응용통계연구 제 9권 1호
1996년 3월 pp. 203-214.

교환역설과 합리적 의사결정

채 경 철[1], 안 창 원[2]

요 약

이 글에서는, 최근 논란이 계속되고 있는 교환역설문제의 진상을 규명하고, 교환문제에서는 베이지안 의사결정이 항상 유리함을 보인다. 아울러, 교환문제를 불확실성하에서의 합리적 의사결정문제로 해석한다.

1. 서론

Christensen과 Utts(1992)가 교환역설(exchange paradox)에 대한 베이지안 해결책(Bayesian resolution)을 제시한 이래, 이에 대한 논란이 계속되고 있다(Binder 1993, Ridgway 1993, Chae 1993, Ross 1994). 이 글에서는 교환문제의 진상을 규명하고 베이지안과 고전(classical)통계의 근본적인 차이점을 재확인하여, 교환문제에서는 베이지안 의사결정이 고전통계적 의사결정에 비해서 우월(dominant)함을 보인다. 또한, 교환문제를 불확실성하에서의 의사결정문제로 변환하여 대안(decision alternatives)들간의 우열을 명확히 밝힌다.

교환역설은 다음과 같다. 갑, 을 두 사람에게 돈봉투를 하나씩 주면서, 한 쪽에는 다른 쪽에 든 액수의 두 배가 들어있다고 알려준다. 갑이 봉투를 열어보니 금액 a가 들어 있었다고 하자. 그렇다면 을의 봉투에는 $2a$ 또는 $a/2$가 들어 있을 텐데, 각각의 확률을 $1/2$로 가정하면 을의 봉투에 든 금액의 기대치는 $5a/4$가 된다. 이에 갑은 을에게 봉투교환을 제의하는데, 을 역시 동일한 계산하에 (을이 받은 금액을 b라 하면 을은 갑이 받은 금액의 기대치를 $5b/4$로 계산함) 갑의 제안을 선뜻 받아들인다는 역설이다.

교환역설에서의 모순은 물론 확률을 $1/2$로 가정하기 때문에 발생한다. 두 봉투에 든 금액을 M, $2M$이라 하면, 갑의 봉투에 든 금액 A(또는 을의 봉투에 든 금액 B)는 분명히 $1/2$의 확률로 M 또는 $2M$이다. (그리고 $A+B$는 항상 $3M$이다.) 그러나 $A=a$일 때 B가 $2a$ 또는 $a/2$일 확률이 (a값에 무관하게) $1/2$이라고 할 수는 없다. 이 확률은 M을 확률변수로 취급했을 때 M의 분포로 나타낼 수 있는데, 편의상 M을 양의 값을 가지는 연속확률변수라 하고 이의 확률밀도함수를 $f_M(m)$이라 하면 다음을 얻는다(Chae 1993).

---

1) (305-701) 대전시 유성구 구성동 373-1, 한국과학기술원 산업경영학과 부교수.
2) (305-701) 대전시 유성구 구성동 373-1, 한국과학기술원 산업경영학과 박사과정.

$$
\begin{aligned}
P\,(B=2a \mid A=a) &= \frac{1}{2} f_M(a) \;/\; \left[\, \frac{1}{2} f_M(a) + \frac{1}{4} f_M(a/2) \right] \\
P\,(B=a/2 \mid A=a) &= \frac{1}{4} f_M(a/2) \;/\; \left[\, \frac{1}{2} f_M(a) + \frac{1}{4} f_M(a/2) \right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Christensen과 Utts가 다음과 같이 제시한 베이지안 해결책은 M의 사전(prior) 분포 $f_M(m)$을 사용하는 의사결정이다.

<정책 1> $f_M(a) > \frac{1}{4}\, f_M(\frac{a}{2})$ 이면 $E(B \mid A=a) > a$ 이므로 교환하고

$f_M(a) \le \frac{1}{4}\, f_M(\frac{a}{2})$ 이면 $E(B \mid A=a) \le a$ 이므로 교환하지 않음.

아울러, Christensen과 Utts는 M을 미지의 모수로 간주하는 고전통계파(frequentist라 칭했음)의 입장에 대해서도 다음의 두 가지를 제시하였다.

<정책 2> 기대수입이 동일하므로 교환하든 안하든 아무런 차이가 없음.

