응용통계연구 제 9권 1호
1996년 3월 pp. 139-152.

확률화 블럭 계획법에서 최적 가중치를 이용한 우산형 대립가설의 비모수검정법[1)]

김 동 희[2)], 김 영 철[3)]

요 약

확률화 블럭 계획법에서 최적 가중치를 이용한 우산형 대립가설에 대한 비모수검정법을 제안하고자 한다. Mack과 Wolfe(1981) 형태의 통계량에 대한 제안된 통계량의 점근상대효율를 최대로 하는 가중치를 구하고, 이러한 가중치를 가지는 제안된 통계량과 Mack과 Wolfe 형태의 통계량 및 선형 순위 통계량의 점근상대 효율을 고려하였다. 소표본에서 모의 실험을 통하여 블럭의 크기가 다른 경우 제안된 통계량의 검정력이 우수함을 보였다.

제 1 장 서 론

생물학, 농학, 경제학 등 실험을 수반하는 여러분야에서 우산형 대립가설의 검정에 대한 예를 찾아 볼 수 있다. 예를 들어, 약의 복용량을 증가시키면 병의 치료효과가 좋아지지만 어떤 시점에서 병의 치료효과가 감소하는 경향이 있다. n개의 관측치들을 약의 복용량에 따라 t개의 집단으로 나누었을 때, 우리는 약의 복용량에 따른 치료효과가 t개의 집단들에 대해 같은 지 아니면 일정한 수준까지 치료효과가 증가하다가 감소하는지를 알아 보는데 관심을 둘 수 있다.

많은 사람들에 의해 여러형태의 위치모수 우산형 대립가설에 대한 모수적, 비모수적 검정법들이 다루어져 왔다. Mack과 Wolfe (1981)는 Jonckheere (1954) 통계량과 reverse Jonckheere 통계량을 결합시킨 우산형 대립가설에 대한 분포무관 검정법을 제시하였고, Simpson과 Margolin (1986)은 약물복용-반응 관계에 대한 반복적 비모수검정법을 제시하였다. 또한, Hettmansperger와 Norton (1987)은 선형 순위 통계량을 사용한 비모수적인 방법을 제시하고 Mack과 Wolfe (1981)의 통계량과 비교하였다. Shi (1988a, 1988b)는 정규분포에서 우도비 검정법을 유도하고 최대최소 효율 선형 순위 검정법으로 불리는 최적 순위 검정법을 제시하였다. 최근에, Chen과 Wolfe (1990)는 정점이 알려진 경우에 우산형 대립가설에 대한 비모수검정법을 구하기 위해 Chacko (1963)의 통계량을 일반화하였고, 정점을 모르는 경우에 Mack과 Wolfe (1981) 통계량의 확장으로서 분포무관 검정법을 제시하였다.

---

1) 이 논문은 1994년도 부산대학교 기성회 학술연구조성비 지원에 의하여 부산대학교 기초과학연구소에서 연구수행되었음. (RIBS-PNU-94-101)

2) 609-735 부산 광역시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과 교수.

3) 609-735 부산 광역시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과 시간강사.

본 논문에서는 교호작용이 없는 확률화 블럭 모형에서 처리효과의 우산형 대립가설에 대한 비모수검정법을 다루고자 하는데, 모형은

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}, \quad i = 1, \cdots, b;\ j = 1, \cdots, t;\ k = 1, \cdots, n_{ij}$$

로 주어지며 μ는 전체 평균, α_i는 블럭효과로서 장애모수로 취급하며, β_j는 처리효과이고, e_{ijk}는 서로 독립이고 동일한 분포를 갖는 확률변수이며 이의 연속분포함수 F는 $\int f^2(x)dx < \infty$인 밀도함수 f를 갖는다.

우리는 다음과 같은 가설을 검정하고자 한다.

$$H_0: \beta_1 = \cdots = \beta_t$$

$$\text{vs}\quad H_1: \beta_1 \le \cdots \le \beta_{h-1} \le \beta_h \ge \beta_{h+1} \ge \cdots \ge \beta_t \text{ (적어도 하나의 부등식을 만족).}$$

2장에서는 본 논문에서 다루고자 하는 검정통계량을 제안하며 제안된 검정통계량의 점근적 분포와 성질 및 점근상대효율을 알아보고 점근상대효율을 극대화하는 최적 가중치를 구하며, 3장에서는 소표본에서의 모의실험을 수행하여 결과를 분석해 본다.

