

임의중단된 이변량 지수모형의 독립성에 대한 붓스트랩 검정

김 달 호¹⁾, 조 길 호²⁾, 조 장 식³⁾

요 약

본 논문에서는 임의중단된 자료가 관찰되는 경우 Marshall과 Olkin의 이변량 지수 모형의 독립성에 대한 붓스트랩 검정절차를 제안하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 붓스트랩 검정법과 기존의 다른 검정법들의 검정력을 비교하였다.

1. 서론

두 개의 부품으로 이루어진 시스템에서 두 부품의 수명시간을 서로 상관관계가 있는 확률변수로 가정하는 것이 현실적인 경우가 많다. 예를 들어, 사람의 귀, 눈, 심장등 쌍으로 이루어진 조직을 생각한다면 이들의 수명시간은 서로 종속적인 관계가 있다. Marshall과 Olkin(1967)은 이와 같이 종속적인 관계에 있는 두 부품의 수명시간에 대한 확률모형으로서 이변량 지수분포를 제안하였다. 두 부품의 수명시간 X 와 Y 가 모수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 를 갖는 Marshall과 Olkin의 이변량 지수분포를 따른다면 X 와 Y 의 결합 생존함수는 다음과 같다.

$$\bar{F}(x, y) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)\}. \quad (1.1)$$

여기서, $x > 0, y > 0, \lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 이다. 이 모형은 두 부품이 동시에 고장날 확률이 있는 시스템에 대한 모형으로도 적합하다. 이 모형하에서 $\lambda_3 / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ 는 각 부품의 수명시간 X 와 Y 의 상관계수가 되며, 두 부품이 동시에 고장날 확률 $P(X=Y)$ 와도 같음은 잘 알려져 있다. 따라서 두 부품의 수명시간에 대한 독립성 검정이 관심의 대상인 경우 $\lambda_3 = 0$ 인 것은 두 부품의 수명시간이 서로 독립이라는 것과 동일하다. 즉, $\lambda_3 = 0$ 의 검정은 두 부품의 수명시간의 독립성 검정과 일치한다.

Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형에서 완전한 자료가 관찰되는 경우 Arnold(1968)는 모수들에 대한 점추정량과 그 추정량들의 근사적 정규성을 밝혔고, Bemis, Bain과 Higgins(1972) 그리고 Bhattacharyya와 Johnson(1973)는 $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 가정하에서 독립성에 대한 여러 검정법들

1) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 경북대학교 자연과학대학 통계학과 전임강사
2) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 경북대학교 자연과학대학 통계학과 부교수
3) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 경북대학교 자연과학대학 통계학과 시간강사

을 연구하였으며, Hanagal과 Kale(1991)은 $\lambda_1 = \lambda_2$ 의 가정이 없는 경우에 대표본에 근거한 독립성 검정법을 제안하였다. 한편, 임의중단된 자료가 관찰되는 경우 Hanagal과 Kale(1992)은 대표본에 근거한 독립성 검정법들을 몇가지 제안하였다. 그러나 그들의 검정법은 검정통계량의 편의 때문에 많은 경우 소표본에서 낮은 효율성을 나타내는 경향이 있다. 소표본에서 통계량에 대한 편의를 수정하는 방법으로서의 붓스트랩 방법에 착안하여, 본 논문에서는 임의 중단된 자료가 관찰된 Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형에서 $\lambda_1 = \lambda_2$ 의 가정이 없는 경우 독립성에 대한 붓스트랩 가설검정 절차를 소개하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 Hanagal과 Kale(1992)의 검정방법들과 붓스트랩 검정법의 검정력을 비교하였다. Efron(1979)에 의해 처음으로 소개어진 붓스트랩 방법은 Hinkley(1988), Beran(1988), Hall과 Wilson (1991)에 의해서 붓스트랩 가설 검정의 이론적인 측면과 실제적 응용면이 연구 되어왔다.

