論文 96-1-1-13

약의존성 잡음에서 몇가지 신호검파 방식들의 성능특성

김태현 송익호

正會員 金 泰 賢*, 金 光 淳**, 柳 尙 佑**, 宋 翊 鎬**

Performance Characteristics of Some Signal Detectors in Weakly Dependent Noise

Taehyun Kim*, Kwang Soon Kim**, Sangwoo Ryu**, Iickho Song** Regular Members

要 約

이 논문에서는, 약의존성 가산 잡음모형에서 이산시간 알려진 신호검파 문제를 생각하여, 이 잡음 모형에서 국소최적 검정통계량, 기억소자가 없는 검정통계량, 그리고 기억소자를 하나 갖는 검정통계량을 얻는다. 다음에, 이들 검정통계량에 바탕을 둔 여러 검파기의 성능특성을 견주어보고, 약의존성 잡음모형에서 기억소자를 하나 갖는 검파기의 성능이 거의 최적임을 보인다.

ABSTRACT

In this paper, we consider the discrete-time known signal detection problem under the presence of additive noise exhibiting weak dependence. We derive the locally optimum, memoryless, and one-memory detector test statistics under a weakly dependent noise model.

The performance characteristics of the one-memory detector are compared with those of the locally optimum and memoryless detectors. We observe that the one-memory detector can achieve almost optimum performance at the expense of only one memory unit under the weakly dependent noise model.

*한국방송공사 기술연구소
**한국과학기술원 전기 및 전자공학과
論文番號：95021-0130
接受日字：1995年 1月 30日

1. 머릿말

신호에 잡음이 섞여있을 때 신호를 검파하는 문제는 여러 참고 문헌에서 다루어지고 있다. 여러 신호 검파 문제 가운데에서 특히 약한 신호 (weak signal) 검파가 그 중요성 때문에 관심의 대상이 되고 있다. 약한 신호 검파 문제를 이진가설 검정문제로 봄으로써 편리한 수학적 틀을 얻을 수 있으며, 그 결과로 국소최적(locally optimum) 검파기를 〔1〕 얻을 수 있다.

한편, 신호 검파 문제를 다룰 때 흔히 관측은 독립이라 가정한다. 그러나, 이산시간 신호검파 문제에서 표본들이 통계학적으로 독립이라는 가정은 맞지 않을 때가 많다. 이제까지 여러 연구에서 이 문제를 풀 수 있도록 몇가지 의존성 관측모형에 바탕을 둔 신호 검파 시스템이 다뤄진 바 있다 〔2-4〕. 특히, 〔2〕에서는 잡음이 M차 의존성이고 신호가 상수일 때 신호검파문제를 다루었으며, 〔3〕에서는 잡음의 의존특성을 이동평균 (moving average) 모형으로 나타냈을 때 신호검파문제를 다루고 있다. 그리고, 〔4〕에서는 비정규잡음이 이동평균모형으로 나타날 때 국소최적검파에 대해 다루었다.

이 논문에서는 신호검파 시스템에 기억소자를 쓸 수 있고, 잡음성분이 서로 약하게 의존하고 있을때 신호검파문제를 다루어 보겠다. 특히 신호가 약할 때는 기억소자가 있는 국소최적검파기나 근사 국소최적검파기가 쓸모있음을 보이고자 한다. 일반화된 네이만-피어슨(Neyman-Pearson) 정리를 〔5〕 따르면, 국소최적검파기는 원점에서 검파력함수의 기울기를 오경보확률이 같은 모든 검파기가운데에서 가장 크게 한다고 알려져있다. 이런 원리에 바탕을 두고 〔6〕에서는 적산성 잡음모형에서 알려진 신호와 확률신호가 함께 있는 복합신호 검파에 대해 다루었고, 〔7〕에서는 가산성 잡음과 신호의존성 잡음이 있을 때 복합신호검파에 대해 다루었다.

이 논문에서는 먼저 약하게 의존하고 있는 잡음을 이동평균 계통으로 나타내는 모형을 제안하고 제안된 모형에서 기억소자가 있거나 없는 여러 검파기의 성능 특성에 대해 살펴 보고자 한다. 제안된 모형은 실제 잡음이 독립이 아닐 때 쓸모있으며, 기억소자가 있는 검파기는 그와 같은 잡음환경에서 실제 문제에 응용될 수 있을 것이다.