제 2 장 제안된 검정통계량과 점근적 성질

2.1 검정통계량과 점근분포

교호작용이 없는 확률화 블럭 계획법에서 처리효과의 우산형 대립가설을 검정하는 다음과 같은 통계량을 제안하고자 한다.

$$\begin{aligned} A_w &= \sum_{i=1}^{b} w_i A_{hi} \\ &= \sum_{i=1}^{b} w_i \left\{ \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} U_{ilm} + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} U_{iml} \right\} \end{aligned}$$

여기서, U_{ilm}은 (i, l)칸과 (i, m)칸에 있는 관측치들에 관한 Mann-Whitney 통계량이고 w_i는 음이 아닌 가중상수이다. A_{hi}는 정점을 알때 i번째 블럭에서의 Mann-Whitney 통계량이고 A_{hi}들이 서로 독립이므로 제안된 통계량 A_w 는 통계량 A_{hi}들의 가중합이고 분포무관 특성을 가진다.

제안된 검정통계량의 점근 성질들을 연구하기 위하여, 귀무가설하에서의 평균과 분산 그리고 제안된 통계량의 점근 분포를 고려한다. A_w 의 극한 $(b \to \infty)$분포를 구하기 위해 다음과 같은 가정을 생각하기로 한다.

A1) 음이 아닌 가중상수들 $w_1, \cdots, w_b$ $(b \to \infty)$는 유계이다.

A2) 모든 i에 대해 $N_i \le M$을 만족하는 $M < \infty$이 존재한다. 여기서 $N_i = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}$.

A3) $\lim_{b\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{b} w_i^3\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{b} w_i^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$

A4) $b \to \infty$ 에 대해, 통계량 A_w 는 유한개의 다른 점수(score) 구조를 가진다.

i번째 블럭과 $i+pd\,(p = 1,2,\cdots)$번째 블럭이 같은 점수 구조(같은 블럭 디자인과 같은 가중치)를 가질 필요충분조건은 $n_{ij} = n_{i+pd,\,j}$ 와 $w_i = w_{i+pd}$, $i = 1,\cdots,d$, $j = 1,\cdots,t$ 이며, d개의 다른 점수 구조를 가진다고 한다.

다음 정리는 귀무가설 H_0에서 제안된 검정통계량의 평균과 분산, 점근분포에 관한 것이다.

정리 2.1. 가정 A1, A2, A3와 A4를 만족한다고 하면, 귀무가설 H_0에서, $(A_w - E_0(A_w)) / \sqrt{Var_0(A_w)}$ 는 극한 표준정규분포를 따르며, 평균과 분산은 다음과 같이 표현되며

$$E_0(A_w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{b} w_i \left\{ \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} n_{il}\, n_{im} + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il}\, n_{im} \right\},$$

$$\begin{aligned} Var_0(A_w) = &\sum_{i=1}^{b} w_i^2 \{ 2(N_{i1}^{\ 3} + N_{i2}^{\ 3}) + 3(N_{i1}^{\ 2} + N_{i2}^{\ 2}) \\ &- \sum_{j=1}^{t} n_{ij}^{\ 2} (2\, n_{ij} + 3) - n_{ih}^{\ 2} (2\, n_{ih} + 3) \\ &+ 12\, n_{ih} N_{i1} N_{i2} - 12\, n_{ih}^{\ 2} N_i \} / 72, \end{aligned}$$

위 식에서 $N_{i1} = \sum_{j=1}^{h} n_{ij}$, $N_{i2} = \sum_{j=h}^{t} n_{ij}$, $N_i = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}$ 이다.

증명. Mack과 Wolfe(1981)의 결과로 부터 쉽게 구해진다.