2. 독립성 검정

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 을 식(1.1)의 이변량 지수분포를 따르는 확률벡터라 하고 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 을 그들의 관측치라 하자. 그리고 i 번째 부품들의 임의 중단시간을 T_i 라 하고 T_i 는 평균이 θ^{-1} 인 지수분포를 따르며 T_i 와 (X_i, Y_i) 는 서로 독립이라 가정하자. 그러면 관찰된 i 번째 부품들의 수명시간 (x_i, y_i) 는 다음과 같이 주어진다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & \text{만약 } \max(x_i, y_i) < t_i \\ (x_i, t_i), & \text{만약 } x_i < t_i < y_i \\ (t_i, y_i), & \text{만약 } y_i < t_i < x_i \\ (t_i, t_i), & \text{만약 } t_i < \min(x_i, y_i). \end{cases} \quad (2.1)$$

그리고 $I(\cdot)$ 를 어떤 지시함수라 하고 n_j ($j=1, \dots, 6$)를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} n_1 &= \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i < t_i), & n_2 &= \sum_{i=1}^n I(y_i < x_i < t_i), & n_3 &= \sum_{i=1}^n I(x_i = y_i < t_i), \\ n_4 &= \sum_{i=1}^n I(x_i < t_i < y_i), & n_5 &= \sum_{i=1}^n I(y_i < t_i < x_i), & n_6 &= \sum_{i=1}^n I(\min(x_i, y_i) > t_i). \end{aligned}$$

그러면 Hanagal과 Kale(1992)에 의해서 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta) &= \lambda_1^{n_1+n_4} \lambda_2^{n_2+n_5} \lambda_3^{n_3} (\lambda_1 + \lambda_3)^{n_2} (\lambda_2 + \lambda_3)^{n_1} \theta^{n_4+n_5+n_6} \\ &\quad \exp\{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^n y_i - (\lambda_3 + \theta) \sum_{i=1}^n \max(x_i, y_i)\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

그리고 우도방정식들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1 + n_4}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)}{\partial \lambda_2} = \frac{n_2 + n_5}{\lambda_2} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)}{\partial \lambda_3} = \frac{n_3}{\lambda_3} + \frac{n_1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_1 + \lambda_3} - \sum_{i=1}^n \max(x_i, y_i) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)}{\partial \theta} = \frac{n_4 + n_5 + n_6}{\theta} - \sum_{i=1}^n \max(x_i, y_i) = 0. \quad (2.6)$$

따라서, 최우추정량 ($\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$)은 뉴턴-랩슨의 반복적 방법에 의해 구할 수 있으며, Fisher의 정보행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = E \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right] = (I_{ij}) : (i, j) = 1, 2, 3,$$

여기서

$$I_{11} = \frac{E(n_1) + E(n_4)}{\lambda_1^2} + \frac{E(n_2)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}, \quad I_{22} = \frac{E(n_2) + E(n_5)}{\lambda_2^2} + \frac{E(n_1)}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2},$$

$$I_{33} = \frac{E(n_1)}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} + \frac{E(n_2)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2} + \frac{E(n_3)}{\lambda_3^2}, \quad I_{12} = 0, \quad I_{13} = \frac{E(n_2)}{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}, \quad I_{23} = \frac{E(n_1)}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2}$$

이다.

Fisher 정보행렬의 역행렬 $I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (I^{ij}) : (i, j) = 1, 2, 3$ 은 $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (I_{ij}) : (i, j) = 1, 2, 3$ 로 부터 계산할 수 있다. 역시 그들은 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3 - \lambda_3) / \sqrt{I^{33}}$ 의 극한분포가 표준정규 분포를 따른다는 것을 밝혔으며, 이것을 이용하여 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$ 의 검정에 대해서 다음과 같은 검정함수를 제안하였다.

$$\phi_{HK}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{만약 } \sqrt{n} \hat{\lambda}_3 / \sqrt{I^{33}} > \Phi^{-1}(1 - \alpha), \\ 0, & \text{그외} \end{cases} \quad (2.7)$$

여기서 I^{33} 는 최우추정량 ($\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$)에 기초한 I^{33} 로 부터 계산되어지고, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규 분포의 누적분포함수이다.

