\Delta u$ 는 이동하려는 절점의 매개변수가 0.5에 오도록 하는 값이다.

### 5. 매핑을 이용한 요소망 생성

곡면 위에 있는 요소 생성 영역을 매핑에 의해서 평면화하고, 매핑된 공간 상에서 평면 알고리즘을 적용하여 요소망을 생성한 다음에 원래의 좌표계로 환원한다. 이 연구에서는 곡면의 종류에 따라서 매개변수 공간과 매핑하는 방법과 평면에 투사하여 매핑하는 방법을 적용하였다.

#### 5.1 매개변수 공간과의 매핑

곡면위에 있는 임의점의 좌표는 식 (7)과 같이 매개변수의 함수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 매개변수  $u$ 와  $v$ 를 두 직각 좌표축으로 하는 평면 위에서 평면 알고리즘을 적용하여 요소망을 생성할 수 있다. 이 방법은 쌍매개변수(bi-parametric)의 함수로 정의되는 Bezier, B-spline, Ferguson 등의 곡면 패취에 대해서 적합하다. 이들 곡면 위에 있는 임의 점의 좌표는 일반적으로

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{mi}(u) C_{nj}(v) x_{ij} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \tag{8}$$

과 같은 꼴의 수식에 의해서 매개변수 평면과 매핑된다. 여기서  $m$ 과  $n$ 은 조절망의 양방향 격자점수이며  $x_{ij}$ 는 격자점의 좌표이다. 이 방법은 다음과 같은 3단계에 걸쳐서 아주 간단하게 실행된다.

(1) Fig. 7과 같이 곡면상의 임의 점의 좌표를 매개변수 공간좌표  $(u, v)$ 와 매핑하여, 경계선 및 조절선 위에 있는 모든 절점의 좌표를  $(u, v)$  좌표로 변환한다.

(2) 평면에 적용되는 요소망 자동생성 알고리즘을  $(u, v)$  평면에 적용하여 요소망을 발생시킨다.

(3) 요소망 생성과정에서 만들어진 모든 절점의 좌표를 원래의  $(x, y, z)$  직각 좌표로 환원한다.



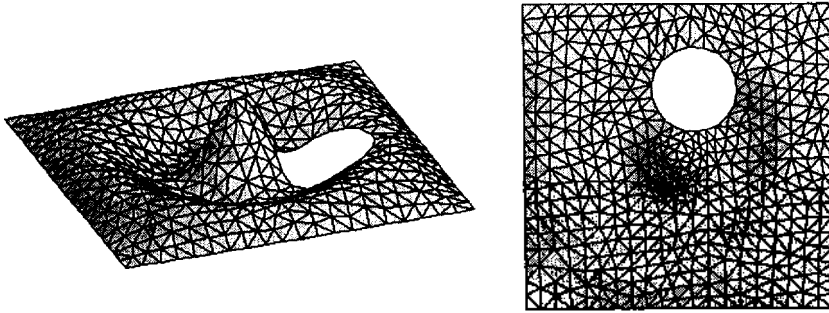


Fig. 9. A mesh generated with calibration of the actual distances in the cartesian coordinate space.

매개변수 공간의 매핑을 이용하는 방법은 원래의 평면 요소망 생성에 비해서 추가되는 계산이 미미하며 매우 단순하다는 장점이 있다. 또한 이 방법은 위에 열거한 곡면 폐쇄 뿐만 아니라 쌍매개변수로 표시되는 모든 곡면에 적용할 수 있다. 그러나 다음과 같은 문제점이 있다.

- 매개변수의 밀도가 국부적으로 불균등할 경우에, Fig. 8에서 보는 바와 같이 형상이 불량하고 불균일한 요소망이 생성된다.
- 매개변수 공간 상에서 특이점이 있으면, 그 주변에서 요소망의 조절이 불가능하다.
- 폐곡면에 적용하려면 가상의 절단선을 만들어서 전개하여야 하며, 이 절단선에 의해서 분리된 부분에는 인위적인 불연속으로 인해서 요소망에 결함이 생기기가 쉽다.