2. 여러가지 검정통계량

이 논문에서는 이산시간에서 약한 알려진 신호를 다루는데, 아래와 같이 귀무가설을 H_0으로, 대립가설을 H_1로 두자.

$$H_0 : X_i = W_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

$$H_1 : X_i = \theta S_i + W_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

여기서 X_i는 관측값이고, W_i는 잡음성분이다. 또, θ는 신호세기를 나타내는 매개변수이며, 편의상 알려진 신호성분 s_i는 모두 1로 두었다. 신호성분이 있고 없음을 따라 θ는 0이거나 0보다 크므로, 검파문제는 n 관측값으로 만들어지는 관측벡터 $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$이 주어졌을 때 어떤 가설을 고르느냐 하는 것이다. 한편, 의존성 잡음성분 W_i는 다음과 같이 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수들의 이동평균모형으로 나타난다고 가정한다.

$$W_i = e_i + \rho e_{i-1} u_{i-2}. \tag{1}$$

여기서, u_i는 단위계단함수이고 (곧, $i<0$이면 $u_i=0$, $i \geq 0$이면 $u_i=1$), e_i는 연속인 도함수를 가지고 정칙조건을 (regularity condition) 만족시키는 짝수대칭(even symmetric) 확률밀도함수 f_e를 가지는 서로 독립이고 같은 분포를 갖는 확률변수들이다. 한편, (1)에서 ρ를 의존매개변수라 부른다. 이 논문에서는 잡음성분이 약의존성이라 가정하고 있다. 곧 (1)에서 $|\rho|$의 값이 꽤 작다고 두겠다.

식 (1)의 모형을 따르는 관측값들로부터, 신호성분이 있는지를 결정할 수 있도록, 먼저 다음 식으로 국소최적 검정통계량을 얻는다.

$$T_{LO}(\underline{X}) = \frac{\frac{d}{d\theta} f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} \mid \theta)\mid_{\theta=0}}{f_{\underline{X}|0}(\underline{X} \mid 0)}. \tag{2}$$

여기서 $f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} \mid \theta)$는 θ일 때 관측벡터 $\underline{X}$의 조건부확률밀도함수이다. 잡음성분이 서로 독립이 아닐 때에는, $f_{X|\theta}(\underline{X} \mid \theta)$를 얻는 것은 일반적으로 어렵다. 그러나, (1)에서는 아래와 같이 이 확률밀도함수를 그런대로 쉽게 얻을 수 있다.

$$f_{\underline{X}|\theta}(\underline{X} \mid \theta) = f_e(X_1-\theta) f_e(X_2-\rho X_1-(1-\rho)\theta)\cdots$$

$$f_e\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-\rho)^j X_{n-j} - \frac{1-(-\rho)^n}{1+\rho}\theta\right).$$

따라서, (2)에서 다음을 얻을 수 있다.

$$T_{LO}(\underline{X}) = \sum_{m=0}^{n-1} g_{m,m+1}(\underline{X}). \tag{3}$$

여기서 비선형함수 $g_{m,k}(\underline{X})$는 $k \geq m+1$일 때 다음과 같이 정의된다.

$$g_{m,k}(\underline{X}) = -\frac{1-(-\rho)^{m+1}}{1+\rho}\frac{f_e'(\sum_{j=0}^{m}(-\rho)^j X_{k-j})}{f_e(\sum_{j=0}^{m}(-\rho)^j X_{k-j})}. \tag{4}$$

그러므로, 잡음의 상관성을 완전히 이용하려면 기억소자가 (n-1)개 필요하다. 이제, 기억소자를 하나까지만 쓸 수 있다고 하자. 먼저, 기억소자를 쓰지 않을 때를 생각해 보자. 식 (3)에서 ρ^k, k=1, 2, ..., n-1,이 들어간 항을 무시하면 검정통계량은 다음과 같다.

$$T_0(\underline{X}) = \sum_{k=1}^{n} g_{0,k}(\underline{X}). \tag{5}$$

검정통계량이 $T_0(\underline{X})$인 검파기는 독립 잡음에서의 국소최적검파기인데 [1], 이것을 이 논문에서는 기억소자가 없는 검파기라 부르기로 하자.

다음으로, 기억소자를 하나 쓸 때를 생각해 보자. 식 (3)에서 ρ^k, k= 2, 3, ..., n-1,이 들어간 항을 무시하면 검정통계량은 다음과 같다.

$$T_1(\underline{X}) = g_{0,1}(\underline{X}) + \sum_{k=2}^{n} g_{1,k}(\underline{X}). \tag{6}$$

검정통계량이 $T_1(\underline{X})$인 검파기를 기억소자를 하나 갖는 검파기라 부른다.