그들은 Arnold(1968)과 비슷한 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$ 에 대한 일치통계량 (U_1, U_2, U_3, U_4)을 다음과 같이 구하였다.

$$U_1 = (n-1)(n_1+n_4) / (n \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i)), \quad U_2 = (n-1)(n_2+n_5) / (n \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i)),$$

$$U_3 = (n-1)n_3 / (n \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i)), \quad U_4 = (n-1)n_6 / (n \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i)).$$

같은 방법으로 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$ 의 검정에 대해서, 그들은 스튜던트화 검정통계량 $\sqrt{n}U_3 / \hat{\sigma}(U_3)$ 을 사용하여 다음과 같은 검정함수를 제안하였다.

$$\phi_{U_3}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{만약 } \sqrt{n}U_3 / \hat{\sigma}(U_3) > \Phi^{-1}(1-\alpha), \\ 0, & \text{그외} \end{cases}, \quad (2.8)$$

여기서 $\hat{\sigma}^2(U_3) = \frac{(n-1)U_3(U_1+U_2+U_3+U_4)+U_3^2}{n-2}$ 이다.

또한 그들은 스튜던트화 검정통계량 $\sqrt{n}n_3 / \hat{\sigma}(n_3)$ 을 사용하여 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$ 의 검정법을 다음과 같이 제안하였다.

$$\phi_{n_3}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{만약 } \sqrt{nn_3} / \hat{\sigma}(n_3) > \Phi^{-1}(1-\alpha), \\ 0, & \text{그외} \end{cases}, \quad (2.9)$$

여기서 $\hat{\sigma}^2(n_3) = n_3(n-n_3)$ 이다.

3. 붓스트랩 검정법

이 절에서는 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$ 에 대한 붓스트랩 검정법을 제안한다.

Hall(1988)은 H_0 하에서 검정통계량 $\sqrt{n} \hat{\lambda}_3 / \sqrt{\hat{I}^{BS}}$ 의 극한분포에서 구한 임계치가 1차까지 정확(first order correct)한 반면, pivot 통계량을 기초로 한 붓스트랩 분포함수에서 구한 임계치는 2차까지 정확(second order correct)함을 밝혔다. 따라서 극한분포가 미지의 모수에 의존하지 않는 근사적 pivot 통계량에 대한 표본분포를 붓스트랩 방법으로 추정하여 이를 독립성 검정에 활용하고자 한다. 한편 H_0 하에서 $\sqrt{n} \hat{\lambda}_3 / \sqrt{\hat{I}^{BS}}$ 의 분포가 근사적으로 미지의 모수에 의존하지 않는 표준정규분포를 따르므로 근사적 pivot 통계량으로서 $\sqrt{n} \hat{\lambda}_3 / \sqrt{\hat{I}^{BS}}$ 을 사용한다. 여기서 우리는 모수적 모형을 고려하고 있기 때문에, 원래의 표본을 복원추출하여 붓스트랩 표본을 얻지 아니하고 모수적 방법으로 구한 표본분포함수로 부터 붓스트랩 표본을 추출하는 모수적 붓스트랩을 사용한다 (Efron과 Tibshirani(1993)).

따라서 가설 $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 > 0$ 의 붓스트랩 검정절차는 다음과 같다.

- (1) 최우추정량 $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\theta})$ 을 구하기 위하여 우도방정식 (2.3), (2.4), (2.5)와 (2.6)을 푼다.
- (2) 모수 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ 를 갖는 이변량지수분포와 평균이 $\hat{\theta}^{-1}$ 인 지수분포로 부터 각각 크기가 n 인 랜덤포본을 생성한다. 각각의 표본분포함수에서 생성된 표본을 붓스트랩 표본이라 부르며 $((x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*))$ 와 $(t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*)$ 로 나타낸다.
- (3) 붓스트랩 표본을 이용하여 (2.3), (2.4), (2.5), (2.6)과 같은 우도방정식을 각각 구성한다. 즉,

$$\frac{n_1^* + n_4^*}{\hat{\lambda}_1} + \frac{n_2^*}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3} - \sum_{i=1}^n x_i^* = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{n_2^* + n_5^*}{\hat{\lambda}_2} + \frac{n_1^*}{\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3} - \sum_{i=1}^n y_i^* = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{n_3^*}{\hat{\lambda}_3} + \frac{n_1^*}{\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3} + \frac{n_2^*}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3} - \sum_{i=1}^n \max(x_i^*, y_i^*) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{n_4^* + n_5^* + n_6^*}{\hat{\theta}} - \sum_{i=1}^n \max(x_i^*, y_i^*) = 0, \tag{3.4}$$

여기서

$$(x_i^*, y_i^*) = \begin{cases} (x_i^*, y_i^*), & \text{만약 } \max(x_i^*, y_i^*) < t_i^* \\ (x_i^*, t_i^*), & \text{만약 } x_i^* < t_i^* < y_i^* \\ (t_i^*, y_i^*), & \text{만약 } y_i^* < t_i^* < x_i^* \\ (t_i^*, t_i^*), & \text{만약 } t_i^* < \min(x_i^*, y_i^*) \end{cases}$$

이고 n_j^* ($j=1, 2, \dots, 6$)는 붓스트랩 표본을 사용해서 계산한 n_j 이다.