2.2 점근상대효율

검정통계량 A_w에 대한 효율을 구하기 위해서 먼저 Mack과 Wolfe(1981) 형태의 통계량 A와 선형 순위 통계량 U를 소개하고자 한다. Mack과 Wolfe(1981) 형태의 통계량 A는

$$A = \sum_{i=1}^{b} \left\{ \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} U_{ilm} + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} U_{iml} \right\}.$$

여기서 U_{ilm} 은 i번째 블럭에서 l번째와 m번째 표본들에서의 Mann-Whitney 통계량이다. h가 알려진 검정법의 점근 특성들은 Archambault, Mack 과 Wolfe (1977)와 Kim과 Kim (1992) 의 결과에서 알 수 있다. 다음으로 선형 순위 통계량 U는

$$U = \sum_{i=1}^{b} \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} \frac{(a_{im} - a_{il})}{n_{il}\, n_{im}}\, U_{ilm}\,,$$

여기서 $a_{ij} = \lambda_{ij}(c_j - \overline{c}_{iw})$ 이고 c_j들은 우산형 상수들이다. 또한 U의 점근 특성들은 Hettmansperger와 Norton(1987)에 잘 나타나 있다.

검정통계량 A와 U에 대한 A_w의 점근상대효율을 고려하기 위해서 형태 전이 대립가설 (patterned translation alternatives)에서의 검정통계량 A_w, A와 U의 점근 분포를 고려한다. 고려할 형태 전이 대립가설은 다음과 같다.

$$H_{1b} : \beta_j = \beta c_j / \sqrt{b}, \quad j = 1, \ldots, t, \ \beta > 0,$$

여기서 c_j들은 우산형 상수들이다.

$b \to \infty$일 때 제안된 검정통계량 A_w와 Mack-Wolfe 형태의 검정통계량 A의 ARE를 계산하는 것이 쉽지 않기 때문에 Skillings 와 Wolfe (1978)의 가정들을 고려한다. 그러면, 블럭구조와 분포형태가 d개의 블럭그룹으로 반복되고 반복되는 점수 구조에서 정점은 변하지 않는다고 가정한다. p를 d개의 블럭그룹들의 갯수라 하면, $p \to \infty$일 때 점근성질을 고려하고 다음의 정리를 얻는다.

정리 2.2. 가정 A1, A2, A3와 A4를 만족한다고 하자. 그러면, 형태 전이 대립가설 H_{1b}에서 $(A_w - E(A_w)) / \sqrt{Var(A_w)}$는 극한 표준정규분포를 따른다. 여기서

$$\begin{aligned} E(A_w) = \sum_{i=1}^{b} w_i \Bigg\{ & \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} n_{il}\, n_{im} \int [\ 1 - F(x - (c_m - c_l)\beta / \sqrt{b})]\ f(x)dx \\ & + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il}\, n_{im} \int [\ 1 - F(x - (c_l - c_m)\beta / \sqrt{b})]\ f(x)dx \Bigg\} \end{aligned}$$

이고 $Var(A_w)$는 $Var_0(A_w)$와 점근적으로 같다.

형태 전이 대립가설에서 검정통계량 A의 평균과 분산은 Mack과 Wolfe (1981)로 부터 주어진다.

$$E(A) = \sum_{i=1}^{b} \Big[\sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} n_{il} n_{im} \int [\ 1-F(x-(c_m-c_l)\beta/\sqrt{b})]\ f(x)dx + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il} n_{im} \int [\ 1-F(x-(c_l-c_m)\beta/\sqrt{b})]\ f(x)dx \Big]$$

이고 $Var(A)$는 $Var_0(A)$와 점근적으로 같다. 따라서, A_w와 A의 efficacy는 다음과 같다.

$$\mathrm{eff}^2(A_w) = \lim_{p\to\infty} \frac{\left[\int f^2(x)\,dx\right]^2}{pd\,Var(A_w)} \times \left\{ (pd)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{pd} w_i \Big[\sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} n_{il}\, n_{im}(c_m-c_l) + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il}\, n_{im}(c_l-c_m) \Big] \right\}^2,$$

$$\mathrm{eff}^2(A) = \lim_{p\to\infty} \frac{\left[\int f^2(x)\,dx\right]^2}{pd\,Var(A_w)} \times \left\{ (pd)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{pd} \Big[\sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} n_{il}\, n_{im}(c_m-c_l) + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il}\, n_{im}(c_l-c_m) \Big] \right\}^2.$$

