한국 *CAD/CAM* 학회 논문집
제 *1* 권 제 *1* 호 *1996*년 *3*월 *pp. 45-55*

모의가공을 위한 공구 이동 궤적면의 비매개변수형 모델링

정연찬* · 최병규**

Non-parametric Modeling of Cutter Swept Surfaces for Cutting Simulation

Yun-Chan Chung*, Byoung K. Choi**

Abstract

This paper presents a new approach to *non-parametric* modeling of *cutter swept surface* (CSS) for cutting simulation. Instead of explicitly modeling *cutter swept volumes*, silhouette curves of the cutter surface are utilized in computing the z-value of the CSS at a grid point on the x,y-plane. The non-parametric evaluation of the CSS constitutes the integral part of 3-axis cutting simulation. The proposed method is more efficient than the existing ones in the case of conventional cutters (i.e., ball-end mills and flat-end mills), and more importantly, it enables the non-parametric modeling of the CSS for the round-end mills which was not possible with the existing methods.

Keywords : Cutting simulation, Cutter swept surface, Silhouette curve, Non-parametric modeling

1. 서 론

1-1. 공구 이동 궤적면 모델링의 필요성

금형 가공면은 복잡하고 많은 자유곡면으로 이루어져 있다. 따라서, 금형의 가공을 위해 CAD/CAM 시스템에서 생성된 가공데이터는 시스템의 자체적인 오류, 혹은 사용자의 실수에 의한 불량의 가능성이 매우 크다. 불량 가공데이터는 과절삭, 미절삭 등의 가공 불량은 물론이고, 충돌로 인한 기계의 파손 및 안전사고를 초래할 수도 있으며, 결과적으로 생산성의 저하와 가공된 제품의 품질을 떨어뜨리는 주요 원인이 된다. 실제 가공을 하기 전에 가공데이터를 검증하기 위해서는 나무나 스티로폼 등과 같이 값싸고 가공하기 쉬운 소재를 미리 가공해보는 것이 일반적인 방법이다.[1]

최근 금형가공에 고속가공과 무인가공이 도입되면서 이러한 가공데이터 검증의 필요성이 커지고, 고성능 컴퓨터가 일반화되면서 컴퓨터 모의가공에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다.[2-8] 모의가공에 관한 기존의 연구들과 그것들의 장단점들은 Jerard[9]에 의해 정리된 바 있다.

모의가공의 여러 가지 방법 중에서 3축 모의가공을 위해서는 '수직 방향의 벡터(Z direction vector)' 모델을 이용하는 방법이 속도가 빠르고, 정밀도가 높은 것으로 알려져 있다.[9] '수직 벡터'로 모델링된 피삭재에서 공구가 한 번 움직여 가공한 양만큼 피삭재를 제거하기 위해서는 그림 1에서 보는 것과 같이 '공구 이동 궤적체(cutter swept volume)'와 수직 벡터와의 교점을 계산하는 것이 필요하다.[10] 그런데, 수직 벡터를 이용한 3축 모의 가공에서는 공구가 이동하면서 생긴 체적의 아래쪽 부분에 해당하는 '공구 이동 궤적면(cutter swept surface)'만 비매개변수형 곡면(non-parametric surface)[11]으로 모델링하면, 교점을 쉽게 계산할 수 있다.

본 연구에서는 일반적인 3축 금형가공에 사용되는 공구인 볼엔드밀(ball-end mill)과 평엔드밀(flat-end mill), 그리고 그 두 공구의 일반형인 라운드엔드밀(round-end mill)의 공구 이동 궤적면을 비매개변수형 곡면으로 모델링하고자 한다.

1-2. 공구 이동 궤적면 모델링에 관한 기존의 연구

Anderson[2]은 수직 벡터 모델의 특수한 경우인

*정회원, 한국과학기술원 산업공학과
**종신회원, 한국과학기술원 산업공학과

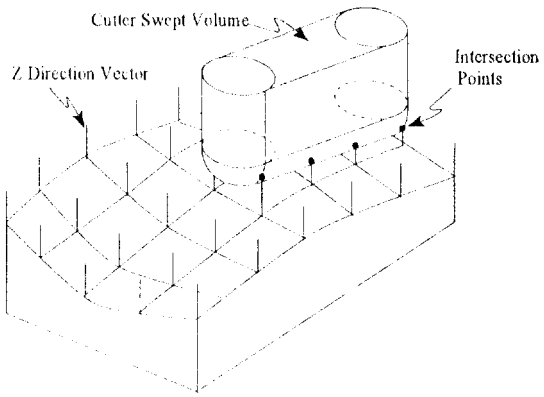


그림 1. 수직 벡터 모델의 5축가공 개념도.

'Z-map 모델[11]'을 이용해 평엔드밀의 충돌확인 방법을 연구하였다. 이때, 평엔드밀이 움직여서 생성되는 공구 이동 궤적면은 타원을 이동한 곡면이 되는데, Anderson은 타원을 'V'형으로 근사한 후, 그것을 이동한 곡면으로 공구 이동 궤적면을 표현하였다.

Jerard[10]는 평면(plane), 구(sphere), 원통(cylinder) 등과 같이 쉽게 해석이 가능한 기본 형상들의 합집합과 교집합으로 공구 이동 궤적체를 모델링하고, 모델링된 궤적체와 수직 벡터와의 교점을 구하는 방법을 연구하였다. Jerard의 공구 이동 궤적체 모델링 방법은 개념적으로 3축 이상의 가공에서도 가능하며, 수직 벡터 모델이 아닌 임의의 벡터 모델에서도 적용 가능한 방법이다. Jerard[12]와 Oliver[13]는 이 방법으로 모델링된 공구 이동 궤적체와 임의의 벡터와의 교점을 효과적으로 계산하는 방법을 연구하였다. 그런데, 이 방법은 이동 궤적면을 간단한 기본 형상으로 모델링할 수 있는 볼엔드밀과 평엔드밀에서만 적용 가능한 방법이다. 따라서, Jerard[10]는 기본 형상으로 표현이 불가능한 라운드엔드밀의 경우에는 이진 탐색 방법을 제안하였다.