3. 점근 성능

표본의 크기가 무한대일 때의 성능인 검파기의 점근성능을 견주어 볼 때, 그 잣대로 점근상대효율이 널리 쓰인다 [8]. 검파기 D_B에 대한 검파기 D_A의 점근상대효율은 어떤 정칙조건아래에서 이 두 검파기의 효능비로 나타난다. 곧,

$$ARE_{A,B} = \frac{\xi_A}{\xi_B}.$$

여기서 검파기 D_i의 효능 ζ_i는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\xi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{[\frac{d}{d\theta}E\{T_i(\underline{X}) \mid \theta\} |_{\theta=0}]^2}{nV\{T_i(\underline{X}) \mid \theta\} |_{\theta=0}}, \quad i = A, B. \tag{7}$$

식 (7)에서 T_i는 검파기 D_i의 검정통계량이고, $E\{T_i(\underline{X}) \mid \theta\}$와 $V\{T_i(\underline{X}) \mid \theta\}$는 각각 θ일때 T_i의 평균과 분산이다.

정리 1 :

약의존성 잡음모형 (1)에서 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 선형상관 (linear correlator : LC) 검파기, 그리고 부호상관 (sign correlator : SC) 검파기의 효능은 다음과 같다.

$$\xi(T_0) = \frac{I(f_e) + \rho^2 E\{e_i^2\}E\{g_0'''(e_i)\}}{1+2\rho+C_e\rho^2} + O(\rho^3),$$

$$\xi(T_1) = \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho^2}I(f_e) + O(\rho^4),$$

$$\xi(T_{LC}) = \frac{1}{(1+\rho)^2 E\{e_i^2\}},$$

그리고

$$\xi(T_{SC}) = \frac{4f_e^2(0) + 4\rho^2 f_e(0)f_e''(0)E\{e_i^2\}}{1+4\rho f_e(0)E\{|e_i|\}} + O(\rho^3).$$

여기서 $O(\rho^3)$은 $\lim_{\rho\to 0} | O(\rho^3)/\rho^3 | < \infty$이고, $C_e = E\{e_i^2\}(E\{g_0(e_i)g_0''(e_i)\} + E\{[g_0'(e_i)]^2\})/I(f_e)$이며, $I(f_e) = \int_{-\infty}^{\infty}[f_e'(x)/f_e(x)]^2 f_e(x)\, dx$는 피셔 정보이고 (Fisher's information), $g_0(X_k) = g_{0,k}(\underline{X})$이다.

정리 1의 증명은 [9]에 있다.

한편, $|\rho|$의 값이 작을 때, $O(\rho^3)$항은 무시할 수 있으므로 정리 1을 쓰면 검파기들의 점근 성능을 견주어 볼 수 있다.

보기 1.

이 보기에서는 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 부호상관검파기, 선형상관검파기의 점근 성능을 견주어 본다. 확률밀도함수 f_e는 정규분포,

$$f_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

일반화된 정규분포일 때이다.

$$f_e(x) = \frac{K}{A(2K)\Gamma(\frac{1}{2K})} e^{-[\frac{|x|}{A(2K)}]^{2K}} . \tag{8}$$

여기서, K가 작을수록 이 확률밀도함수의 꼬리는 길어진다.

표 1에 점근상대효율값들이 나와있다. $|\rho|$의 값이 작을 때에는 기억소자를 하나 갖는 검파기의 점근 성능이 가장 좋음을 알 수 있다.

4. 유한표본성능

이제 표본의 크기가 유한할 때의 성능인 검파기의 유한 표본 크기 성능을 살펴보자. 유한 표본 크기 성능은 점근 성능보다 더 실제적인 측도임을 쉽게 알 수 있다.

보기 2.

확률밀도함수 f_e가 다음과 같은 때를 생각해보자.

$$f_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

이 때, $n \rightarrow \infty$이면 다음과 같다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$\frac{T_1(\underline{X})}{T_0(\underline{X})} = \frac{\frac{1}{n}T_1(\underline{X})}{\frac{1}{n}T_0(\underline{X})} \xrightarrow{L} (1-\rho)^2.$$

바꾸어 말하면, f_e가 정규확률밀도함수일 때에는 3절에서 보인 것처럼 기억소자를 하나 갖는 검파기와 기억소자가 없는 검파기는 성능이 같을 뿐만 아니라 검정통계량도 사실상 같다.

보기 3.

이 보기에서는 확률밀도함수 f_e가 다음과 같을 때 몇몇 검파기의 유한표본성능을 살펴 보자.

$$f_e(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \frac{1}{(1+x^2/3)^2} .$$

표본 크기가 50 일때 몇몇 검파기의 검파확률을 신호크기 θ의 함수로 그림 1에 보였다. 이 그림에서 점들의 간격은 0.02 이며, 이 점들은 오경보확률이 10^{-3}일 때 상대 오차가 1%가 되도록 100,000번의 몬테 카를로 실행를 통해 얻었다.