A에 대한 A_w의 ARE는 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathrm{ARE}(A_w, A) = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{d} B_i\right\}\left\{\sum_{i=1}^{d} w_i K_i\right\}^2}{\left\{\sum_{i=1}^{d} w_i^2 B_i\right\}\left\{\sum_{i=1}^{d} K_i\right\}^2}.$$

여기서, $K_i = \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{l=m+1}^{h} n_{il}\, n_{im}(c_m-c_l) + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} n_{il}\, n_{im}(c_l-c_m)$ 이고

$$B_i = \Big\{ 2(N_{i1}^3 + N_{i2}^3) + 3(N_{i1}^2 + N_{i2}^2) - \sum_{j=1}^{t} n_{ij}^2\,(2n_{ij}+3) - n_{ih}^2\,(2n_{ih}+3) + 12\,n_{ih} N_{i1} N_{i2} - 12\ n_{ih}^2\, N_i \Big\} / 72$$

이다.

2.3 최적 가중치

$ARE(A_w, A)$를 최대로 하는 가중치 w_i를 찾기 위하여, 다음의 보조정리를 필요로 한다.

보조정리. (Skillings 와 Wolfe (1978)의 보조정리 1)
$Y = \left(\sum_{i=1}^{d} w_i K_i\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{d} w_i^2 B_i\right)$라 하자. 여기서, 모든 i에 대해 $B_i > 0$ 이다. 그러면 Y는 다음과 같은 방정식의 해 w_i에 대해 최대가 된다.

$$w_j = \frac{K_j\left(\sum_{i=1}^{d} w_i^2 B_i\right)}{B_j\left(\sum_{i=1}^{d} w_i K_i\right)}, \quad j = 1, \cdots, d. \tag{2.1}$$

형태 전이 대립가설에서 w_i에 대해 $ARE(A_w, A)$를 최대화하는 것은 Y를 최대화하는 것과 같고, 가중치들이 (2.1)의 방정식들을 만족하고 $n_{ij} = N_i/t$ 인 경우에 이러한 가중치들이 요구된 가정들을 만족함을 보이기 위해, 다음과 같은 정리를 고려한다.

정리 2.3. (Skillings와 Wolfe (1978)) 모든 i, j에 대해 $n_{ij} = N_i / t \geq 1$ 이면, $ARE(A_w, A)$는 $w_i = K_i / B_i$, $i = 1, \cdots, d$ 에 대해 최대가 된다.

이러한 가중치 w_i를 이용하여 얻을 수 있는 효율을 알아 보기 위해, 검정통계량 A_w^* (가중치 $w_i = K_i/B_i$ 를 가지는 검정통계량 A_w)를 고려한다. 그러면 A에 대한 A_w^*의 점근상대효율은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{ARE}\,(A_w^*, A) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{d} B_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} K_i^2 / B_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d} K_i\right)^2}$$

여기서 모든 i, j에 대해 $n_{ij} = n$ 인 경우, 블럭의 크기가 $N_i = tn$ 으로 모두 같으므로 B_i와 K_i는 일정한 값을 갖게되어 $ARE(A_w^*, A) = 1$ 이 된다.

또한 Hettmansperger와 Norton (1987)의 검정통계량 U에 대한 A_w^*의 효율을 알아 보고자 한다. 그러면 다음과 같은 따름정리를 얻는다.

따름정리 2.4. 귀무가설 H_0에서, $(U-E_0(U))/\sqrt{Var_0(U)}$는 극한 표준정규분포를 따른다. 여기서, $E_0(U) = b\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}(c_m-c_l)/2$ 이고

$$Var_0(U) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{b}\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}\left[\frac{(c_m-c_l)^2}{n_{il}n_{im}} + t\left(\frac{c_m}{n_{im}}-\frac{c_l}{n_{il}}\right)(c_m-c_l) - \left(\sum_{l=1}^{t}c_l\right)\left(\frac{1}{n_{im}}-\frac{1}{n_{il}}\right)(c_m-c_l)\right]$$

이다.

따름정리 2.5. 형태 전이 대립가설 H_{1b}에서, $(U-E(U))/\sqrt{Var(U)}$는 극한 표준정규분포를 따른다. 여기서,

$$E(U) = \sum_{i=1}^{b}\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}(c_m-c_l)\int\left[\,1-F(x-(c_m-c_l)\beta/\sqrt{b})\right]f(x)dx$$ 이고

$Var(U)$는 $Var_0(U)$와 점근적으로 같다.