기타 관련 연구로는 5축 가공에서 공구의 이동 궤적체를 매개변수형 곡면으로 변환하는 방법에 관한 Wang[14]의 연구가 있다.

2. 공구 곡면의 비매개변수형 모델링

움직이는 공구의 이동 궤적면을 비매개변수형으로 모델링하기 위해서는 일정한 위치에 고정된 공구를 비매개변수형 곡면으로 모델링하는 것이 필요하다. 일반적인 금형가공에 사용되는 3축 가공 공구는

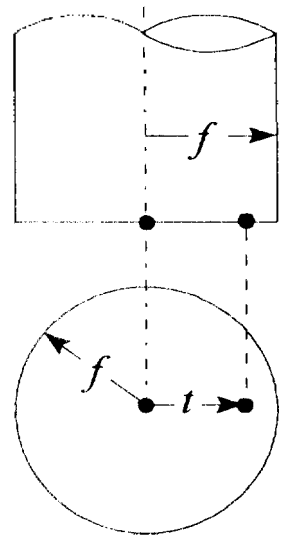


그림 2. 평엔드밀.

공구 축이 z 축과 평행하므로, 공구 곡면을 z=f(x, y) 형태의 비매개변수형으로 표현할 수 있다. 그 중심이 원점에 있는 공구의 곡면을 다음과 같은 비매개변수형으로 표현하려고 한다.

$$z = CS(x, y) \tag{1}$$

2-1. 평엔드밀(Flat-end mill)

그림 2에서 보는 것처럼 평엔드밀은 바닥이 평평하기 때문에 공구의 반경만으로 공구를 정의할 수 있다. 이때, 공구의 반경을 'f'라고 하고, 평평한 바닥의 중심을 공구의 중심점이라고 하면, 평엔드밀의 공구곡면은 식 (2)와 같은 비매개변수형으로 표현된다.

$$z = CS_F(x, y : f) = 0, \quad \text{for} \quad t \le f \tag{2}$$

여기서, $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

이때, 't'는 공구 중심점에서 (x, y)까지의 평면 거리이다.

2-2. 볼엔드밀(Ball-end mill)

그림 3에서 보는 것과 같이 볼엔드밀은 공구의 바닥이 '구(sphere)' 형상이다. 따라서, 이 경우에도 평엔드밀처럼 공구의 반경만으로 공구를 정의할 수 있다. 공구 반경을 'r'이라고 하고, 그림에서 보는 것과 같이 공구의 끝점(tip point)을 공구 중심점이라고 하자. 피타고라스 정리를 이용하면, 볼엔드밀의 공구

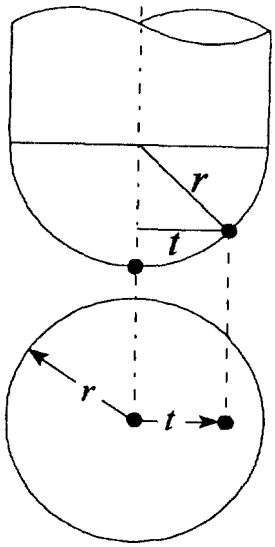


그림 3. 볼엔드밀.

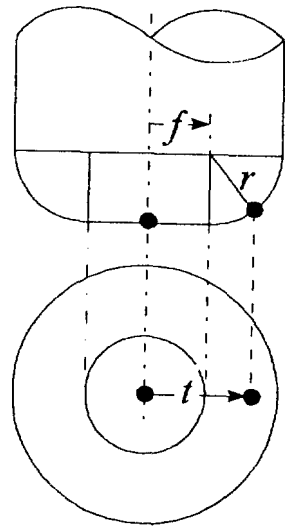


그림 4. 라운드엔드밀.

곡면은 식 (3)과 같이 표현된다.

$$z = CS_B(x, y : r) = r - \sqrt{r^2 - t^2}, \quad \text{for } t \le r \tag{3}$$

여기서, $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

2-3. 라운드엔드밀(Round-end mill)

라운드엔드밀은 평엔드밀의 가장자리를 일정한 반경으로 라운딩한 공구다. 따라서, 일반적으로 공구의 직경과 라운드 반경으로 공구를 정의한다. 본 연구에서는 설명의 편의를 위해서 그림 4와 같이 공구의 라운드 반경, 'r'과 바닥의 평평한 부분의 반경, 'f'로 정의하기로 한다. 이때, 공구의 직경은 2*(f+r)이 된다. 그리고, 공구의 중심점은 공구 바닥의 중심에 두기로 한다.

라운드엔드밀의 공구곡면은 평엔드밀과 볼엔드밀의 공구곡면을 합해놓은 것과 같은데, 공구 바닥의 평평한 부분은 평엔드밀과 같고, 라운드된 부분은 볼엔드밀과 같다. 식 (4)는 라운드엔드밀의 공구곡면을 비매개변수형으로 표현한 것이다.

$$z = CS_R(x, y : f, r) \tag{4}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{for } t \le f \\ r - \sqrt{r^2 - (t-f)^2}, & \text{for } f < t \le f + r \end{cases}$$

여기서, $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

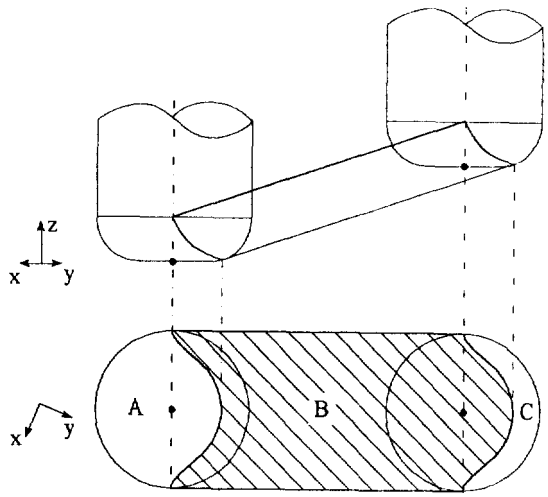


그림 5. 공구 이동 궤적면의 영역 구분.