그러나 원한다면 다음과 같이 $A=a$를 활용할 수 있다.

<정책 3> $M < T < 2M$일 것으로 짐작되는 기준치(threshold) T를 정했다가, $a < T$이면 교환하고 $a \ge T$이면 교환하지 않음.

<정책 2>의 근거로 제시된 것은 간단히 $E(B)=3M/2=E(A)$인데, 이를 다음과 같이 좀 더 자세히 해석해 볼 수 있다. 고전통계파는 미지의 모수 M을 추정함에 있어서 객관적인 정보만을 사용하는데, 갑의 입장에서 보면 $A=a$라는 표본정보가 유일한 객관적 정보이다. (물론 그 배경에는 경계조건적 정보가 깔려 있다. 즉 A는 반반의 확률로 M 또는 $2M$이며, $A+B=3M$이다.) A를 확인하기 이전의 기대금액 $E(A)$는 $3M/2$이므로 $A=a$를 확인한 후 M에 대한 추정치는 $2a/3$가 된다. 또한 A를 확인하기 이전의 B의 기대치 $E(B)$ 역시 $3M/2$이므로 $A=a$를 확인한 후 $E(B)$의 추정치는 a가 된다. 이는 마치 크기가 1인 표본으로 모집단의 평균을 추정하는 것과 유사하다.

<정책 3>의 근거는 다음과 같다. 운이 좋게 $M < T < 2M$인 T를 선택하는 경우, $A=M$이면 교환하고 $A=2M$이면 교환하지 않게 되어 항상 $2M$을 얻게 된다. 반면에, 운이 나쁘더라도 ($T < M$ 또는 $T > 2M$) A값에 무관하게 (M이든 $2M$이든) 항상 교환하거나 또는 항상 교환하지 않게 되어 최소한 <정책 2>와 마찬가지라는 것이다. 한가지 주목할 점은 고전통계파의 입장으로서 <정책 3>을 추가하게 된 동기가 논문심사위원의 제안이었다는 점이다(Ross 1994). 그러니까 Christensen과 Utts는 원래 <정책 2>만을 고전통계파의 입장으로 간주했으며, 또한 <정

책 3>을 추가하면서 <정책 2>를 제외시키지 않는 점으로 미루어 보아 <정책 3>이 <정책 2>에 비해서 우월하다는 확신이 없었던 것으로 여겨진다.

이와 같이 베이지안 해결책과 고전통계파의 입장을 제시하면서 Christensen과 Utts는 또한 양자의 관계를 지워준다고 할 수 있는 무정보적(non-informative) 사전분포에 대해서도 다음과 같은 견해를 제시하였다.

<견해 1> 무정보적 사전분포는 구간이 $[0,\infty)$인 불완전(improper) 균일(uniform) 분포이며, 이에 따른 <정책 1>은 교환역설의 모순과 일치한다. 즉 $E(B \mid A=a)$는 항상 $5a/4$이다.

2. 논평 및 답변

처음으로 주고받은 논평 및 답변(comment and reply)은 <견해 1>에 관한 것이다(Binder 1993). Binder는 구간이 $[0,\infty)$인 무정보적 사전분포의 문제점(특히 평균이 ∞인 점)을 지적하고, 아울러 정보적 사전분포라고 해서 항상 교환문제의 해결책을 제공하는 것은 아니라며 다음과 같은 반례를 제시하였다.

$$P(M=2^n) = (1-\theta)\,\theta^n, \qquad n=0,1,2,\ldots, \qquad 0<\theta<1 \tag{2}$$

이에 대한 답변은 첫째, 사전분포의 평균이 ∞라고 해서 반드시 사후분포의 평균이 ∞라고 할 수는 없다는 것이고, 둘째로, 식(2)의 θ값에 따라 $E(B \mid A=a)$가 a값에 무관하게 항상 a보다 크거나, 같거나, 또는 작아진다고 해서 그 자체가 문제가 되지는 않는다는 것이다.

그러나 이들의 공방은 대부분 불필요한 동문서답이었음이 Chae(1993)에 의해서 밝혀졌다. Christensen과 Utts는 식(1)에서 $f_M(a/2)$의 계수로 1/4 대신 1/2을 사용하는 오류를 범했는데, 이러한 오류에 의해서 <견해 1>을 제시한 것이다. 그러니까 논란의 소지가 된 $[0,\infty)$ 균일분포는 아예 등장할 필요가 없었으며, 그 역할은 오히려 반례로 제시된 식(2)가 할 수 있게 되었다($\theta=1/2$이면 $E(B \mid A=a)=5a/4$).