위의 문제점 중에서 일부는 곡면의 종류에 따라서 부분적으로 해결될 수 있다. 절점 사이의 거리를 계산하고, 새로운 절점의 좌표를 결정하는데 있어서는 실제의 좌표계를 이용하면 매개변수 밀도의 불균일로 인해서 요소의 형상이 불량해지는 효과를 어느 정도는 줄일 수 있다. Fig. 8은 요소망 생성을 위한 모든 과정을 매개변수  $(u, v)$  공간에서 진행하여 B-Spline 곡면 위에 요소망을 발생시킨 결과이다. 요소들이 국부적으로 과다하게 찌그러진 것을 볼 수 있다. 반면에 요소망 생성 과정 중에서 최단거리의 계산, 요소 밀도의 산정, 분할선 위의 절점 간격 결정 등에 있어서는 실제의  $(x, y, z)$ 좌표계를 적용하여 보정하면 Fig. 9와 같이 개선된 결과를 얻을 수 있다. 그러나 이와 같은 보정은 구면, 원뿔면 등과 같이 특이점이나 매개변수의 불연속점을 갖는 곡면에 대해서는 적절한 해결책이 못된다.

구면이나 원뿔의 경우에는 매개변수의 값이 존재하지 않는 특이점이 있으며, 매개변수 공간의 매핑에 의해서 발생하는 요소의 형태는 이러한 특이점

부근에서 극히 불량하다. 또한 매개변수가 불연속적으로 변화하는 위치가 존재하며, 이러한 부위를 적절히 처리하기가 용이하지 않다. 특히 평면의 요소 생성 알고리즘을 적용하려면 한 부분을 절개하여야 하는데, 인위적으로 만들어진 절단선의 자취가 생성된 요소의 경계선으로 부자연스럽게 남게된다. 그러므로 이 방법은 원뿔면, 구면, 원환면과 같은 곡면에는 적합하지 않다.

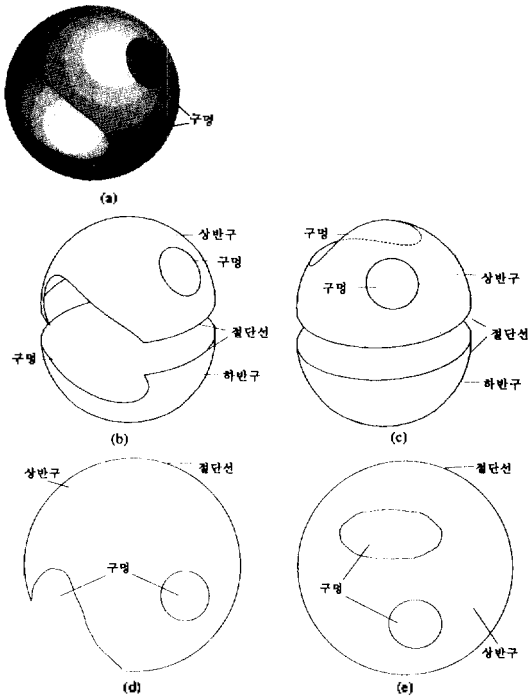
### 5.2 평면에 투사하여 매핑하는 방법

구면이나 타원면 등은 매개변수 공간에서 특이점이 생기는 폐곡면이기 때문에 매개변수를 이용한 매핑은 적합하지 않다. 이러한 곡면들을 평면과표제와 매핑하는 효과적인 방법은 곡면을 몇개의 부분으로 나누어, 국부적으로 각 부분을 평면에 투사하여 매핑하는 것이다.

곡면이 투사된 평면 위에서 평면의 요소망 생성 알고리즘을 적용하여 요소망을 생성하는 과정은 앞에 기술한 매개변수 공간과의 매핑을 통해서 요소망을 생성하는 방법과 유사하다. 그러나, 여기서 평면과 매핑하는 주된 목적은 요소망 생성을 위한 슈퍼 루프를 형성하고 루프와 관련된 연산에 평면의 알고리즘을 적용하기 위한 것이다. 요소망 생성에 필요한 절점과 절점 사이의 최단거리, 루프와 경로 사이의 각도, 발생되는 절점 간격 등을 계산하는데는 실제 좌표계를 이용한다. 이 방법을 적용한 요소망 생성과정은 편의상 구면을 예로 들어서 설명하고자 한다.

먼저 구면 위에 있는 임의점 좌표의 매개변수 표시에 대해서 기술하면 다음과 같다. 구의 중심을 원점으로 하는  $(x', y', z')$  국부 좌표계에 대하여

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta_u \cos \theta_v \\ y' &= r \sin \theta_u \cos \theta_v \\ z' &= r \sin \theta_v \end{aligned} \tag{9}$$



**Fig. 10.** Division of a surface for mapping with a plane.  
 (a) Closed surface.  
 (b) (d) A case in which the dividing curve crosses cavities.  
 (c) (e) A case in which the dividing curve does not cross cavities.