이때, "f > 0, r=0"이면 평엔드밀의 공구곡면과 같고, "f=0, r > 0"이면 볼엔드밀의 공구곡면과 같음을 알 수 있다. 결국, 평엔드밀과 볼엔드밀은 라운드엔드밀의 특수한 경우로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

3. 공구 이동 궤적면의 비매개변수형 모델링

3-1. 공구 이동 궤적면의 개념적 이해

그림 5에서 보는 것과 같이 공구가 3차원상의 어떤 점에서 다른 어떤 점으로 직선 이동할 때, 공구의

아래쪽 면에 의해 형성되는 곡면을 '공구 이동 궤적면(cutter swept surface)'이라고 한다. 공구 이동 궤적면은 그림 5에서 보는 것과 같이 3가지 영역으로 나뉘어진다. 그림에서 'A'와 'C'는 각각 시작점과 끝점에 놓인 공구곡면의 일부분이며, 'B'는 시작점에서 끝점으로 공구가 움직이면서 형성된 곡면이다. 따라서, 'A'와 'C' 영역에 속하는 곡면은 앞 절에서 정의된 'z=CS(x, y)'를 이용해서 비매개변수형으로 표현할 수 있다.

'A'와 'B', 'C'를 구분하는 경계곡선은 각각 시작점과 끝점에 놓인 공구를 공구 이동 방향(cutter movement direction)으로 바라볼 때, 형성되는 실루엣 곡선(silhouette curve)[15]이다. 그리고, 'B' 영역의 곡면은 그 실루엣 곡선을 공구 이동 방향을 따라 이동한 이동 곡면(ruled surface)[11]이다. 따라서, 공구 이동 방향에 해당하는 공구의 실루엣 곡선을 구하면 'A', 'B', 'C' 영역의 구분은 물론이고, 'B' 영역의 곡면도 이동 곡면으로 표현 가능하다.

3-2. 공구 이동 궤적면의 비매개변수형 모델링

그림 6에서 보는 것과 같이 삼차원 공간상의 한 점에서 다른 한 점으로 공구가 직선 이동할 때 형성되는 공구의 이동 궤적면을 고려하기로 한다. 시작점과 끝점이 각각, 'S'와 'E'로 표현될 때, 공구 이동 궤적면을 다음과 같은 비매개변수형으로 표현하려고 한다.

$$z = CSS\,(x, y : S, E) \tag{5}$$

공구 이동의 시작점은 'S'이고, 끝점은 'E'일 때, 다음과 같은 값들을 미리 계산할 수 있다.

$\boldsymbol{D=E-S}$	: movement direction vector
$d=\|(D_x, D_y)\|$	: distance of the tool movement in xy-pane
$s=D_z/d$	: slope of the tool movement
$V=(D_x, D_y, 0)/d$	: movement direction unit vector in xy-plane
$U=(V_y, -V_x, 0)$	: unit vector which is perpendicular to **V**
$SH(u)$	: silhouette curve in uv-plane

이제 어떤 점 (x, y)가 주어질 때, 공구 이동 궤적면의 z값을 다음과 같은 순서로 계산할 수 있다.

<단계-1> (x, y)를 지역 좌표계에서의 좌표값(u, v)로 변환

임의의 시작점에서 임의의 방향으로 움직여 형성

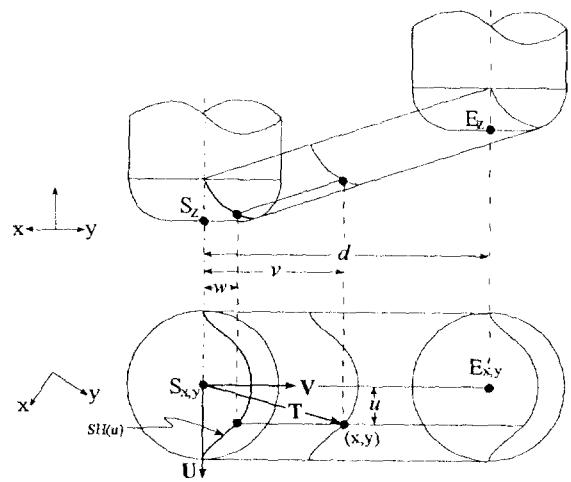


그림 6. 공구 이동 궤적면의 모델링.

되는 공구 이동 궤적면을 효율적으로 표현하기 위해서는 (x, y)를 지역 좌표계(local coordinate system)에서의 좌표값으로 변환해야 한다. 시작점 'S'를 원점으로 하고 앞에서 정의된 벡터 'U'와 'V'를 축으로 하는 UV-좌표계에서 (x, y)를 나타내면, 그림 6에 나타난 'u'와 'v'로 표현된다. (x, y)와 시작점 S를 잇는 XY-평면에서 정의되는 벡터 'T'를 정의하면, (u, v)는 다음과 같은 간단한 벡터 연산을 통해 계산된다.

$$T = (x, y, 0) - (S_x, S_y, 0)$$
$$u = U \cdot T$$
$$v = V \cdot T$$

이때, 'u'는 그림에서 보는 것과 같이 공구 중심 이동선에서 (x, y)점까지의 수직 거리다. 따라서, 'u'의 절대값이 공구의 반경보다 큰 경우에는 공구 이동 궤적면이 정의되지 않음을 알 수 있다. 또, 'v'가 0보다 작거나 공구의 이동 거리인 'd'보다 큰 경우에도 시작점 혹은 끝점까지의 평면거리를 공구 반경과 비교해보면 공구 이동 궤적면이 정의되는 접인지를 쉽게 판별할 수 있다. 즉, 공구의 반경을 'R'이라고 하면, 다음의 세 경우에 공구 이동 궤적면은 정의되지 않는다.