또 한가지 주목할 점은 식(2)에서 $\theta=1/4$이면 (Binder는 1/2로 알고 있었음) a값에 무관하게 $E(B \mid A=a)=a$가 되어 고전통계파의 <정책 2>를 도출한다는 점이다. 여기에서 짚고 넘어갈 점은 과연 교환문제에서의 무정보적 사전분포는 무엇인가 하는 점이다. 저자의 추측으로는, Christensen과 Utts는 흔히 무정보적 분포로 사용되는 균일분포를 무심코 교환문제에서의 무정보적 분포라 일컬었으며, Binder 또한 이를 암묵적으로 받아들임에 따라 "무정보적 분포가 균일분포이면 다른 분포는 정보적이어야 될텐데, 식(2)는 정보적이라고 할 수 없다"고 하는 단순논리를 전개한 것이다. 저자의 견해는 식(2)에서 $\theta=1/4$인 경우가 바로 교환문제에서의 무정보적 사전분포라는 것이다(완벽하게 무정보적인 분포를 얻기 어려울 때에 부득이 최소한의 정보가 담긴 균일분포 등을 사용한다는 견해임). Chae(1993)는 $E(B \mid A=a)=a$를 항상 만족

시키는 연속확률분포로 파레토(Pareto)분포를 제시하였는데, 식(2)는 바로 이 파레토분포의 이산판(discrete version)으로 볼 수 있다.

두번째로 주고받은 논평 및 답변은 <정책 1, 2>에 관한 것이다(Ridgway 1993). Ridgway는 흥미로운 사례를 들면서 $A=a$라는 정보는 교환여부를 결정하는 데에 아무런 도움이 되지 않는다고 주장하였고, 이에 대한 답변은 그 주장이 바로 <정책 2>라는 것이다. Ridgway의 주장은 해석하기에 따라서는 베이지안 해결책인 <정책 1>을 전면 부정하는 것이었음에도 불구하고, 이 주장이 선선히 받아들여짐에 따라 일단 베이지안파는 <정책 1>, 고전통계파는 <정책 2>로 합의가 된 듯했다. (Christensen과 Utts는 내심 <정책 1>을 두둔하면서도, 그것이 <정책 2>보다 우월하다는 확증을 보이지 못했음.)

세번째로 주고받은 논평 및 답변은 <정책 3>에 관한 것이다(Ross 1994). Ross는 <정책 3>에서 T를 확률변수로 취급함으로써, <정책 2>보다 우월하다는 사실을 증명하였다. 그리고 T가 상수더라도 <정책 2>보다 최소한 못할 것은 없다고 덧붙였는데, 이에 Christensen과 Utts는 그것이 바로 <정책 3>이라며 선뜻 반겼다. 이와 같이 세번째 논평 및 답변도 두번째와 같이 우호적인 합의 형태로 낙착되었고, 이로써 두번째에서 미결로 남았던 <정책 3>까지도 합의되어 겉으로 보기에는 논란의 소지가 완전히 일소된 것 같아 보인다. (저자가 알기로 이후 더 이상의 논란은 없었음.)

그러나 실상은 Ross의 제안이 받아들여짐에 따라서 새로이 해결해야 될 근본적인 문제가 발생한 것이다. 먼저 Ross의 방법이 베이지안 방법이냐, 고전통계적 방법이냐, 아니면 제 3의 방법이냐 하는 점이다. Ross는 자신의 방법을 베이지안이 아니라고 했으나, 직접적으로 M의 분포를 설정하는 대신 M과 밀접한 관계가 있는 T의 분포를 간접적으로 설정하는 것은 베이지안방법이라고 볼 수밖에 없다는 견해가 있을 수 있다. 또한 M을 미지의 상수로 취급하는 점은 고전통계의 입장과 동일하지만 T의 분포를 설정한다는 점은 고전통계의 입장과 다르므로, 이는 제 3의 방법이라는 견해가 있을 수 있다. 그리고, 일단 Ross의 방법의 정체가 밝혀지고 나면 다음에는 여러 정책들 간의 우열을 따지는 교통정리가 필요할 것이다. 예를 들어, Ross의 방법이 고전통계적 방법이라면 이는 <정책 2>보다 우월하다고 판명되었으므로 마땅히 <정책 2>는 고려대상에서 제외되어야 할 것이다.