그러면 U의 Pitman efficacy 는 다음과 같다.

$$\mathrm{eff}^2(U) = \lim_{p\to\infty}\frac{\left[\sum_{i=1}^{pd}\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}(c_m-c_l)^2\int f^2(x)dx/\sqrt{pd}\right]^2}{pd\,Var(U)}$$

또한, 검정통계량 U에 대한 검정통계량 A_w^*의 점근상대효율은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{ARE}(A_w^*, U) &= \frac{\mathrm{eff}^2(A_w^*)}{\mathrm{eff}^2(U)} \\ &= \frac{\lim_{p\to\infty}Var(U)}{\lim_{p\to\infty}Var(A_w)}\frac{\left(\sum_{i=1}^{d}w_iK_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}(c_m-c_l)^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{d}w_iK_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{d}T_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{m=l+1}^{t}(c_m-c_l)^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{d}w_i^2B_i\right)}\end{aligned}$$

여기서 $w_i = K_i / B_i$ 이고

$$T_i = \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} \left[\frac{(c_m - c_l)^2}{n_{il} n_{im}} + t\left(\frac{c_m}{n_{im}} - \frac{c_l}{n_{il}} \right)(c_m - c_l) - \left(\sum_{l=1}^{t} c_l \right)\left(\frac{1}{n_{im}} - \frac{1}{n_{il}} \right)(c_m - c_l) \right] \Big/ 12$$

이다. 또한 $n_{ij} = N_i / t \geq 1$ 이면 $ARE(A_w^*, U)$는 다음과 같이 된다.

$$\text{ARE}(A_w^*, U) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{t^2}{12} \left(\frac{1}{N_i^2} + \frac{1}{N_i} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^{d} w_i K_i \right)}{d^2 \sum_{l=1}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} (c_m - c_l)^2}$$

위의 식에서 c_j를 모르기 때문에, Hettmansperger 와 Norton (1987)에서 사용된

$$c_j = \begin{cases} j & , j = 1, \cdots, h \\ 2t - j & , j = h+1, \cdots, t \end{cases} \tag{2.2}$$

를 이용하여 w_i, $ARE(A_w^*, A)$와 $ARE(A_w^*, U)$를 계산할 수 있다.

주의. Skillings 과 Wolfe (1978)는 최적 가중치 $b_i = (N_i / t)^2 / B_i$ 를 구했고 본 논문에서는 (2.2)의 c_j들을 사용하여 $w_i = C\, b_i$를 구했다. 여기서

$$C = \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{m=l+1}^{h} (c_m - c_l) + \sum_{l=h}^{t-1} \sum_{m=l+1}^{t} (c_l - c_m)$$

이다.

$d = 3, 4, 5,$ $t = 5$ 이고 $h = 3$ 일때, 다음의 몇가지 경우에 대해 표 1에서 $\text{ARE}(A_w^*, A)$와 $ARE(A_w^*, U)$를 구하였다. 표 1에서 ARE 들이 d의 값과 무관하지 않지만 d값 보다는 블럭 크기의 차이 정도에 따라 더 많은 영향을 받음을 알 수 있다.

표 1. d=3,4,5인 경우의 ARE(A_w^*, A) 와 ARE(A_w^*, U)

d	블럭의 크기	ARE(A_w^*, A)	ARE(A_w^*, U)
3	$N_1=25$ $N_2=25$ $N_3=25$	1.0000	0.9433
	$N_1=10$ $N_2=20$ $N_3=30$	1.0884	1.1778
4	$N_1=20$ $N_2=20$ $N_3=30$ $N_4=40$	1.0739	1.0304
	$N_1=10$ $N_2=20$ $N_3=30$ $N_4=40$	1.0986	1.2626
5	$N_1=10$ $N_2=15$ $N_3=20$ $N_4=25$ $N_5=30$	1.0754	1.1108
	$N_1=10$ $N_2=20$ $N_3=30$ $N_4=40$ $N_5=50$	1.1044	1.3336

제 3 장 소표본 모의 실험 및 결론

정점을 알 때 우산형 대립가설에 대해 제안된 검정통계량과 다른 비모수 검정통계량들과의 실험검정력을 비교하기 위하여 실험 계획을 고려하고 검정통계량 U와 A에 대한 A_w^*의 효율을 비교한다.