1) $|u| > R$
2) $v < 0$ and $\sqrt{u^2+v^2} > R$
3) $v > d$ and $\sqrt{u^2+(d-v)^2} > R$

<단계-2> w=SH(u)의 계산

시작점 'S'에 놓인 공구의 실루엣 곡선을 UV-좌표계에서 u의 함수로 표현하려고 한다. UV-좌표계에

서 (u, w, z)를 실루엣 곡선상의 한 점이라고 하자. 그런데, 실루엣 곡선은 비매개변수형 곡면인 공구 곡면에서 정의되므로 (u, w)가 정해지면 'z'는 항상 알 수 있는 값이다. 결국, UV-평면에 투영된 공구의 실루엣 곡선만 정의하면 공간상의 실루엣 곡선도 알 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 특별한 언급이 없는 한 실루엣 곡선을 UV-평면에 투영된 실루엣 곡선으로 정의하겠다.

공구의 실루엣 곡선을 다음 식과 같이 u의 함수로 표현하면, 그림 6에 표시된 'w'를 얻을 수 있다.

$$\omega = SH(u), \quad \text{for } |u| \le R \tag{6}$$

이때, R은 공구의 반경이며, SH(u)의 구체적인 표현 방법은 공구의 형상에 따라 다르므로 공구 종류에 따른 SH(u)를 다음절에서 다루기로 하겠다.

<단계-3> 영역의 구분

'v'가 'w'보다 작다면 그림 5의 A-영역에 속하게 됨을 그림 6을 통해 쉽게 알 수 있다. 또, 'v'가 (d+w)보다 크다면 C-영역에 속하게 된다. 결국, 'v'와 'w'에 따라 다음과 같이 공구 이동 궤적면의 영역이 구분된다.

A-영역: (v-w) ≤ 0
B-영역: 0 < (v-w) < d
C-영역: (v-w) ≥ d

<단계-4> z=CSS(x, y : S, E)의 계산

A-영역에 속하는 점은 시작점에 놓인 공구의 곡면이며, 공구 중심점에서의 거리가 (u, v)에 해당하므로 다음과 같이 계산된다.

$$z = S_z + CS(u, \upsilon) \tag{7}$$

B-영역에 속하는 점은 (u, w)에 해당하는 실루엣 곡선상의 점이 공구 이동 경사도 's'를 따라 (v-w)만큼 이동한 점이다. 따라서, 다음과 같이 공구 이동 궤적면을 계산할 수 있다.

$$z = S_z + CS(u, \omega) + (\upsilon - \omega)\cdot s \tag{8}$$

C-영역에 속하는 점은 끝점에 놓인 공구의 곡면이며, 공구 중심점에서의 거리는 (u, v-d)에 해당한다. 따라서, 다음과 같이 공구 이동 궤적면이 계산된다.

$$z = E_z + CS(u, \upsilon - d) \tag{9}$$

식 (7)과 (8), (9)를 정리하면, 'S'에서 'E'로 이동하는 공구의 이동 궤적면은 식 (10)과 같이 정의된다.

$$z = CSS(x, y : S, E) \tag{10}$$
$$= \begin{cases} S_z + CS(u, \upsilon), & \text{for } \upsilon - \omega \le 0 \\ S_z + CS(u, \omega) + (\upsilon - \omega)\cdot s, & \text{for } 0 < \upsilon - \omega < d \\ E_z + CS(u, \upsilon - d), & \text{for } \upsilon - \omega \ge d \end{cases}$$

4. 공구 이동 궤적면 모델링을 위한 공구의 실루엣 곡선

4-1. 실루엣 곡선의 특성

어떤 물체를 특정한 방향으로 바라볼 때, 물체의 보이는 부분과 가려진 부분을 구분하는 경계선이 실루엣 곡선이 된다.[15] 볼록한(convex) 물체의 경우에는 보는 방향으로 물체를 투영했을 때, 투영된 이미지(image)의 외각 경계가 실루엣 곡선에 해당된다. 수학적으로는 물체를 이루는 곡면의 법선 벡터와 바라보는 방향 벡터의 내적(dot product)을 취할 때, 그 값의 부호가 바뀌는 점들의 집합이다. 특히, 곡면의 법선 벡터가 연속적으로 정의될 때는 법선벡터와 바라보는 방향 벡터가 수직이 되는 점들의 집합으로 정의할 수 있다.

4-2. 실루엣 곡선 계산을 위한 가정과 사용할 기호

공구의 이동 방향 벡터와 같은 방향으로 공구를 바라 볼 때 형성되는 공구의 실루엣 곡선을 효과적으로 표현하기 위해서는 3-2절에 정의된 UV-좌표계로 정의되는 실루엣 곡선을 고려하면 된다.

본 연구에서는 평행 투영에 의한 실루엣 곡선을 고려하기 때문에 바라보는 벡터의 길이, 즉 공구 이동 방향 벡터의 길이와는 무관하다. 따라서, 설명의 편의를 위해 공구 이동 방향 벡터를 UV-좌표계에서 (0, 1, s)로 가정하고, 그 벡터를 'D'로 표시하기로 한다. 공구의 종류에 따른 실루엣 곡선을 구하는 과정을 설명하기 위해 사용되는 기호를 표 1에 정리하였다. 그리고, 공구의 형상 정의를 위해서는 2절에서 사용한 'r'과 'f'를 계속 사용하기로 한다.

금형가공에 사용되는 일반적인 3축 공구의 공구곡면은 회전 곡면이고, 그 단면이 볼록하기 때문에 UV-평면에 투영된 실루엣 곡선은 u에 대한 함수로 정의할 수 있다. 그것을 'v=SH(u)'로 표현하기로 한다.