3. 정책의 유도과정

<정책 1>의 약식 유도과정은 다음과 같다. (정식 유도과정은 Chae(1993) 참조.) A의 확률밀도함수를 $f_A(a)$라 하면

$$f_A(a)da \;=\; f_M(a)da \cdot P(A=M \mid M=a) \;+\; f_M\!\left(\frac{a}{2}\right)\cdot d\!\left(\frac{a}{2}\right)\cdot P\!\left(A=2M \mid M=\frac{a}{2}\right)$$

인데, $P(A=M \mid M=a)=P(A=2M \mid M=a/2)=1/2$이므로

$$f_A(a) \;=\; \frac{1}{2}f_M(a) \;+\; \frac{1}{4}f_M\!\left(\frac{a}{2}\right) \tag{3}$$

이고, 이로부터 식(1)을 얻는다. 또한 식(1)로부터

$$\begin{aligned} E(B \mid A=a) &= 2a \cdot P(B=2a \mid A=a) + \frac{a}{2} \cdot P\left(B=\frac{a}{2} \mid A=a\right) \\ &= a\left[f_M(a)+\frac{1}{8} f_M\left(\frac{a}{2}\right)\right] / f_A(a) \end{aligned} \tag{4}$$

을 얻는데, 이로부터 <정책 1>이 나온 것이다.

Ross(1994)의 방법은 다음과 같다. 두 봉투에 든 금액 m, $2m$을 미지의 상수로 간주하여 <정책 3>을 따르되, 단 기준치 t를 누적확률분포 $F_T(t)$에서 무작위로 발생시켜서 사용한다 (즉, 난수 u를 발생시켜서 $t=F_T^{-1}(u)$를 기준치로 사용함). 갑의 수입(return)을 R이라 하자. 갑의 봉투에 든 금액이 m 또는 $2m$일 확률이 반반이므로 갑의 기대수입 $E(R)$은 반반의 확률로 $E(R \mid m)$ 또는 $E(R \mid 2m)$이다. 따라서, <정책 3>에 의해서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} E(R \mid m) &= m \cdot P(T < m) + 2m \cdot P(T > m) \\ E(R \mid 2m) &= 2m \cdot P(T < 2m) + m \cdot P(T > 2m) \end{aligned} \tag{5}$$

$$E(R) = \frac{1}{2}(m+2m) + \frac{1}{2}(2m-m) \cdot P(m < T < 2m) \tag{6}$$

(Ross가 제안한 원래의 방법에는 한 쪽이 다른 쪽 금액의 두 배라는 제약이 없었음. 이 경우는 <부록 A>에서 다룸.)

Ross의 공헌은 <정책 3>이 <정책 2>보다 우월한 것을 보였다는 점이다: 식(6)에서 T의 분포로 아무 분포를 사용하더라도 $E(R)$이 최소한 <정책 2>의 기대수입($3m/2$) 이상임을 쉽게 알 수 있다. 이 글에서 Ross의 방법을 <정책 3>에 포함시키는 이유는 다음과 같다. 봉투에 든 금액을 확인하기 전에 t값을 먼저 발생시킨다면, 금액을 확인할 때에는 <정책 3>에서와 같이 상수 기준치 t를 사용하게 된다. 또한 식(6)에 의하면 $P(m < T < 2m)$이 클수록 $E(R)$이 커지기 때문에 t값을 발생시킴에 있어서 <정책 3>에서와 같이 m과 $2m$사이일 것으로 짐작되는 구간(극단적으로는 m, $2m$ 사이의 한개 값)에서 정의된 t를 발생시킬 것이기 때문이다.

이제 세 가지 정책간의 근본적인 관계를 알아보기 위해서 교환문제의 $E(R)$을 구하는 일반적인 식을 다음과 같이 제안한다.

$$\begin{aligned} E(R) &= E(A \mid A > T) \cdot P(A > T) + E(B \mid A < T) \cdot P(A < T) \\ &= E(A) + [\ E(B \mid A < T) - E(A \mid A < T)] \cdot P(A < T) \end{aligned} \tag{7}$$

즉, $A > T$이면 교환하지 않음으로 기대수입이 $E(A \mid A > T)$이고, $A < T$이면 교환하여 기대수

입이 $E(B \mid A < T)$가 된다. 식(7)은 M과 T가 모두 확률변수인 경우까지도 포함하는 일반적인 형태이다. (M이 확률변수이면 A와 B도 확률변수임.) 그러나 세가지 정책이 모두 M과 T를 확률변수로 간주하여 얻은 것은 아니다.