그림 1에서 D_0, D_1, D_{LO}, D_{LC}와 D_{SC}는 각각 기억소자가 없는 검파기, 기억소자를 하나 갖는 검파기, 국소최적 검파기, 선형상관 검파기, 그리고 부호상관 검파기를 뜻한다. 그리고, D_{P_j} j=1,2는 아래 잡음모형에서 설계된 [3] 검파기들을 뜻한다.

$$W_i = \rho e_{i-1} + e_i + \rho e_{i+1}. \tag{9}$$

여기서, D_{P_j} j=1,2의 검정통계량은 다음과 같다.

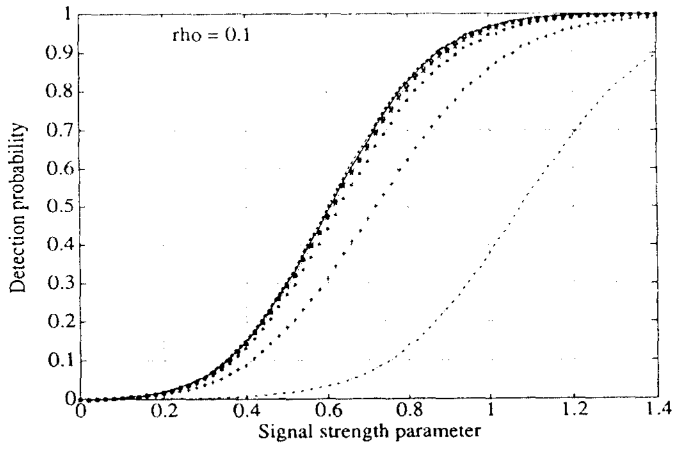

그림 1. (가): 여러 검파기의 검파확률, ---: D_{LO}, -----: D_1, -o-o-: D_o, -x-x-: D_{p_1} -*-*-: D_{p_2}, -+-+-: D_{SC}, - · - · -: D_{LC}.

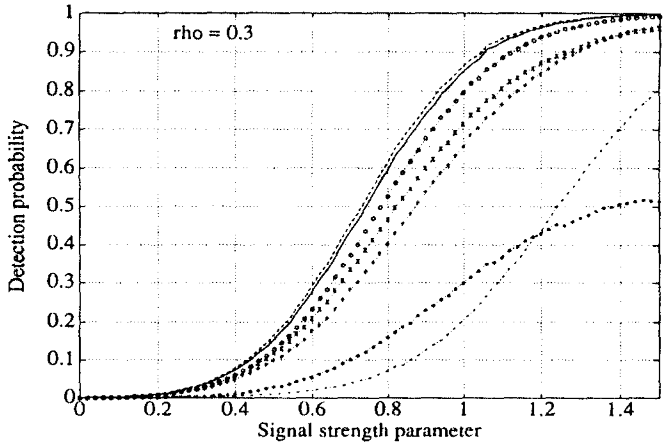

그림 1. (나): 여러 검파기의 검파확률, ---: D_{LO}, ----: D_1, -o-o-: D_o, -x-x-: D_{p_1}, -*-*-: D_{p_2}, -+-+-: D_{SC}, - · - · -: D_{LC}.

$$T_{P_j}(\underline{X}) = \sum_{k=1}^{n} \{g_0(X_k) - \frac{\rho j}{1+\rho j} I(f_e) X_k\}.$$

검파기 D_{P_2}의 성능은 모형 (9)에서 분석된 바 있다 [3]. 그런데, 이 논문에서의 주 관심은 모형 (1)에서의 검파성능이므로, (9)와 견주어서 ρe_{i+1} 항이 없음을 고려하면, (1)에서는 D_{P_1}을 쓰는 것이 더 좋을 것이다. (그림 1을 살펴 보면 이는 더욱 명확해진다.)

그림 1에 잡음 모형 (1)에서 ρ가 0.1과 0.3일 때 검파기들의 검파확률을 보였다. 일반적으로 그림 1에서 우리는 다음과 같은 세가지를 관찰할 수 있다. 첫째, D_1의 검파확률은 D_{LO}의 검파확률보다 조금 낮다. 기억소자 수를 보거나 구현의 복잡함을 볼 때, 이 차이는 그리 크지 않다고 말할 수 있다. 둘째로, 앞에서 간략히 설명했던대로 D_{P_1}의 검파확률은 D_{P_2}의 검파확률보다 높다. 세째로, 잡음이 충격성이므로 D_{SC}의 검파확률은 D_{LC}의 검파확률보다 크다.