4-3. 라운드엔드밀의 실루엣 곡선: $v=SH_R(u: f, r)$

평엔드밀과 볼엔드밀은 라운드엔드밀의 특수한 경우이므로, 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 먼저 구하려고 한다. 평평한 부분의 반경은 'f'이고, 라운드 반경이 'r'인 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 'v=SH_R

표 1. 실루엣 곡선 계산에 사용되는 기호

사용할 기호	의 미
SH(u)	u에 대한 함수로 정의되는 UV-평면에 투영된 실루엣 곡선
(u, v)	UV-평면에 투영된 실루엣 곡선상의 한 점
D	(공구의 이동 방향 벡터) ≡ (바라 보는 방향 벡터) ≡ (0, 1, s)
N	공구곡면의 법선 벡터
s	공구의 이동 경사도
t	공구의 중심점에서 (u, v)점까지의 평면 거리

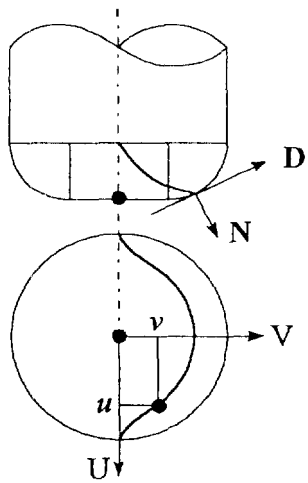


그림 7. 라운드엔드밀의 실루엣 곡선.

(u: f, r)로 표현하려고 한다.

라운드엔드밀은 곡면의 법선 벡터가 모든 점에서 연속적으로 정의되므로, 라운드엔드밀의 실루엣 곡선은 공구 곡면의 법선 벡터와 공구 이동 벡터가 수직으로 만나는 부위에서 형성된다. 따라서, 다음의 식이 성립한다.

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{11}$$

여기서, $\boldsymbol{N}$: surface normal vector

$\boldsymbol{D}$: cutter movement direction vector

라운드엔드밀 공구곡면의 법선 벡터는 식 (12)와 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{N} = \begin{cases} (0, 0, -1), & \text{for } t < f \\ \left(u \cdot \dfrac{t-f}{t},\ \sqrt{t^2-u^2} \cdot \dfrac{t-f}{t},\ -\sqrt{r^2-(t-f)^2}\right), & \text{for } f \le t \le f+r \end{cases} \tag{12}$$

여기서, $t = \sqrt{u^2+v^2}$

그런데, 공구중심에서의 거리 't'가 'f'보다 작은 경우, 즉 't < f'일 때, 식 (11)은

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{D} &= (0, 0, -1) \cdot (0, 1, s) \\ &= -s \end{aligned}$$

이므로, 's'가 0인 경우에만 식을 만족할 수 있다. 따라서, 's'가 0보다 큰 경우 공구중심에서의 거리가 'f'보다 작은 곳에서는 실루엣 곡선이 형성되지 않음을 알 수 있다. 그리고, 'f ≤ t ≤ f+r'인 경우에 식 (11)은 다음과 같이 전개되며,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{D} \\ &= \left(u \cdot \frac{t-f}{t},\ \sqrt{t^2-u^2} \cdot \frac{t-f}{t},\ -\sqrt{r^2-(t-f)^2}\right) \\ &\quad \cdot (0, 1, s) = \sqrt{t^2-u^2} \cdot \frac{t-f}{t} - s \cdot \sqrt{r^2-(t-f)^2} \end{aligned}$$

결과적으로 식 (13)과 같이 된다.

$$s \cdot \sqrt{r^2-(t-f)^2} = \sqrt{t^2-u^2} \cdot \frac{t-f}{t} \tag{13}$$

식 (13)의 양변을 제곱해서 't'에 대해 정리하면, 식 (14)와 같은 4차식이 얻어진다.

$$t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0 \tag{14}$$

여기서, $a_1 = -2f$

$$a_2 = f^2 - \frac{r^2 s^2}{1+s^2} - \frac{u^2}{1+s^2}$$

$$a_3 = 2f \cdot \frac{u^2}{1+s^2}$$

$$a_4 = -f^2 \cdot \frac{u^2}{1+s^2}$$

식 (14)을 풀면 v가 없는 u만의 함수로 t를 정의할 수 있다(부록 참조). 이것을 TR(u : f, r)라고 하면, 라운드엔드밀의 실루엣 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$v = SH_R(u : f, r) = SIGN(s) \cdot \sqrt{t^2 - u^2} \quad (15)$$

여기서, $t = TR(u : f, r)$

그림 8은 얻어진 식을 이용하여, 'f'가 1이고 'r'이 1인 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 몇 가지 경사도에 따라 UV-평면에 그린 것이다.

4-4. 평엔드밀의 실루엣 곡선: $v=SH_F(u : f)$

공구의 반경이 'f'인 평엔드밀의 실루엣 곡선을 구하려고 한다. 평엔드밀은 바닥 곡면의 법선 벡터는 모든 점에서 z-축과 평행하며, 옆면의 법선 벡터는 모든 점에서 z-축과 수직하다. 따라서, 공구의 바닥과 옆면의 경계에서 실루엣 곡선이 생성된다(그림 9 참조).

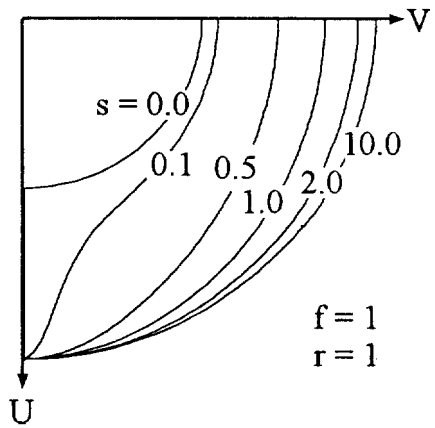


그림 8. UV-평면에서 라운드엔드밀의 실루엣 곡선.

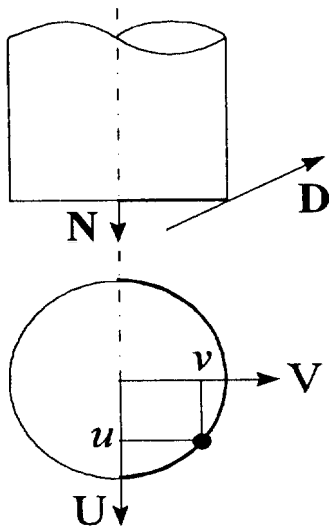


그림 9. 평엔드밀의 실루엣 곡선.