소표본 몬테 카를로 연구에서 검정통계량의 실험검정력과 실험유의수준들이 여러가지 분포들, 즉 균일, 정규, 이중지수, 코시 그리고 오염정규분포들에서 비교되었다. 여기서 ε-오염정규분포의 누적 분포함수는 $F(x) = (1-\varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\sigma)$ 이고 Φ는 표준정규분포함수이고 $\varepsilon = 0.1$ 과 $\sigma = 3.0$ 이 사용되었다.

코시분포에서는 이차적률이 존재하지 않기 때문에, 표준정규분포의 표준편차에 대응하는 σ를 선택한다. 즉, $\int_{-\sigma}^{\sigma} (\pi(1+x^2))^{-1} dx = 0.6827 = \Phi(1) - \Phi(-1)$으로 두고 구한 σ 값은 1.8326 이다.

여러기지 p값들에 대해 4개의 블럭들과 5개의 처리들을 가지는 확률화 블럭 계획법을 고려하여야 하는데 여기서는 p=3 인 경우만을 고려하고, 칸의 크기는 다음과 같은 두가지 경우를 고려하였다.

Case 1 : $n_{1j} = 5,\ n_{2j} = 5,\ n_{3j} = 5,\ n_{4j} = 5,\ j = 1, \cdots, 5.$

Case 2 : $n_{1j} = 2,\ n_{2j} = 4,\ n_{3j} = 6,\ n_{4j} = 8,\ j = 1, \cdots, 5.$

또한, 정점이 2, 3 과 4일 때를 고려하고 각 정점에 대해서 처리효과들의 다음과 같은 형태를 고려하였다.

Peak 2 : $(2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma,\ 2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma/3,\ 0)$

Peak 3 : $(\delta\sigma/3,\ 2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma,\ 2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma/3)$

Peak 4 : $(0,\ \delta\sigma/3,\ 2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma,\ 2\delta\sigma/3)$

여기서 δ는 0.0(0.2)1.0 이고 σ는 각 모집단에서의 표준편차이다.
위와 같은 실험 계획을 1,000회 수행한 결과, Case 1인 경우에 모든 정점과 모든 분포에 대하여 U의 실험검정력이 우수하고, Case 2에서 정점이 3인 경우는 A_w^*가 A보다 우수하고 A는 U보다 우수함을 알 수 있고 정점이 2와 4인 경우는 A_w^*의 실험검정력이 U와 A의 실험검정력보다 높게 나타나며 U와 A의 실험검정력은 유사함을 알 수 있다. 따라서 정점을 알때 블럭 크기에 차이가 있을 때는 제안된 검정법의 실험검정력이 우수함을 알 수 있다.
앞으로의 연구계획은 정점을 모르는 경우에 통계량의 점근분포와 더불어 점근 성질들을 알아보고, 정점이 주어진 경우의 제안된 통계량과 비교하고자 한다.

표 2. A_w^*, U와 A의 실험검정력 ($\alpha = 0.05$, $h = 2$)

분포	통계량	Case 1 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	Case 2 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
균일분포	A_w^*	0.056	0.259	0.632	0.907	0.987	1.000	0.056	0.258	0.678	0.900	0.993	1.000
	U	0.054	0.286	0.721	0.948	0.993	1.000	0.053	0.257	0.611	0.871	0.984	0.999
	A	0.056	0.259	0.632	0.907	0.987	1.000	0.052	0.247	0.645	0.862	0.992	1.000
정규분포	A_w^*	0.045	0.273	0.639	0.926	0.998	1.000	0.041	0.284	0.661	0.922	0.999	1.000
	U	0.051	0.303	0.716	0.964	0.999	1.000	0.031	0.278	0.624	0.905	0.988	0.999
	A	0.045	0.273	0.639	0.926	0.998	1.000	0.045	0.258	0.618	0.894	0.988	0.999
이중지수분포	A_w^*	0.045	0.358	0.821	0.989	0.996	1.000	0.051	0.349	0.808	0.977	1.000	1.000
	U	0.049	0.407	0.886	0.994	1.000	1.000	0.050	0.339	0.780	0.963	0.999	1.000
	A	0.045	0.358	0.821	0.989	0.996	1.000	0.051	0.317	0.778	0.968	0.999	1.000
코시분포	A_w^*	0.055	0.269	0.647	0.932	0.994	0.999	0.052	0.290	0.662	0.921	0.993	0.999
	U	0.052	0.308	0.718	0.964	0.997	0.999	0.065	0.267	0.630	0.890	0.985	0.997
	A	0.055	0.269	0.647	0.932	0.994	0.999	0.053	0.266	0.633	0.899	0.990	0.998
오염정규분포	A_w^*	0.052	0.330	0.776	0.976	1.000	1.000	0.039	0.337	0.780	0.969	0.999	1.000
	U	0.035	0.372	0.830	0.988	1.000	1.000	0.050	0.318	0.737	0.960	0.999	1.000
	A	0.052	0.330	0.776	0.976	1.000	1.000	0.038	0.314	0.752	0.957	0.999	1.000