이다. 여기서

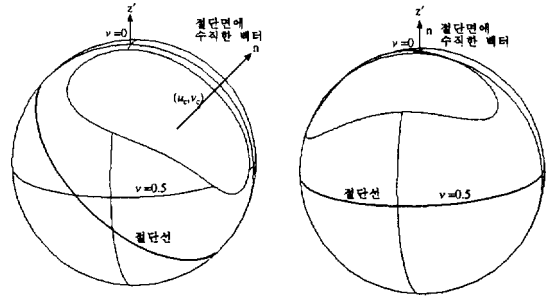
$$\theta_u = 2\pi u$$

$$\theta_v = (v - 0.5)\pi \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1) \quad (10)$$

는 매개변수를 각도로 전환한 값이다.

경계가 없는 폐곡면을 평면과 매핑하기 위해서는 먼저 두개 이상의 곡면으로 분리시켜서 경계선을 만들어야 한다. 구면의 경우에는 절단선을 설정하여 두개의 반구로 분리한다. 절단선은 Fig. 10(c)와 (e)에 예시한 바와 같이 구멍이나 조절선, 또는 경계선을 절단하지 않도록 정하는 것이 좋다. 부득이 절단하여야 할 경우에는 절단선이 경계선 상의 한 점과 만도록 정하여야 한다.

절단선을 설정한 다음에는 절단선을 매개변수의 값이  $v=0.5$ 인 위선과 일치시키거나 또는 그 부근에 오도록 좌표변환을 시킨다. 절단선에 의해서 형성되는 절단면에 수직한 (또는 개략적으로 수직한) 벡터를  $\mathbf{n}$ 이라고 하고,  $\mathbf{n}$ 과 수직하고 서로 직각을 이루는 임의의 두벡터  $\mathbf{l}$ 과  $\mathbf{m}$ 을



**Fig. 11.** Rotation of the parametric space.

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \quad (11)$$

이 되도록 가정한다. 이 세 벡터에 의해서 구성되는 행렬을

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (12)$$

라고 놓는다. 구면의 좌표변환 행렬을  $\mathbf{T}$ 라고 하면 절단선을 매개변수  $v=0.5$ 인 위선과 일치시키는 좌표변환 행렬은

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{T} \quad (13)$$

으로 계산한다. 요소발생의 기준이 되는 기존의 절점좌표를  $(x, y, z)$ 라고 하면 절단선이 매개변수  $v=0.5$ 인 위선과 일치하도록 구면을 회전시킴으로써 얻어지는 좌표  $(x_b, y_b, z_b)$ 는 다음 식으로 계산된다.

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \quad (14)$$

한편 회전된 상태에서  $(x_b, y_b, z_b)$ 에 대응되는 매개변수 좌표  $(u_b, v_b)$ 는 식(9)와 (10)을 이용하여 계산할 수 있다. 또한 구면의 매개변수 좌표는 Fig. 12에 표시된 바와 같이 구면의 정점으로 부터의 거리를 이용하여 평면 좌표로 전개한다. 평면으로 전개시킨 좌표를  $(x_p, y_p)$ 라고 하면,

$$x_p = \pi r v \cos(2\pi u)$$

$$y_p = \pi r v \sin(2\pi u) \quad (15)$$

이다.

여기서 계산된 좌표의 축척은 구면의 표면을 따라서 계산되는 길이와 균등한 비율을 갖지 않는다. 즉

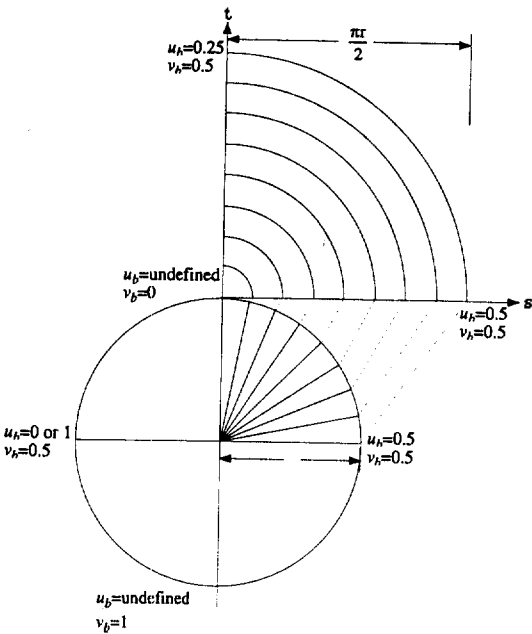


Fig. 12. Mapping with a plane.