- (4) H_0 하에서 검정통계량의 붓스트랩 추정치를 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3^* - \hat{\lambda}_3) / \sqrt{\hat{I}^{33*}}$ 로 계산한다. 여기서 \hat{I}^{33*} 은 붓스트랩 표본으로 계산한 \hat{I}^{33} 의 값이다.

- (5) 위의 과정을 B 번 반복하며, 이때 b 번째 검정통계량의 붓스트랩 추정치는 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3^{*b} - \hat{\lambda}_3) / \sqrt{\hat{I}^{33*b}}$, $b=1, 2, \dots, B$ 이다.

위의 붓스트랩 절차에 의해 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3^* - \hat{\lambda}_3) / \sqrt{\hat{I}^{33*}}$ 의 분포함수를 근사적으로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{H}^*(s) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I(\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3^{*b} - \hat{\lambda}_3)/\sqrt{\hat{I}^{33*b}} \leq s), \quad (3.5)$$

여기서 s 는 임의의 실수이다.

따라서 가설 $H_0: \lambda_3 = 0$ 대 $H_1: \lambda_3 > 0$ 에 대한 붓스트랩 검정법을 (3.5)식의 붓스트랩 분포 함수를 이용하여 다음과 같이 제안한다.

$$\phi_{BOOT}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{만약 } \sqrt{n} \hat{\lambda}_3 / \sqrt{\hat{I}^{33}} > cp^*, \\ 0, & \text{그외} \end{cases}, \quad (3.6)$$

여기서 cp^* 는 $cp^* = \hat{H}^{*-1}(1-\alpha) = \inf\{s : \hat{H}^*(s) \geq 1-\alpha\}$ 를 만족하는 값이며 $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_3^{*b} - \hat{\lambda}_3)/\sqrt{\hat{I}^{33*b}}$ 의 값을 B 번 반복하여 순서대로 나열했을 때 $B(1-\alpha)$ 번째의 값이다.

4. 모의실험 및 결론

이 절에서는 3절에서 제안한 붓스트랩 검정법 $\phi_{BOOT}(x, y)$ 과 Hanagal과 Kale(1992)이 제안한 기존의 검정법 $\phi_{HK}(x, y)$, $\phi_{n_3}(x, y)$, $\phi_{U_3}(x, y)$ 들을 몬테칼로 모의실험을 통하여 검정력을 비교하고자 한다. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.10$, $\lambda_3 = 0.03, 0.06, 0.09$ 에 대해 임의중단률(γ)을 $\gamma = P(X) > T$ 또는 $Y > T$ 라고 정의 할 경우, $\gamma = 10\%, 30\%, 50\%$ 의 각각의 조합에 대하여, 표본의 크기가 $n=10, 20, 40$ 인 경우 유의수준 $\alpha = 0.01, 0.05$ 에 대하여 500번을 반복하여 검정력을 계산하였으며 각각의 경우 붓스트랩 표본은 $B=1000$ 을 생성하였다. 이들의 결과는 <표 1-3>과 <그림 1-6>에 잘 나타나 있으며 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