그런데, 평엔드밀은 라운드 반경이 '0'인 라운드엔드밀의 특별한 경우이므로, 앞에서 얻은 라운드엔드밀의 실루엣 곡선식을 이용해서 평엔드밀의 실루엣 곡선식을 구할 수 있다. 식 (15)에 'r=0'을 대입하면, 다음과 같이 간단한 식으로 평엔드밀의 실루엣 곡선이 얻어진다.

$$v = SH_F(u : f) = SIGN(s) \cdot \sqrt{f^2 - u^2}, \quad \text{for } |u| < f \quad (16)$$

위의 식을 제곱해서 정리하면, 반경이 'f'인 원의 방정식이 된다. 결국 그림 9에서 보는 것과 같이 공구 바닥면의 최외각 경계인 원이 평엔드밀의 실루엣 곡선임을 알 수 있다. 이것을 통해 본 연구에서 얻어진 라운드엔드밀의 실루엣 곡선이 'r=0'인 특별한 경우에도 적용됨을 알 수 있다.

4-5. 볼엔드밀의 실루엣 곡선: $v=SH_B(u : r)$

공구의 반경이 'r'인 볼엔드밀의 실루엣 곡선을 구하려고 한다. 볼엔드밀은 라운드엔드밀에서 평평한 부분의 반경이 '0'인 경우이므로, 라운드엔드밀의 실루엣 곡선식인 식(15)의 모든 'f'에 0을 대입하면, 식 (17)과 같은 간단한 식으로 볼엔드밀의 실루엣 곡선이 정의된다.

$$v = SH_B(u : r) = s \cdot \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{\sqrt{1 + s^2}}, \quad \text{for } |u| < r \quad (17)$$

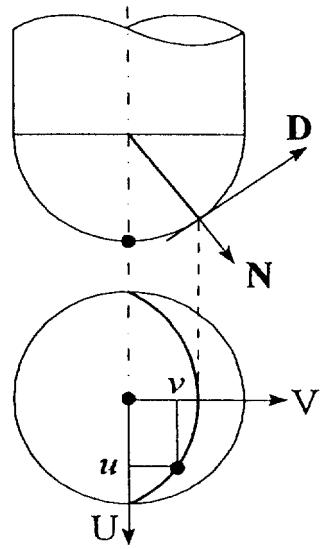


그림 10. 볼엔드밀의 실루엣 곡선.

식 (17)을 제곱해서 정리해보면, 장축의 길이가 '2r'이고 단축의 길이가 '2rs/(1+s)'인 타원(ellipse)을 나타내는 식임을 알 수 있다.

또, 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 구하는 것과 같은 방법으로 볼엔드밀 곡면의 법선 벡터와 공구의 이동 벡터가 수직인 조건을 이용해서 실루엣 곡선을 구해도 식 (17)과 같은 결과가 나온다. 따라서, 본 연구에서 얻은 라운드엔드밀의 실루엣 곡선이 'f=0'인 특별한 경우에도 잘 적용됨을 알 수 있다.

그림 11은 얻어진 식을 이용해서 볼엔드밀의 반경이 1일 때, 경사도 's'를 바꿔가면서 볼엔드밀의 실루엣 곡선을 UV-평면에 그린 것이다.

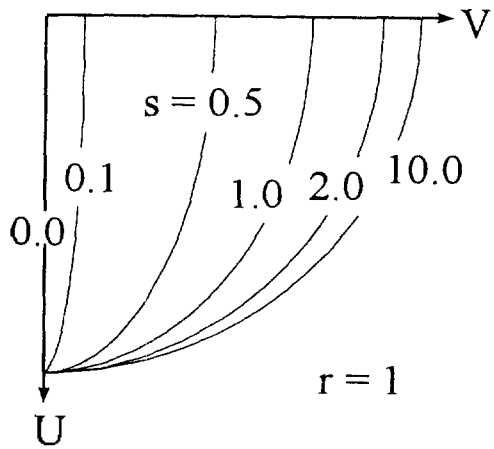


그림 11. UV-평면에서 볼엔드밀의 실루엣 곡선.

5. 공구 이동 궤적면의 계산량 분석

본 연구에서 제안한 방법으로 모델링된 공구 이동 궤적면에서 한 점을 계산할 때 필요한 연산 횟수와 Jerard[10]의 연구에 나타난 볼엔드밀의 연산 횟수를 표 2에 정리하였다.

5-1. 볼엔드밀 이동 궤적면의 계산량

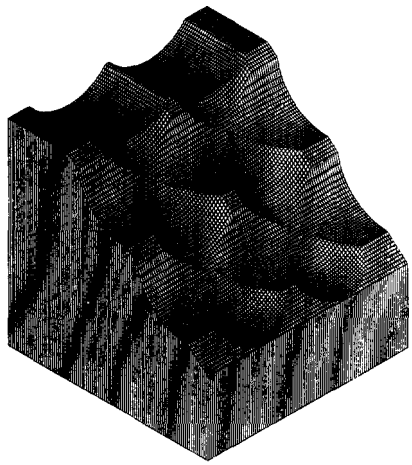
정확한 비교의 대상은 없지만, 본 연구에서 제시한 방법의 연산횟수는 Jerard[10]의 연구에서 제시한 연산횟수의 절반 정도다. Jerard는 개념적으로 평면, 구, 원통 등과 같은 간단한 기본 형상으로 공구의 이동 궤적면을 모델링하고, 주로 삼각함수를 사용하여 공구 이동 궤적면의 높이를 계산하였다. Jerard의 연구에서 공구가 움직여서 형성된 곡면인 B-영역(3-1절 참조)에서의 계산량은 본 연구보다 25%정도 많다. 하지만, Jerard는 영역 판별을 위해 시작점과 끝점을 각각 통과하면서 공구 이동 벡터에 수직한 두 개의 평면을 정의하고, 고려하는 점이 그 두 평면 사이에 있는지를 계산하였다. 이것을 위해 추가적으로 12개의 실수 연산을 필요로 한다.[10] 결과적으로 공구 이동 궤적면 상의 한 점을 계산하기 위해 본 연구에서 제시한 방법은 Jerard가 제시된 방법보다 2배 이상 빠르다.