표 3. A^*_w, U와 A의 실험검정력 ($\alpha = 0.05$, $h = 3$)

분포	통계량	Case 1 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	Case 2 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
균일분포	A^*_w	0.042	0.187	0.453	0.752	0.922	0.993	0.045	0.229	0.486	0.737	0.938	0.987
	U	0.036	0.195	0.476	0.779	0.941	0.993	0.055	0.181	0.436	0.654	0.887	0.959
	A	0.042	0.187	0.453	0.752	0.922	0.993	0.047	0.199	0.435	0.701	0.915	0.977
정규분포	A^*_w	0.047	0.185	0.496	0.776	0.953	0.985	0.046	0.213	0.499	0.788	0.944	0.990
	U	0.042	0.191	0.512	0.800	0.965	0.991	0.041	0.192	0.419	0.713	0.883	0.976
	A	0.047	0.185	0.496	0.776	0.953	0.985	0.046	0.205	0.464	0.752	0.918	0.989
이중지수분포	A^*_w	0.048	0.253	0.648	0.909	0.986	1.000	0.046	0.241	0.626	0.893	0.991	0.997
	U	0.049	0.272	0.686	0.927	0.991	1.000	0.038	0.202	0.563	0.851	0.963	0.993
	A	0.048	0.253	0.648	0.909	0.986	1.000	0.044	0.241	0.585	0.873	0.985	0.995
코시분포	A^*_w	0.058	0.206	0.483	0.802	0.932	0.986	0.049	0.211	0.519	0.784	0.946	0.991
	U	0.054	0.217	0.497	0.812	0.958	0.992	0.050	0.182	0.447	0.673	0.885	0.968
	A	0.058	0.206	0.483	0.802	0.932	0.986	0.052	0.194	0.471	0.732	0.919	0.986
오염정규분포	A^*_w	0.055	0.252	0.619	0.875	0.987	1.000	0.039	0.250	0.596	0.885	0.982	0.998
	U	0.055	0.272	0.646	0.894	0.987	1.000	0.040	0.204	0.520	0.811	0.953	0.992
	A	0.055	0.252	0.619	0.875	0.987	1.000	0.046	0.224	0.564	0.854	0.969	0.996

표 4. A^*_w, U와 A의 실험검정력 ($\alpha = 0.05$, $h = 4$)