첫째로, 베이지안의 <정책 1>은 M만을 확률변수로 취급하는 경우에 해당되는데, 이 경우 T는 확률변수가 아니라 오히려 의사결정 변수가 된다. 다시 말해서 $E(R)$이 최대가 되게 하는 T를 구하면 <정책 1>과 일치하는 결과를 얻게 되는데, 구체적으로 식(7)에 식(3, 4)를 대입해서 정리하여 식(8)을 얻고

$$\begin{aligned} E(R) &= E(A) + \int_0^T [\ E(B \mid A=a) - a]\ f_A(a)da \\ &= E(A) + \frac{1}{2}\int_{\frac{T}{2}}^{T} m\, f_M(m)dm \end{aligned} \tag{8}$$

이를 T에 대해서 미분하여 $E(R)$이 최대가 되게 하는 T값이 만족해야 할 조건을 구하면 <정책 1>과 일치하는 $f_M(T) = \frac{1}{4} f_M\left(\frac{T}{2}\right)$를 얻는다.

둘째로, 고전통계파는 M을 미지의 모수로 간주한다. 또한 T를 확률변수로 취급하지 않을 뿐더러 아예 T와는 무관하게 의사결정을 하는데, <정책 2>의 근거가 되는 $E(R) = E(A)$는 식(7)에 $E(B \mid A < T) = E(B) = E(A) = E(A \mid A < T)$를 대입하여 얻을 수 있다. (또는, 고전통계파의 관점인 $E(B \mid A = a) = a$를 식(8)에 대입하여 $E(R) = E(A)$를 얻을 수 있음.)

셋째로, <정책 3>의 근거인 식(5)는 일단 M과 T를 모두 확률변수로 간주하되, M이 m으로 실현(realize)되었다는 조건하에 기대수입을 구한 것이다. 즉, 식(7)에 $A = m$과 $A = 2m$을 조건으로 걸면 식(5)가 된다. (따라서, 식(6)의 좌변은 엄격히 $E(R \mid M = m)$임.)

이 글의 두 가지 주장과 그 근거는 다음과 같다.

<주장 1> <정책 1>은 <정책 2>보다 우월하다.

이는 식(8)에서 관계 $E(R) \geq E(A)$로부터 쉽게 알 수 있는데, 더우기 <정책 1>은 $[\ E(R) - E(A)]$ 를 최대가 되게 한다. (<정책 2>에 따른 기대수입은 $E(A)$임.) 이로써 이 글에서는 Christensen과 Utts가 밝히지 못했던 <정책 1, 2>간의 우열관계를 명확히 했는데, 한 걸음 더 나아가서 다음의 주장을 한다.

<주장 2> <정책 3>은 <정책 1>과 동치(equivalent)이다.

<정책 3>이 <정책 2>보다 우월함을 보이기 위해서 Ross가 제시한 식(6)은 식(7)에서 M이 m으로 실현되었다는 조건하에 얻을 수 있음을 앞에서 보였다. 그러나 주지할 점은 m의 값은 여전히 아무도 모른다는 점이다. 실현되었으되 실현된 값을 모르면 사실상 실현되지 않은 것과

동일한 상황이라고 할 수 있다. 예를 들어, 주사위를 이미 굴렸으되 그 결과를 모르면 여전히 주사위를 굴리기 이전에 사용했었을 확률분포를 사용하여 결과를 논할 수밖에 없는 것이다. 앞에서 식(6)의 좌변은 사실상 $E(R \mid M=m)$이라고 했다. 이에 M의 분포 $f_M(m)$을 사용하여 조건 $M=m$을 제거하면 다음을 얻는다(<부록 B>참조).

$$E(R) \;=\; E(A) \;+\; \frac{1}{2}E\left[\;\int_{\frac{T}{2}}^{T} f_M(m)dm\right] \tag{9}$$