- (1) 대부분의 경우 붓스트랩 검정법 $\phi_{BOOT}(x, y)$ 의 검정력이 기존의 검정법 $\phi_{HK}(x, y)$, $\phi_{n_3}(x, y)$, $\phi_{U_3}(x, y)$ 들의 검정력보다 효율적임을 알 수 있다. 특히 소표본에서 붓스트랩 검정법이 훨씬 효율적임을 알 수 있다.
- (2) 모든 검정법의 검정력은 표본의 크기가 증가함에 따라 증가하는 경향이 있음을 알 수 있다. 붓스트랩 검정법은 표본의 크기에 관계없이 기존의 검정법들 보다 효율적임을 알 수 있다.
- (3) 임의중단률 γ 와 표본의 크기를 고정시킬 때, 모든 검정법의 검정력은 λ_3 의 값이 증가할 때 증가하는 경향이 있음을 알 수 있다.
- (4) 표본의 크기 n 와 λ_3 의 값을 고정시킬 때, 모든 검정법의 검정력은 임의중단률 γ 가 증가하면 감소하는 경향이 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 제안된 붓스트랩방법이 기존의 검정방법들보다 검정력 면에서 효율적임을 알 수 있고, 제안된 방법을 다른 이변량 지수모형에 적용하여 비교하는 것도 좋을것이라 생각한다.

<표 1> $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 = 0.03$ 인 경우 $\phi_{BOOT}(x, y)$, $\phi_{HK}(x, y)$, $\phi_{n_3}(x, y)$ 와 $\phi_{U_3}(x, y)$ 의 검정력

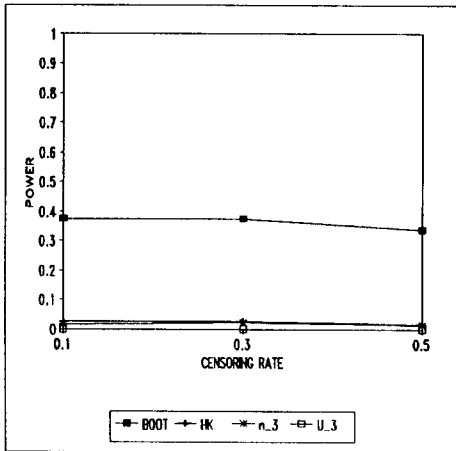
γ	n	α	$\phi_{BOOT}(x, y)$	$\phi_{HK}(x, y)$	$\phi_{n_3}(x, y)$	$\phi_{U_3}(x, y)$
10%	10	0.01	0.3740	0.0260	0.0160	0.0000
		0.05	0.5700	0.2540	0.1180	0.0160
	20	0.01	0.4100	0.1520	0.0900	0.0280
		0.05	0.7840	0.5720	0.4820	0.2420
	40	0.01	0.8320	0.6160	0.6020	0.4040
		0.05	0.9780	0.9000	0.8880	0.8880
30%	10	0.01	0.3740	0.0260	0.0220	0.0000
		0.05	0.5560	0.2220	0.0920	0.0220
	20	0.01	0.3880	0.1020	0.0720	0.0180
		0.05	0.7440	0.4720	0.3800	0.1700
	40	0.01	0.7480	0.4720	0.4620	0.2740
		0.05	0.9680	0.8380	0.8240	0.8240
50%	10	0.01	0.3380	0.0160	0.0160	0.0000
		0.05	0.5400	0.1680	0.0760	0.0160
	20	0.01	0.3540	0.0800	0.0420	0.0160
		0.05	0.6480	0.3620	0.3040	0.1180
	40	0.01	0.6100	0.3580	0.3580	0.2240
		0.05	0.9260	0.7620	0.7440	0.7440

<표 2> $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 = 0.06$ 인 경우 $\phi_{BOOT}(x, y)$, $\phi_{HK}(x, y)$, $\phi_{n_3}(x, y)$ 와 $\phi_{U_3}(x, y)$ 의 검정력