그림 1 (가)에서와 같이 $|\rho|$의 값이 작으면, 이 일반적인 관찰은 더욱 옳다. 한편 D_1의 검파확률은 D_0의 검파확률보다 높고 D_{LO}의 검파확률과 비슷하다. 이와 같은 D_1의 거의 최적인 성능이 기억소자 하나로 얻어졌다는 것은 눈여겨 볼 만하다. 위 모의 실험 결과를 종합하면 약의존성 잡음모형에서는 기억소자를 하나 갖는 검파기가 다른 검파기들과 견주어서 좋은 성능 특성을 나타낸다고 할 수 있다. 이는 잡음의 분포가 바뀔 때에도 같을 것이다.

5. 맺음말

이 논문에서는 약의존성 잡음모형에서 알려진 신호 검파문제를 다루어 보았다. 약의존성 잡음모형을 제안하였고, 이 모형에서 국소최적검파기와 이를 근사한 검파기들의 검정통계량을 얻었다. 다음으로, 약의존성 잡음모형에서 기억소자를 하나 갖는 검파기를 기억소자가 없는 검파기, 선형상관검파기, 부호상관검파기와 견주어 보았다.

여러 검파기의 성능을 좀 더 구체적으로 견주어 볼 수 있도록, 잡음이 정규분포, 일반화된 정규분포를 따를 때에 점근 성능과 유한표본성능을 살펴보았다. 그 결과 의존매개변수의 절대값이 작으면 기억소자를 하나 갖는 검파기의 성능이 국소최적 검파기의 성능과 거의 비슷함을 볼 수 있었고, 국소최적 검파기가 아닌 다른 검파기의 성능보다 좋음을 알 수 있다.

참고문헌

1. S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, New York : Springer-Verlag, 1988.

2. H.V. Poor and J.B. Thomas, "Memoryless discrete-time detection of a constant signal in m-dependent noise," *IEEE Tr. Inform. Theory*, vol. IT-25, pp.54—61, Jan. 1979.
3. H.V. Poor, "Signal detection in the presence of weakly dependent noise," *IEEE Tr. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp.735—744, Sep. 1982.
4. A.M. Maras, "Locally optimum detection in moving average non-Gaussian noise," *IEEE Tr. Commun.*, vol. COM-36, pp.907--912, Aug. 1988.
5. E.L. Lehmann, Testing Statistical Hypotheses, New York: Wiley, 1986.
6. 엄 태상, 김 상엽, 김 형명, 송 익호, 김 선용, 유 홍균, "복합신호 - 적산성 잡음모형에서 약한 신호 검파", 한국통신학회 논문지, 16권, 1125-1131쪽, 1991년 11월.
7. 송 익호, 김 상엽, 김 선용, 박 성일, "신호의존성 잡음모형과 복합신호 검파", 한국음향학회지, 12권, 19-26쪽, 1993년 7월.
8. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, 4th Ed., New York: Oxford Univ. Press, 1979.
9. 김 태현, 약의존성 잡음 모형에서 알려진 신호 검파, 석사학위논문, 한국과학기술원 전기및 전자공학과, 1994년 2월.

金 泰 賢(Taehyun Kim) 정회원

1969년 12월 1일
1992년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 공학사
1994년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사
1994년 3월~현재: 한국방송공사 기술연구소 연구원
※주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 신호검파

金 光 淳(Kwang Soon Kim) 정회원

1972년 9월 20일
1994년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학사(최우등)
1996년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사
1996년 3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정
※주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 이동 통신, 통신이론

柳 尙 佑(Sangwoo Ryu) 정회원

1972년 2월 24일
1994년 2월 : 연세대학교 전자공학과 공학사
1994년 3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정
※주관심 분야 : 통계학적 신호처리, 배열 신호처리

宋 翊 鎬(Iickho Song) 정회원

1960년 2월 20일
1982년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사 (준 최우등)
1984년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학석사
1985년 8월 : 펜실베니아 대학교 전기공학과 공학석사
1987년 5월 : 펜실베니아 대학교 전기공학과 공학박사
1987년 3월~1988년 2월 : 벨 통신연구소 연구원
1988년 3월~1991년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수
1991년 9월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 부교수
1995년 2월~현재: 한국통신학회 논문지 편집위원
1991년 11월 : 한국통신학회 학술상
1993년 11월 : 한국음향학회 우수연구상
※주관심 분야 : 통계학적 신호 처리, 신호검파, 스펙트럼 추정, 이동통신