$v_b$ 의 값이 클수록 원둘레 방향의 길이가 과장되게 왜곡된 값을 갖는다. 그러므로 식 (14)에 의해서 계산된 좌표는 요소 발생을 위한 상대적인 위상을 정하는데 사용되며, 두 점사이의 거리나 두 선분 사이의 각도 등은 구면의 기하학적 특성을 이용하여 계산한다. 즉 구면의 표면에서 요소를 생성하는 방법은 평면으로 전개한 공간에 평면요소발생 알고리즘을 적용하되, 거리 계산이나 각도 계산은 실제의 좌표공간 상에서 실행한다. 계산 과정에 대한 설명은 참고 문헌(14, 15)에 상세히 기술되어 있으며, 여기서는 생략한다.

Fig. 13은 구면의 일부분을 평면에 투사하여 요소망을 생성하고, 절점의 좌표를 다시 구면으로 복구시키는 과정을 예시한 것이다. 이 예에서는 조절선을 절단선으로 이용하여 요소망 생성 영역을 평면에 투사했을 때, 그 중심부가  $v=0.5$  위선의 중앙에 근접하도록 좌표변환을 하고, (b)와 같이 투사하여, (c)와 같이 요소망을 생성하고, (d)와 같이 원래의 구면으로 환원하면, 원하는 요소망이 생성된다.

**6. 요소의 제거와 재구성에 의해 요소망을 완성하는 방법**

전개 불가능하고, 경계가 없는 구면이나 원환면

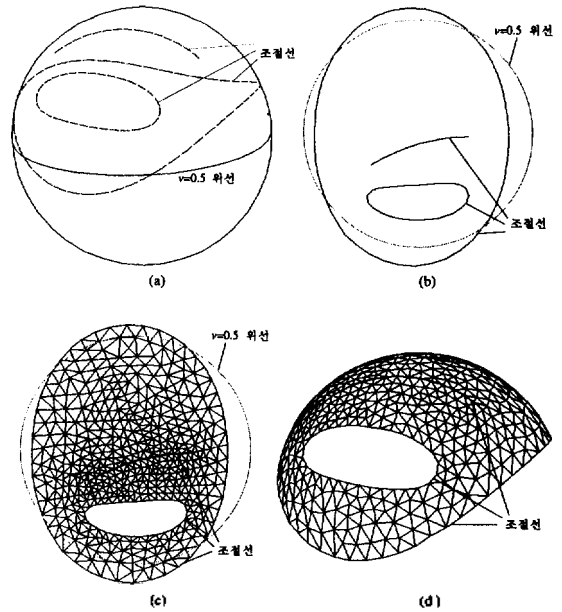


Fig. 13. An example of mesh generated by mapping with the projection plane.

- (a) The surface and the control curves with a dividing curve.
- (b) Control curves and dividing curve on the plane mapped with the surface.
- (c) Mesh generated on the mapped plane.
- (d) Mesh transformed into the original space.

위에 요소를 생성시키는 또 다른 방법은 곡면 전체에 요소를 발생시킨 다음에 조절선 부근의 요소를 제거하고, 조절선에 접합하도록 재생성하는 방법이다. 즉 구멍이나 선을 고려하지 않고 곡면 전체에 요소를 생성한 다음에 구멍이나 선이 걸쳐있는 요소들을 모두 제거하고, 구멍과 선에 접합하도록 주변의 요소들을 재생성한다.

**6.1 곡면 전체의 요소망 생성**

이 방법에 의해서 요소망을 생성하는 첫번째 단계는 영역의 경계선이나 조절선 등을 고려하지 않고 폐곡면 전체를 뒤덮는 연속적인 요소망을 생성하는 것이다. 이 과정을 요약하면 다음과 같다.