5-2. 평엔드밀 이동 궤적면의 계산량

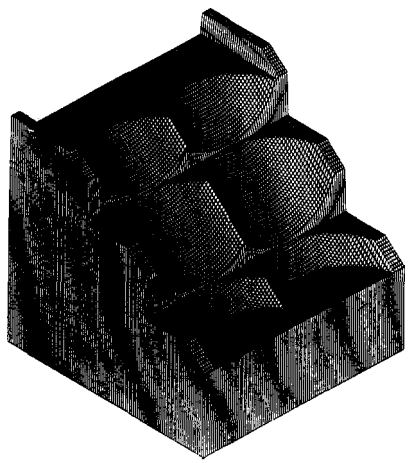
표 2에서 보듯이 볼엔드밀의 경우와 비슷한 횟수의 연산을 필요로 한다.

표 2. 공구 이동 궤적면 계산에 필요한 연산의 횟수

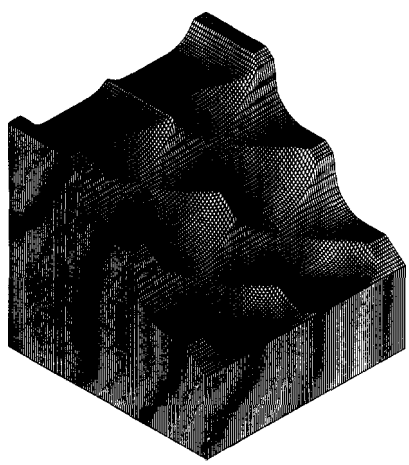
영 역	연 산	라운드엔드밀	평엔드밀	볼엔드밀	볼엔드밀(Jerard)[10]
A	*, /	31(or 27)	6	7	?
	+, -	21(or 24)	6	8	
	√	7	1	2	
B	*, /	32(or 28)	6	8	32+α
	+, -	23(or 26)	7	8	
	√	7	1	1	1
C	*, /	31(or 27)	6	7	?
	+, -	22(or 25)	7	9	
	√	7	1	2	
Etc		acos, cos (or 2 powers)			



(a) 볼엔드밀



(b) 평엔드밀



(c) 라운드엔드밀

그림 12. 모의가공의 예.

5-3. 라운드엔드밀 이동 궤적면의 계산량

Jerard[10]의 연구에서는 이진 탐색 방법을 제안하고 있는데, 본 연구에서는 볼엔드밀의 공구 이동 궤적면 계산보다 4배정도 많은 횟수의 연산으로 라운드엔드밀의 공구 이동 궤적면 상의 한 점을 계산해 낼 수 있다.

6. 결론 및 추후 연구 과제

본 연구에서는 라운드엔드밀의 공구 이동 궤적면을 비매개변수형 곡면으로 모델링 하였으며, 그것을 이용해서 라운드엔드밀의 특수한 경우인 볼엔드밀과 평엔드밀의 공구 이동 궤적면을 간단한 꼴로 제시하였다. 본 연구에서 제안한 방법은 볼엔드밀의 경우 지금까지 알려진 방법보다 2배 이상 빠른 방법으로 평가되며, 기존의 방법으로는 곤란했던 라운드엔드밀의 공구 이동 궤적면도 모델링할 수 있다.

본 연구에서 제안한 공구 이동 궤적면 모델링 방법을 이용하여 'Z-map 모델[11]'에서 구현된 모의가공의 간단한 예를 그림 12에 나타내었다.

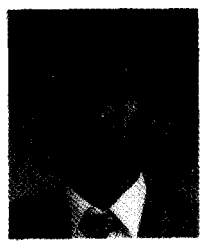
본 연구에서는 공구가 직선 이동하는 경우의 공구 이동 궤적면을 모델링 하였는데, 원호 이동하는 경우에도 본 연구에서 제시한 개념을 적용해서 공구 이동 궤적면을 모델링할 수 있을 것이다. 또, APT 공구[16]와 같이 금형가공에 사용되는 일반적인 공구의 이동 궤적면을 비매개변수형으로 표현한다면, 좀더 다양한 공구로 빠르게 모의가공을 수행할 수 있을 것이다. 그리고, 기계 헤드와 공구 홀더의 이동 궤적면을 비매개변수형으로 표현한다면, 수직 벡터 모델에서 충돌확인을 빠르고 쉽게 할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 최병규, 정연찬, "Z-map을 사용한 모의가공과 NC-code의 검증," 산업공학, 8권, 3호, pp. 155-169, 1995.
2. Anderson, R.O., "Detecting and Eliminating Collisions in NC Machining," *Computer-Aided Design*, Vol. 10, No. 4, pp. 231-237, 1978.
3. Chappel, I.T., "The Use of Vectors to Simulate Material Removed by Numerically Controlled Milling," *Computer-Aided Design*, Vol. 15, No. 3, pp. 156-158, 1983.
4. Van Mook, T., "Real Time Shaded NC Milling Display," *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, Vol. 20, No. 4, pp. 15-20, 1986.
5. Drysdale, R.L. *et al.*, "Discrete Simulation of NC Ma-