이제는 T를 더 이상 확률변수로 취급할 필요가 없어진다. 그리고, T가 확률변수가 아니면 식(9)는 식(8)과 동일하게 된다. T를 확률변수로 취급한 이유는 단지 식(6)에서 $E(R \mid M=m) \geq 3m/2$임을 보이기 위한 기발한 방편이었을 뿐이다. 그러나 이러한 방편으로는 <정책 3>이 <정책 2>보다 우월하다고 증명만 할 수 있을 뿐이고, 여전히 m이 미지수이므로 식(6) 자체로는 기대수입 $E(R)$을 계산한다거나 또는 $E(R)$을 최대화한다거나 할 수는 없었다. 다시 말하자면, <정책 3>에서는 고전통계적인 입장에 억지로 맞추기 위해서 m을 미지 상수로 취급하기는 했지만, M의 분포 대신 M과 밀접한 관계가 있는 T의 분포를 간접적으로 설정하였기에, 이는 사실상 식(8)로 이르는 간접적인 길이라는 것이다. 한마디로, <정책 3>은 <정책 1>과 한 통속이라는 주장인데, 구태여 차이점을 지적한다면 기대수입을 최대화하는 과정을 미리 정형화해 놓은 것이 <정책 1>이라는 점이다.

4. 합리적 의사결정

독자들이 O.R.(operations research) 또는 경영과학(management science) 과목을 통해서 접해 보았을 기본적인 의사결정문제로 다음의 두 가지가 있다. 각 상황이 발생할 확률분포를 알고 있는 경우가 위험(risk)하의 의사결정이고, 확률분포를 모르는 경우가 불확실성(uncertainty)하의 의사결정이다. 이 절에서는 교환문제를 불확실성하의 의사결정문제로 변환하여 분석하는데, 먼저 갑의 일방적인 의사결정문제를 다루고 나중에 갑, 을의 게임상황을 다룬다.

일방적인 의사결정문제에서 갑의 성과표(payoff table)는 다음과 같다.

대안 \ 실제상황	$t < m$	$m < t < 2m$	$2m < t$
1. $a < t$이면 교환 ($a \geq t$이면 교환 않음)	$\frac{3}{2}m$	$2m$	$\frac{3}{2}m$
2. $a > t$이면 교환 ($a \leq t$이면 교환 않음)	$\frac{3}{2}m$	m	$\frac{3}{2}m$
3. 중립 (항상 교환 또는 항상 교환 않음)	$\frac{3}{2}m$	$\frac{3}{2}m$	$\frac{3}{2}m$

$A=a$일 때 갑이 택할 수 있는 대안은 일차적으로 교환하느냐 마느냐 두 가지인데, 이를 다시 기준치 t를 사용하여 세분화한 것이 <대안 1, 2>이다. 또한 a값에 무관하게 항상 교환할 수도 있고 안할 수도 있는데, 일방적인 의사결정문제에서는 그 차이가 없으므로 <대안 3>으로 묶었다. 반면에 실제 상황은 $t<m$, $m<t<2m$, $2m<t$ 세가지중 하나임이 분명하다.

먼저 <대안 1>은 <정책 3>에 따른 것으로써, 이와 같은 대안을 합리적(rational)이라 부른다. 그 이유는 <대안 2>와 비교함으로써 자명해진다. 그러므로 기준치 t를 잘 잡는 것도 중요하지만, 그 기준치를 합리적으로 사용하는 것도 중요하다. 상식 수준의 당연한 사실을 거론하는데 대해 독자가 의아해할 수 있겠는데, 그 이유는 교환문제의 진상이 바로 상식적 수준에서 규명될 수 있기 때문이다. 합리적인 기준에 따른 <대안 1>은 비합리적인 기준에 따른 <대안 2>뿐만 아니라, 기준 자체가 없는 <대안 3>보다 우월함을 성과표로부터 쉽게 알 수 있다. 즉, 모든 t에 대해서 항상 유리하다.

교환문제에서는 성과표에 나타나는 우열관계(dominance relation)가 명확하여 쉽게 <대안 1>을 선택하였다. 그러나 기준치 t를 결정하는 문제가 아직 남아 있다. 기대수입을 최대화하자면 m과 $2m$사이에 들 가능성이 큰 기준치를 잡아야 하겠으나, m의 값을 모르므로 갑의 입장에서 가장 확신이 있는 값을 사용할 수밖에 없다. 그리고 확신 있는 t값을 설정할 수 있기만 하면 Ross의 방법에서와 같이 t를 확률분포로부터 발생시켜서 사용할 필요는 없다. 그것은 다만 Ross가 <대안 1>이 <대안 3>보다 우월함을 보이기 위한 방편이었을 뿐이다.