- 1) Fig. 14에서 보는 바와 같이 곡면 전체를 몇개의 부위로 분할한다. 보통 8개 정도로 분할하는 것이 효율적이다.
- 2) 조절선이나 경계선 위에 있는 절점 사이의 간격을 보간하여 각 부위의 경계에서 요소 발생의 밀도를 정해준다.
- 3) 각 부위별로 요소를 생성하여 곡면전체의 요소

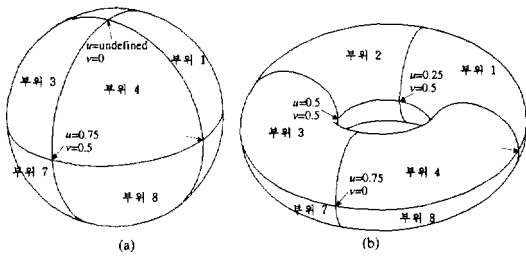


Fig. 14. Division of the surface for initial mesh generation. (a) Division of a sphere. (b) Division of a torus.

망을 완성시킨다. 이때 하나의 요소 생성 영역은 경계선이 있는 개곡면으로 간주할 수 있으며, 위에 기술한 매핑 방법을 적용할 수 있다.

6.2 일부 요소의 제거

Fig. 15(a)에서 보는 바와 같이 곡면 전체를 덮는 요소망이 완성된 다음에는 Fig. (b)와 같이 영역의 경계선이나 조절선 부근의 요소들을 제거한다. Fig. 15(a)에서 채색된 부분은 제거될 요소들을 표시한 것이며, Fig. (b)는 요소들이 제거된 상태를 보여주고 있다. 어떤 요소를 제거할 것인지는 다음과 같은 순서에 따라서 결정한다.

- (1) 영역의 경계선이나 조절선이나 걸쳐있는 요소들을 먼저 제거 리스트에 포함시킨다.
- (2) 제거 리스트에 포함된 요소로부터 일정한 범위 이내에 있는 요소들을 제거 리스트에 포함시킨다. 여기서 일정한 범위란 곡면의 표면상의 거리를 기준으로 정하거나 또는 중간에 있는 요소의 수에 의해서 정할 수 있다.
- (3) 요소들 간의 인접성을 검사하여 고립된 요소들을 표시한다. 고립된 부분이 폐합된 조절선의 안쪽인가, 바깥쪽인가를 판단하여 제거 리스트에 포함시킬 것인지를 결정한다.

6.3 요소망의 재구성

일부 요소를 제거한 다음에는 남아 있는 요소망과 경계선 또는 조절선과의 사이에 요소망을 재생성하여 틈을 채운다. Fig. 15(c)에서 채색된 부분은 재생성된 요소들을 표시한 것이다. 이때 요소 재생성 영역은 대개 폐곡면의 작은 부분으로 국한되기 때문에 위에 기술한 매핑 등의 방법을 효율적으로 적용할 수 있다. 재생성에 의해 만들어진 요소들의 형상이 불량하게 되기가 쉽다. 그러나 Fig. 15(d)에서 보는 바와 같이 평탄화의 과정을 통해서 요소의 형상을