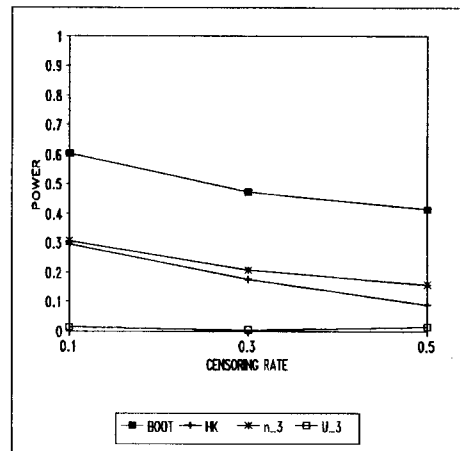
γ	n	α	$\phi_{BOOT}(x, y)$	$\phi_{HK}(x, y)$	$\phi_{n_3}(x, y)$	$\phi_{U_3}(x, y)$
10%	10	0.01	0.4640	0.1420	0.1680	0.0020
		0.05	0.7200	0.4980	0.3440	0.1680
	20	0.01	0.7560	0.5380	0.4400	0.2780
		0.05	0.9540	0.8720	0.8300	0.6300
	40	0.01	0.9900	0.9560	0.9540	0.9220
		0.05	1.0000	0.9960	0.9940	0.9940
30%	10	0.01	0.4160	0.0940	0.1140	0.0020
		0.05	0.6720	0.4600	0.3020	0.1140
	20	0.01	0.6920	0.4260	0.3080	0.1500
		0.05	0.9340	0.8340	0.7800	0.5800
	40	0.01	0.9820	0.9160	0.9140	0.8100
		0.05	0.9960	0.9880	0.9880	0.9880
50%	10	0.01	0.3760	0.0340	0.0520	0.0040
		0.05	0.5760	0.3160	0.1920	0.0520
	20	0.01	0.5540	0.3200	0.2240	0.1180
		0.05	0.8900	0.7620	0.6720	0.4240
	40	0.01	0.9460	0.8620	0.8620	0.7060
		0.05	0.9880	0.9760	0.9680	0.9680

<표 3> $H_0 : \lambda_3 = 0$ 대 $H_1 : \lambda_3 = 0.09$ 인 경우 $\phi_{BOOT}(x, y)$, $\phi_{HK}(x, y)$, $\phi_{n_3}(x, y)$ 와 $\phi_{U_3}(x, y)$ 의 검정력

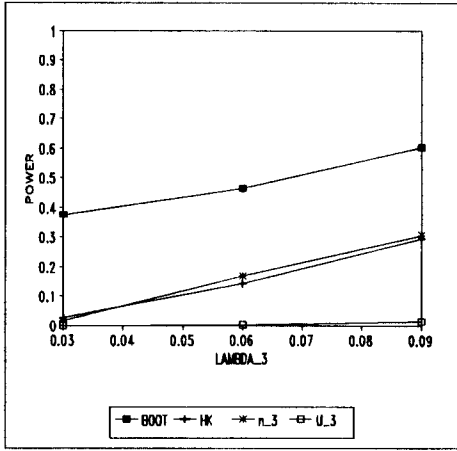
γ	n	α	$\phi_{BOOT}(x, y)$	$\phi_{HK}(x, y)$	$\phi_{n_3}(x, y)$	$\phi_{U_3}(x, y)$
10%	10	0.01	0.6040	0.2940	0.3060	0.0140
		0.05	0.8120	0.7160	0.5960	0.3060
	20	0.01	0.9320	0.8500	0.7720	0.5800
		0.05	0.9920	0.9760	0.9680	0.8880
	40	0.01	0.9980	0.9960	0.9960	0.9860
		0.05	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
30%	10	0.01	0.4720	0.1740	0.2080	0.0040
		0.05	0.7760	0.6460	0.4620	0.2080
	20	0.01	0.9100	0.7640	0.6780	0.4760
		0.05	0.9860	0.9660	0.9560	0.8720
	40	0.01	0.9980	0.9900	0.9860	0.9680
		0.05	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
50%	10	0.01	0.4240	0.0880	0.1560	0.0140
		0.05	0.6900	0.5260	0.3920	0.1560
	20	0.01	0.6960	0.4820	0.4140	0.2240
		0.05	0.9340	0.8680	0.8120	0.6240
	40	0.01	0.9800	0.9580	0.9480	0.8920
		0.05	0.9980	0.9960	0.9940	0.9940



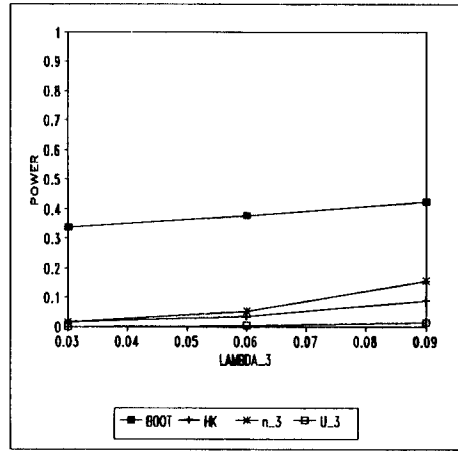
<그림 1> $n = 10$ 이고 $\lambda_3 = 0.03$ 인 경우 γ 의 변화에 대한 검정력