이제 베이지안의 입장을 고려한다. 베이지안은 각 상황이 발생할 확률분포를 주관적으로 설정한다. 즉, 베이지안은 불확실성하의 의사결정문제를 위험하의 의가결정문제로 변환하여 해결한다. 이 경우 실제상황과 대안은 모두 연속적이다. 즉, M의 가능한 실현값마다 하나의 실제상황이 대응되며, 가능한 t값마다 하나의 대안이 대응된다. 그러니까 결국 주관적으로 설정한 M의 사전분포에 대해 최적 t를 구하는 문제가 되어 버리는데, 이 때 최적대안이 바로 <정책 1>이다. 3절의 <주장 2>에 의하면 <정책 1>은 <대안 1>과 동치이다. 즉, <정책 1>과 <대안 1> 모두 합리적인 기준에 따른 의사결정이다. 차이점이 있다면 최적 t를 결정하는 과정을 미리 정형화해 놓은 것이 <정책 1>이라는 점인데, <대안 1>에서도 나름대로 최적 t를 결정하는 과정을 거치다 보면 결국은 <정책 1>에 이르게 된다는 것이 <주장 2>이다.

지금까지 교환문제를 갑의 일방적인 의사결정문제로 다루었다. 이제 원래의 교환문제에서와 같이 갑, 을 모두 봉투교환 여부를 결정하는 2-인 게임문제를 다룬다. 물론 두 사람 모두 교환을 희망할 때에 한해서 실제로 교환이 이루어지며, 두 사람의 수입의 합은 항상 $3M$이다.

먼저 갑, 을 모두 합리적 기준에 의한 <대안 1>을 택하는 경우를 고려한다. 만일 갑과 을이 동일한 기준치 t를 사용한다면 교환이 이루어지는 실제상황은 $2M<t$ 한 가지 뿐이며, 이 경우 기대수입은 두 사람 모두 $E(3M/2)$이다. (기준치가 다르더라도 둘 다 $2M$보다 크면 역시 마찬가지 결과임.) 두 사람의 기준치가 서로 다른 경우에 두 사람의 실질 기대수입(각자 예상하는 기대수입이 아님)이 달라질 수 있는데 (합은 항상 $E(3M)$), 누구의 기대수입이 $E(3M/2)$ 이상인지 정확히는 알 수 없고 다만 상대방보다 기준치(또는 사전분포)를 잘 설정한 사람이 유리하

다고 할 수밖에 없다.

게임 상황에서도 무기준에 의한 <대안 3>을 택하는 경우가 발생한다. 그러나, 이는 일방적인 의사결정 상황과는 달리 "항상 교환하지 않음"을 의미한다. 그 이유는 "항상 교환함"을 택할 경우 상대방이 합리적 기준에 따른 <대안 1>을 택하면 불리하기 때문이다. <대안 3>을 택하는 이유는 특별히 사용할 만한 기준(또는 사전분포)이 없거나, 또는 기준이 있더라도 상대방의 기준이 더 우수할 것으로 여겨지기 때문이다. 가위바위보에서 흔히 상대방이 무엇을 낼 것인가를 추측하여 심리전을 펴는데, 심리전에 불리하다고 느끼는 사람은 오히려 무작위로 냄으로써 승률을 반반으로나마 유지할 수 있다는 점과 유사하다.

5. 맺는말

이 글에서는 교환역설로 야기된 논란의 핵심을 짚어감으로써 교환문제의 진상을 규명하였다. 이로써, 교환문제에서는 베이지안 의사결정이 우월함을 보였으며, 이를 다시 불확실성하에서의 합리적 의사결정의 관점으로 재확인하였다. 그리고 이러한 과정에서, 교환문제는 접근방향에 따라서 상당히 단순하기도 하고 반대로 복잡해지기도 함을 보았다. 결론적으로, 교환역설문제는 의사결정에 관련된 여러 기본적인 방법들과 개념들 간의 근본적인 관계와 차이를 짚고 넘어가게 된 계기를 제공하였다.