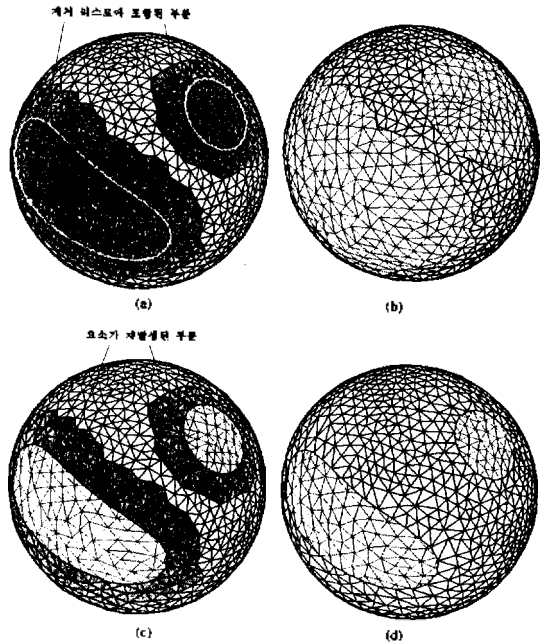
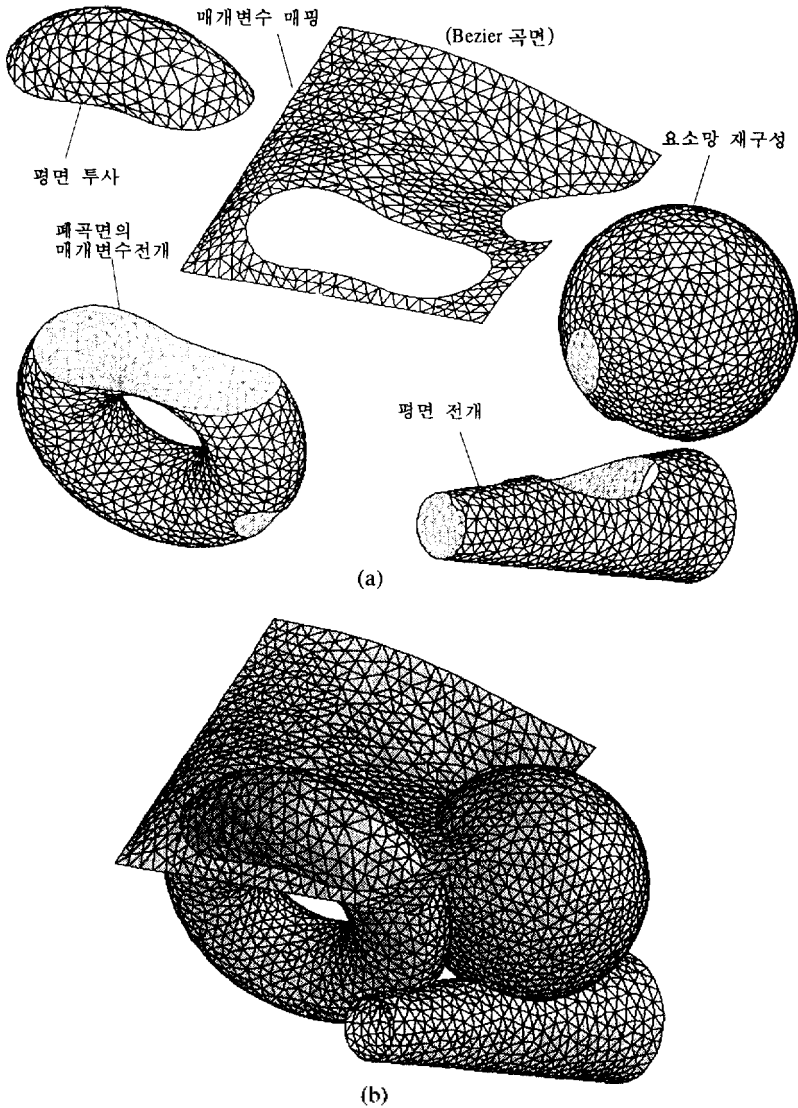


Fig. 15. An example of a mesh generated by remeshing on the part surrounding control curves. (a) Initially generated mesh. Marking of the elements for removal. (b) Removal of the marked elements. (c) Regeneration of meshes surrounding control curves. (d) Completed mesh after smoothing.

개선할 수 있으므로 별로 문제되지는 않는다.

7. 알고리즘의 적용

이 논문에서 제시한 원시곡면 위의 요소망 자동생성기법들은 유한요소해석 소프트웨어인 MacTran의 요소망 생성 기능의 한 부분으로 이행되었다. Fig. 16은 MacTran을 이용하여 원시곡면 위에 요소망을 생성한 예이다. Fig. 16(a)에 표시된 바와 같이 앞에서 기술한 여러가지 방법들이 요소망 생성에 적용되었다. 어떤 방법을 적용할 것인지는 곡면의 종류와 생성영역의 형태에 따라서 소프트웨어가 자동으로 결정한다. 여기서 유의할 것은 원환면의 일부에는 평면 투사에 의한 매핑이 적용된 반면에 나머지 부분에는 폐곡면의 매개변수 전개방법이 적용되었다. 이와 같이 하나의 곡면에 각기 다른 방법이 적용된 이유는 요소망 생성 방법이 곡면의 종류 뿐만 아니라 요소망 생성 영역의 크기에 따른 계산상의 효율성과 정밀성을 고려하여 결정되기 때문이다.



**Fig. 16.** An example of automatic mesh generation on primitive surfaces.  
 (a) Methods of mesh generation automatically selected in accordance with the type and the size of the surfaces.  
 (b) The completed mesh.