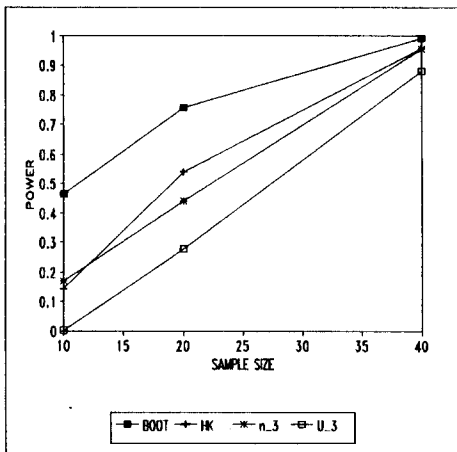
<그림 2> $n = 10$ 이고 $\lambda_3 = 0.09$ 인 경우 γ 의 변화에 대한 검정력



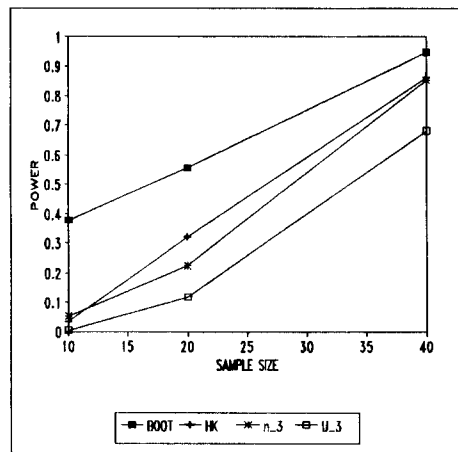
<그림 3> $n=10$ 이고 $\gamma=10\%$ 인 경우 λ_3 의 변화에 대한 검정력



<그림 4> $n=10$ 이고 $\gamma=50\%$ 인 경우 λ_3 의 변화에 대한 검정력



<그림 5> $\gamma=10\%$ 이고 $\lambda_3=0.06$ 인 경우 n 의 변화에 대한 검정력



<그림 6> $\gamma=50\%$ 이고 $\lambda_3=0.06$ 인 경우 n 의 변화에 대한 검정력

참 고 문 헌

- [1] Arnold, B.C. (1968). Parameter Estimation for a Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 848-852.
- [2] Bemis, B.M., Bain, L.J. and Higgins, J.J. (1972). Estimation and hypothesis testing for the parameters of a bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 927-929.
- [3] Beran, R. (1988). Prepivoting test statistics : A bootstrap view of asymptotic refinements. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 687-697.
- [4] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A. (1973). On test of independence in a bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 68, 704-706.
- [5] Efron, B. (1979). Bootstrap methods : Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7, 1-26.
- [6] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.
- [7] Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals.(with discussion). *Annals of Statistics*, 16, 927-953.
- [8] Hall, P. and Wilson, S.R. (1991). Two guidelines for bootstrap hypothesis testing. *Biometrics*, 47, 757-762.
- [9] Hanagal, D.D. and Kale, B.K. (1991). Large sample tests of independence for absolutely continuous bivariate exponential distribution, *Communications in Statistics*, A20, 1301-1313.
- [10] Hanagal, D.D. and Kale, B. K. (1992). Some inference results in bivariate exponential distributions based on censored samples, *Communications in Statistics*, A21, 1273-1295.
- [11] Hinkely, D.V. (1988). Bootstrap methods.(With discussion), *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 50, 321-337.
- [12] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.

Bootstrap Testing for Independence in Marshall and Olkin's Model under Random Censorship

Dal Ho Kim⁴⁾, Kil Ho Cho⁵⁾ and Jang Sik Cho⁶⁾

Abstract

In this paper, we consider the Marshall and Olkin's bivariate exponential model under random censorship for the distribution of failure times of a system with two components. We propose a bootstrap testing procedure for independence and compare the powers of it with other tests via Monte Carlo simulation.

4) Full-time Lecturer, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea

5) Associate Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea

6) Lecturer, Department of Statistics, Kyungpook National University, Taegu, 702-701, Korea