분포	통계량	Case 1 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	Case 2 δ 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
균일분포	A^*_w	0.050	0.253	0.645	0.926	0.993	0.998	0.047	0.259	0.667	0.911	0.990	0.999
	U	0.043	0.302	0.725	0.961	0.997	1.000	0.057	0.246	0.610	0.896	0.981	0.999
	A	0.050	0.253	0.645	0.926	0.993	0.998	0.048	0.252	0.614	0.893	0.985	1.000
정규분포	A^*_w	0.043	0.255	0.661	0.915	0.990	1.000	0.054	0.278	0.668	0.936	0.993	1.000
	U	0.043	0.297	0.732	0.952	0.997	1.000	0.055	0.255	0.620	0.921	0.989	1.000
	A	0.043	0.255	0.661	0.915	0.990	1.000	0.044	0.278	0.624	0.914	0.989	1.000
이중지수분포	A^*_w	0.057	0.347	0.840	0.985	0.999	1.000	0.052	0.345	0.816	0.982	0.997	1.000
	U	0.058	0.404	0.892	0.991	1.000	1.000	0.055	0.322	0.774	0.970	0.996	1.000
	A	0.057	0.347	0.840	0.985	0.999	1.000	0.052	0.326	0.765	0.978	0.996	1.000
코시분포	A^*_w	0.048	0.270	0.663	0.908	0.985	1.000	0.046	0.296	0.680	0.924	0.987	1.000
	U	0.045	0.314	0.750	0.951	0.994	1.000	0.049	0.264	0.641	0.892	0.985	0.997
	A	0.048	0.270	0.663	0.908	0.985	1.000	0.039	0.262	0.625	0.895	0.976	0.999
오염정규분포	A^*_w	0.061	0.359	0.795	0.973	1.000	1.000	0.045	0.318	0.799	0.982	1.000	1.000
	U	0.053	0.394	0.861	0.991	1.000	1.000	0.041	0.309	0.770	0.966	0.998	1.000
	A	0.061	0.359	0.795	0.973	1.000	1.000	0.045	0.307	0.769	0.976	1.000	1.000

참고 문헌

(1) Archambault, W.A.T., Mack, G.A. and Wolfe, D.A. (1977). K-sample Rank Tests Using Pair-Specific Scoring Functions, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 5, 195-207.

(2) Chacko, V.J. (1963). Testing Homogeneity against Ordered Alternatives, *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 34, 945-956.

(3) Chen, Y.I. and Wolfe, D.A. (1990). A Study of Distribution-Free Tests for Umbrella Alternatives, *Biometrical Journal*, Vol. 32(1), 47-57.

(4) Hettmansperger, T.P. and Norton, R.M. (1987). Tests for Patterned Alternatives in K-sample Problems, *Journal of the American Statistical Associations*, Vol. 82, 292-299.

(5) Jonckheere, A.P. (1954). A Distribution-Free K-sample Test against Ordered Alternatives , *Biometrika*, Vol. 41, 133-145.

(6) Kim, D.H. and Kim, Y.C. (1992). Distribution-Free Tests for Umbrella Alternatives in a Randomized Block Design, *Journal of Nonparametric Statistics*, Vol. 1(4), 277-285.

(7) Mack, G.A. and Wolfe, D.A. (1981). K-sample Rank Tests for Umbrella Alternatives, *Journal of the American Statistical Associations*, Vol. 76, 175-181.

(8) Shi, N.Z. (1988a). A Test of Homogeneity for Umbrella Alternatives and Tables of the Level Probability, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. A17(3), 657-670.

(9) Shi, N.Z. (1988b). Rank Test Statistics for Umbrella Alternatives, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. A17(6), 2059-2073.

(10) Simpson, D.G. and Margolin, B.H. (1986). Recursive Nonparametric Testing for Dose-Response Relationship Subject to Downturns at High Doses, *Biometrika*, Vol. 73, 589-596.

(11) Skillings, J.H. and Wolfe, D.A. (1978). Distribution-Free Tests for Ordered Alternatives in a Randomized Block Design, *Journal of the American Statistical Associations*, Vol. 73, 427-431.

Nonparametric Tests Using Optimal Weights For Umbrella Alternatives In A Randomized Block Design[4)]

Dong Hee, Kim[5)] , Young Cheol, Kim[6)]

Abstract

In this paper we propose nonparametric tests using optimal weights for umbrellaalternatives in a randomized block design.

We obtain the optimal weights by maximizing the asymptotic relative efficiency of the proposed test statistics with respect to Mack and Wolfe(1981) type test statistic, and investigate asymptotic relative efficiencies of the proposed test statistics using these optimal weights relative to Mack and Wolfe type statistic and linear rank statistic. Throughout simulations for small samples, the proposed test statistic has good powers rather than the other two tests when the block sizes are different.

4) The Present Studies were supported (in part) by the Matching Fund Programs of Research Institute for Basic Science, Pusan National University, Korea, 1994, Project NO. RIBS-PNU-94-101.

5) Department of Statistics, Pusan National University, Pusan, 609-735. Korea.

6) Department of Statistics, Pusan National University, Pusan, 609-735, Korea.