한편 MacTran은 곡면의 어느 부분에 요소망을 생성할 것인가를 사용자가 인터랙티브하게 지정할 수 있는 기능을 가지고 있다. MacTran을 이용하여 원시곡면 위에 유한요소망을 생성하는 예제를 다양하게 여러 형태로 만들어서 검토하였다. 이 논문에 포함된 예는 그 중의 일부이다.

### 8. 결 론

이 논문은 원시곡면을 이용하여 유한 요소망을 자

동 생성함으로써 유한요소 모델링을 간편하고 효과적으로 달성할 수 있는 방법들을 제시하였다. 여기서 제안하는 곡면 위의 요소망 생성 기법들은 평면의 요소망 생성 알고리즘을 바탕으로 이루어졌다. 평면과 곡면은 기하학적 특성이 다르기 때문에 평면의 알고리즘을 곡면에 적용하기 위해서는 별도의 처리 과정이 필요하다. 이와 관련하여 이 논문에서 제시한 기법들은 대체적으로 곡면의 전개, 평면과의 매핑 및 요소망의 재구성 등으로 이루어져 있다. 어떤 기법을 적용할 것이지는 곡면의 종류와 영역의

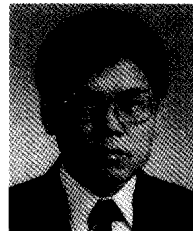
크기에 따라서 자동적으로 결정된다. 이 논문에서 제안한 기법들은 유한요소해석 소프트웨어인 MacTran의 요소망 생성 기능을 개발하는데 실제적으로 적용되었으며, 이 소프트웨어의 실행을 통해서 그 실용성과 타당성이 검증되었다

### 감사의 글

이 논문은 시스템공학연구소의 연구비 지원에 의해 이루어진 연구 결과의 일부이며, 이에 연구소 당국에 감사를 드립니다.

### 참고문헌

1. Geoge, P.L., *Automatic Mesh Generation, Application to Finite Element Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
2. 이재영, 농업토목설계를 위한 유한요소해석 시스템 개발 (IV), 농어촌진흥공사, 1990.
3. 이재영, 이진휴, 한상기, "유한요소해석을 위한 3차원 구조물의 기하학적 모델링," 한국전산구조공학회지, 제 4권, 제 1호, pp. 109-120, 1991.
4. George, P.J. and Seveno, E., "Advancing-Front Mesh Generation Method Revisited," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 21, pp. 3605-3619, Nov. 1994.
5. Talbert, J.A. and Parkinson, A.R., "Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 7, pp. 1551-1567, May 1990.
6. Lo, S.H., "Two-dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 7, pp. 1501-1526, May 1990.
7. Lee, C.K. and Lo, S.H., "A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh," *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 5, pp. 847-857, 1994.
8. Unruh, V. and Anderson, D.C., "Feature-based modeling for automatic mesh generation," *Engineering with Computers*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12, Winter 1992.
9. Shephard, M.S. and Fennigan, P.M., "Integrated geometric modeling and advanced finite element preprocessing," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 4, No. 2, pp. 147-162, Aug. 1988.
10. Shephard, M.S. and Georges, M.K., "Automatic Three-dimensional mesh generation by the finite octree technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 5, pp. 709-749, Oct. 1991.
11. Huang, C.Y. and Oden, J.T., "GAMMA2D: A multi-region/multiblock, structured/unstructured grid generation package for computational mechanics," *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 2, pp. 375-410, 1994.
12. Lee, J.Y., *MacTran, User's Manual*, 1996.
13. 이재영 외, 고기능 설계 자동화 시스템 개발에 관한 연구 (I), 시스템공학연구소, 1995.
14. 이재영 외, 고기능 설계 자동화 시스템 개발에 관한 연구 (II), 시스템공학연구소, 1996.
15. 이재영, "순환적 분할에 의한 유한요소망 자동생성 알고리즘," 한국전산구조공학회지, 제 9권, 제 3호, pp. 145-153, 1996.



### 이 재 영

1970년 서울대 농공학과 학사  
 1977년 네델란드 Delft 공대, IHE 과정  
 1980년 서울대 농공학과 석사  
 1986년 미국 Cornell Univ. 농생명공학  
 과 박사  
 1870년 - 1973년 한국전력주식회사  
 1973년 - 1980년 농업진흥공사  
 1980년 ~ 현재 전북대학교 농공학과 교수  
 관심분야: 유한요소법, 유한요소해석 전후  
 처리, 컴퓨터그래픽스