참고문헌

[1] Binder, D. A. (1993). Comment by Binder and Reply, *The American Statistician*, Vol. 47, No. 2, 160.

[2] Chae, K. C. (1993). A Resolution of the Exchange Paradox, Working Paper, Dept. of Industrial Management, KAIST. (To Appear in *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 26, No. 4.)

[3] Christensen, R. and Utts, J. (1992). Bayesian Resolution of the Exchange Paradox, *The American Statistician*, Vol. 46, No. 4, 274-276.

[4] Ridgway, T. (1993). Comment by Ridgway and Reply, *The American Statistician*, Vol. 47, No. 4, 311.

[5] Ross, S. M. (1994). Comment by Ross and Reply, *The American Statistician*, Vol. 48, No. 3, 267-268.

부 록

A. 교환문제의 일반화

한 쪽이 다른 쪽 금액의 두 배라고 하는 제약없이 교환문제를 다룬다. 먼저 두 봉투에 든 금액 a, b를 미지의 상수로 간주할 경우, 식(5, 6)은 다음과 같이 바뀌는데,

$$E(R \mid A=a,\ B=b) = a \cdot P(T<a) + b \cdot P(T>a)$$
$$E(R \mid A=a,\ B=b) = b \cdot P(T<b) + a \cdot P(T>b)$$

$$E(R \mid a,\ b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \cdot [\ P(T<a) - P(T<b)] \qquad (A.1)$$

식 (A.1)에서 $(a-b)$와 $[\ P(T<a) - P(T<b)]$ 의 부호가 동일하므로 $E(R \mid a,\ b) \geq \frac{1}{2}(a+b)$이다. 즉, <정책 3>은 <정책 2>보다 우월하다.

베이지안은 두 변수의 결합(joint)사전분포를 설정하는데, 편의상 A, B 대신에 $M=\min(A, B)$와 $N=\max(A, B)/M$으로 정의된 M과 N의 결합분포를 설정한다. ($N=2$이면 원래의 문제가 되어 비교가 용이함.) 결합밀도함수를 $f_{M,N}(m, n)$이라 하면 식(8)은 다음과 같이 일반화됨을 보일 수 있다.

$$E(R) = E(A) + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(n-1)\int_{\frac{t}{n}}^{t} m\, f_{M,N}(m, n)\ dmdn \qquad (A.2)$$

식(A.2)에서, $E(R) \geq E(A)$임을 쉽게 알 수 있으며, 또한 식(A.2)를 t로 미분하여 $E(R)$을 최대화하는 조건식을 구하면 <정책 1>의 일반적인 형태로서 다음을 얻는다 ($N=2$를 조건으로 걸면 <정책 1>이 됨).

$$f_{M,N}\ (t, n) = f_{M,N}\ (t/n, n)/n^2 \qquad (A.3)$$

B. 식(9)의 유도

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_0^{\infty} E(R \mid M=m)\ f_M(m)\ dm \\ &= \int_0^{\infty} \left[\ \frac{3}{2}m + \frac{1}{2}m\ P(m < T < 2m)\right]\ f_M(m)\ dm \qquad (A.4) \\ &= E(A) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} P\left(\frac{T}{2} < m < T\right)\ m\, f_M(m)\ dm \end{aligned}$$

여기에서 지수(indicator) 함수 $I(m)$을 다음과 같이 정의하면

$$I(m)=\begin{cases}1 & \text{if } T/2 < m < T \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$E[\ I(m)] = P(T/2 < m < T)$이 되는데, 이를 (A.4)에 대입하고, 적분연산과 기대치 연산의 순서를 바꾸면 식(9)를 얻는다.

감사의 글

이 글의 주장을 명확히 설명할 수 있도록 도와주신' 두 분 심사위원께 감사드립니다.

Exchange Paradox and Rational Decision

K. C. Chae[3], C. W. Ahn[4]

Abstract

In this tutorial note, we resolve debates generated by the Exchange Paradox. In particular, we show that Bayesian solution is superior to frequentist's. Then, in terms of decision analysis, we show that any rational decision is superior to no-action policy.

3) Associate Professor, Dept. of Industrial Management, KAIST, Taejon-shi, 305-701 Korea.
4) Ph.D Candidate, Dept. of Industrial Management, KAIST, Taejon-shi, 305-701 Korea.