chining," *Alogorithmica*, V4, N1, pp. 33-60, 1989.
6. Jerard, R.B. *et al.*, "Methods for Detecting Errors in Numerically Controlled Machining of Sculptured Surfaces," *IEEE CG&A*, Vol. 9, No. 1, pp. 26-39, 1989.
7. Oliver, J.H., "Efficient Intersection of Surface Normals with Milling Tool Swept Volumes for Discrete Three-Axis NC Verification," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 283-287, 1992.
8. Kawashima, Y. *et al.*, "A Flexible Quantitative Method for NC Machining Verification Using a Space-division Based Solid Model," *The Visual Computer*, Vol. 7, pp. 149-157, 1991.
9. Jerard, R.B. and Drysdale, R.L. "Methods for Geometric Modeling, Simulation and Spatial Verification of NC Machining Programs," *Product Modeling for Computer-Aided Design and Manufacturing (Proc. IFIP)*, Elsevier, U.S.A, pp. 39-52, 1991.
10. Jerard, R.B., Drysdale, R.L. and Hauck, K., "Geometric Simulation of Numerically Control Machining," *Proc. ASME Int'l Computers in Engineering Conf.*, ASME, New York, pp. 129-136, 1988.
11. Choi, B.K., *Surface Modeling for CAD/CAM*, Elsevier, 1991.
12. Jerard, R.B., Hussaini, S.Z., Drysdale, R.L. and Schaudt, B., "Approximate Methods for Simulation and Verification of Numerically Controlled Machining Programs," *Visual Computer*, Vol. 5, pp. 329-348, 1989.
13. Oliver, J.H., "Efficient Intersection of Surface Normals with Milling Tool Swept Volumes for Discrete Three-Axis NC Verification," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 283-287, 1992.
14. Wang, W.P. and Wang, K.K., "Geometric Modeling for Swept Volume of Moving Solids," *IEEE CG&A*, Vol. 6, No. 12, pp. 8-17, 1986.
15. Rogers, D.F., *Procedural Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, 1985.
16. *Encyclopedia of the APT Programming Language*, IIT Research Institute, 1973.
17. Murray, R. Spiegel, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Mathematical Handbook*, McGraw Hill, pp. 32-33, 1968.

정 연 찬
1989년 한양대학교 산업공학과 학사
1991년 KAIST 산업공학과 석사
현 재 KAIST 산업공학과 박사과정
관심분야 : CAD/CAM, CAPP, NC Machining, Computer Graphics



최 병 규
1973년 서울대 산업공학과 학사
1975년 KAIST 산업공학과 석사
1982년 미국 Purdue대 산업공학과 박사
현 재 KAIST 산업공학과 교수 및 KAIST CIM 연구센터장
관심분야 : Surface Modeling, CAD/CAM, CAPP, 자동차 제조시스템 모델링 및 시뮬레이션등

<부록> : 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 구하기위한 4차식의 해

A-1. 일반적인 4차 방정식의 해법[17]
다음과 같은 4차 방정식을 고려하자.

$$u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4 = 0 \tag{A.1}$$

이때, 4차식의 계수로 표현되는 다음과 같은 3차식의 한 실근을 "v_1"이라고 하자.

$$v^3 + b_1v^2 + b_2v + b_3 = 0 \tag{A.2}$$

여기서, $b_1 = -a_2$, $b_2 = a_1a_3 - 4a_4$, $b_3 = 4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4$
위 4차식 (A.1)의 해는 다음과 같은 2차식의 해가 된다.

$$z^2 + c_1z + c_2 = 0 \tag{A.3}$$

여기서, $c_1 = \frac{1}{2}\{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4v_1}\}$, $c_2 = \frac{1}{2}\{v_1^2 \mp \sqrt{v_1 - 4a_4}\}$

A.2. 라운드엔드밀의 실루엣 곡선을 구하기 위한 4차식의 해

라운드엔드밀의 실루엣곡선을 구하는 과정에서 얻어진 다음과 같은 4차식의 해를 A.1절에 소개한 일반적인 해법을 따라 구하려고 한다.

$$t^4+a_1t^3+a_2t+a_4=0 \tag{A.4}$$

여기서, $a_1=-2f$, $\quad a_2=f^2-\frac{r^2s^2}{1+s^2}-\frac{u^2}{1+s^2}$, $\quad ra_3=2f\cdot\frac{u^2}{1+s^2}$, $\quad a_4=-f^2\cdot\frac{u^2}{1+s^2}$

3차식의 계수는 다음과 같이 된다.

$$b_1=-a_2, \quad b_2=0, \quad b_3=a_1a_2a_3-a_3^2-\frac{1}{4}a_1^3a_3$$

위의 3차식을 풀기 위해서는 다음과 같은 값을 구해야 한다.

$$Q=-(b_1/3)^2, \quad R=-b_3/2-(b_1/3)^3, \quad D=Q^3+R^2$$

이때, D는 3차식의 해를 판별하는 기준이 된다. 즉,

i) D가 0보다 크면, 하나의 실근과 2개의 허근이 있다.

ii) D가 0이면, 모든 근이 실근이고 적어도 두 개는 같은 값을 가지는 중근이다.

iii) D가 0보다 작으면, 모든 근이 실근이고 서로 다른 값이다.

앞에서 얻어진 Q, R, D를 사용하면, 3차식의 실근은 다음과 같이 정의된다.

$$\upsilon=\begin{cases}0, & \text{for } D=0 \text{ and } Q=0\\ 2\sqrt{-Q}\cdot\cos(\theta/3)-b_1/3, & \text{for } D\le 0 \text{ and } Q\neq 0\\ (R+\sqrt{D})^{1/3}+(R-\sqrt{D})^{1/3}-b_1/3, & \text{for } D>0\end{cases} \tag{A.5}$$

여기서, $\theta=\cos^{-1}(R/\sqrt{-Q^3})$

얻어진 3차식의 해를 사용하면, 2차식의 계수는 다음과 정의된다.

$$c_1=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2+4\upsilon}), & \text{for } D\le 0 \text{ or } |u|<|s|\cdot r\\ \frac{1}{2}(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2+4\upsilon}), & \text{for } D>0 \text{ and } |u|\ge|s|\cdot r\end{cases} \tag{A.6}$$

$$c_2=\begin{cases}\frac{1}{2}(\upsilon+\sqrt{\upsilon^2-4a_4}), & \text{for } D\le 0\\ \frac{1}{2}(\upsilon-\sqrt{\upsilon^2-4a_4}), & \text{for } D>0\end{cases} \tag{A.7}$$

이때, 조건에 따른 부호의 변화는 4개의 해 가운데 적합한 하나의 해만을 구하기 위해서

$f\le t\le f+r, \quad |u|\le f+r, \quad r\ge 0, \quad f\ge 0$

등과 같은 라운드엔드밀의 공구형상을 만족하도록 선택적으로 사용한 것이다.

위에서 정의된 'c_1'과 'c_2'를 이용하면, t는 다음과 같이 정의된다.

$$t(u)=TR(u:f,r)=\frac{1}{2}(-c_1+\sqrt{c_1^2-4c_2}) \tag{A.8}$$